S. 1802 c. 10

~~K3. 6. 11.~~

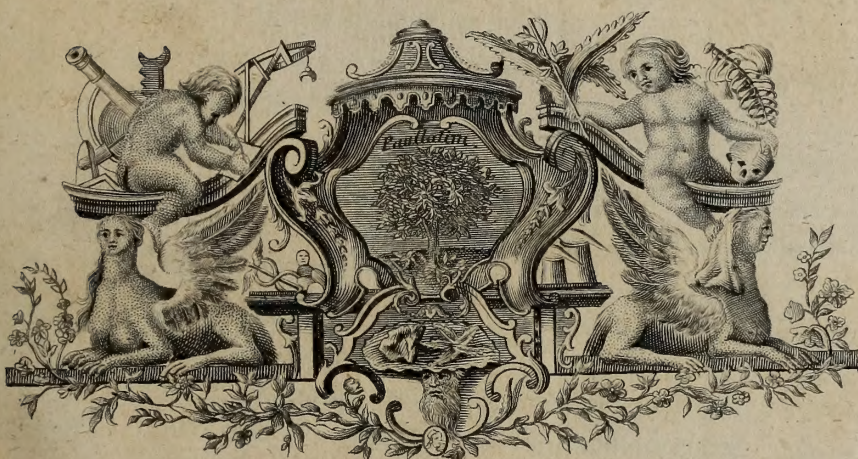
X2. 4. 10

S 1802. d.10.

COMMENTARII ACADEMIAE SCIENTIARVM IMPERIALIS *PETROPOLITANAE.*

Tomus X.

AD ANNVM MDCCXXXVIII.



PETROPOLI,
TYPIS ACADEMIAE.
cIↄ Iↄccxlvii.

BRITISH MUSEUM
NATURAL HISTORY

INDEX
COMMENTARIORVM

In Claſſe Mathematica.

Leonardi Euleri, Disquiſitio de Bilancibus. p. 3.

Nicolai Bernoullii, Inquiſitio in ſummam ſeriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ etc. pag. 19.

Leonardi Euleri, De motu cymbarum remis propulſarum in fluuiis. p. 22.

Eiusdem, De aequationibus differentialibus, quae certis tantum caſibus integrationem admittunt. p. 40.

Georg. Wolfgang. Krafftii, Solutiones trium problematum Aſtronomicorum. p. 56.

Leonardi Euleri, De machinarum tam ſimplicium quam compoſitarum vſu maxime lucroſo. p. 67.

Ioannis Bernoullii, Compendium Analyſeos pro inuentione vis centralis in orbibus mobilibus planetarum p. 95.

Leonardi Euleri, De attractione corporum Sphaeroidico-Ellipticorum. p 102.

D. B. Commentationes de immutatione et extenſione principii conſeruationis virium viuarum, quae pro motu corporum coeleſtium requiritur. p. 116.

Euleri, Theorematum quorumdam Arithmeticorum Demonſtrationes. p. 125.

Danielis Bernoullii, Commentationes de ſtatu aequilibrii corporum humido inſidentium. p. 147.

Leonardi Euleri, Solutio problematis cuiusdam a Celeb. Dan. Bernoullio propoſiti. p. 164.

In

In Claſſe Phyſica.

Georgii Wolfg. Krafftii, De reflexione lucis, in tranſitu per medium diaphanum oriunda, experimenta et explicationes. p. 183.

Eiusdem, De nouo oſcillationum genere. p. 200.

Diſſertationis hydraulicae, pars ſecunda, continens Methodum directam et vniuerſalem ſoluendi omnia problemata Hydraulica, quaecunque de aquis per canales cuiuscunque figurae fluentibus formari ac proponi poſſunt. p. 207.

Ioſiae Weitbrechtii, Solutio problematis Phyſiologici. p. 261.

I. Ammani, De Filicaſtro, nouo plantarum genere, aliisque minus notis rarioribus filicum ſpeciebus. p. 278.

Ioannis Georgii Gmelini, De frigore et calore glaciei, niuis et aquae. p. 303.

I. Ammani, Deſcriptio Cameli Bactriani binis in dorſo tuberibus, e ſcriptis D. G. Meſſerſchmidii collecta. p. 326.

In Claſſe Hiſtorica.

Theophili Sigefridi Bayeri, Geographia Ruſſiae vicinarumque regionum, circiter A. C. DCCCCXLVIII. Ex ſcriptoribus ſeptentrionalibus. p. 371.

G. F. Mülleri, De Scriptis Tanguticis in Sibiria repertis commentatio. p. 420.

Obſeruationes Aſtronomicae.

Godofredi Heinſii, De Tranſitu Lunae per Hyades d. $\frac{22.\ Dec.}{2.\ Ian.}$ An. $173\frac{7}{8}$. Petropoli obſeruato et methodo determinandi locum ſtellae ad lunam, quando haec iſtam tranſit. p. 469.

CLAS-

CLASSIS PRIMA.

CONTINENS

MATHEMATICA.

DISQVISITIO
DE
BILANCIBVS.
AVCTORE
L. Eulero.

Quanquam doctrina de bilancibus a plurimis auctoribus tanto ſtudio eſt pertractata, vt nil amplius hac in re deſiderari poſſe videatur: tamen ſere omnes, duo capita, quae in fabrica bilancium maximi ſunt momenti, neglexerunt, vel potius animum ab iis abſtraxerunt, ne inquiſitio nimis fieret difficilis et intricata. Omnes enim propemodum, qui de bilancibus ſcripſerunt, ad pondus ipſius bilancis non attenderunt, ſed bilancem tanquam grauitatis expertem ſunt contemplati, quae poſitio, cum in rerum natura locum non inueniat, veram naturae bilancium cognitionem non parum impediuit; prout ex ſequentibus fuſius apparebit. Deinde etiam omnes tantum ad ſtatum aequilibrii reſpexerunt, nec de motu erant ſolliciti, quo bilanx ſeſe in ſitum quietis recipit. Ab hoc autem motu bonitas bilancis maxime pendet, ex eoque, ſi non recte ſe habeat, ingentia vitia oriri poſſunt. Hanc ob rem conſtitui in hac diſſertatione plenam theoriam de bilancibus ex certiſſimis mechanicis principiis euoluere; atque ex ea regulas deriuare, quae in conſtructione bilancium maximam habebunt vtilitatem. Etiamſi enim artifices ſola praxi edocti plerasque harum regularum obſeruent, Tabula I. et II.

 tamen

tamen cum vera earum fundamenta nondum fuerint ſatis cognita, non eſt dubitandum, quin theoria penitus exculta, ipſa praxis ad ſummum perfectionis gradum euehatur. Ita autem in hoc negotio verſabor, vt primum, proprietates, quas perfectam bilancem habere oportet, exponam; atque deinceps rationem bilances conſtruendi inueſtigem, qua illis requiſitis ſatisfiat, et intentae proprietates obtineantur.

REQVISITVM I.

Bilanx perfecta ita debet eſſe comparata, vt, ſi vtrinque aequalia pondera tangentibus imponantur, bilanx in ſitu erecto quieſcat.

Situs erectus bilancis duplici modo cognoſci ſolet; ſcilicet vel ex ſitu verticali examinis ſeu lingulae, vel ex ſitu horizontali ſcapi ſeu lineae rectae, quae puncta ſcapi, ex quibus lances cum ponderibus ſuspenduntur, coniungit: ad ſcapum enim ſeu potius hanc lineam examen ſitum tenet normalem. Commodiſſime autem ſitus erectus bilancis ex ſitu verticali examinis cognoſcitur; tota namque bilanx ex agina libere dependente ſuspenditur, quae agina cum ſemper teneat ſitum verticalem, congruentia examinis cum agina ſimul ſitum erectum bilancis indicare debet. Ceterum vſus, cui bilances ſunt deſtinatae, hanc proprietatem potiſſimum poſtulat, quo ope ponderum cognitorum cuiusque oneris pondus expedite cognoſci queat. Quamuis quidem aeque facile cuiusuis oneris pondus explorari poſſet, ſi bilanx ita inſtrueretur, vt pondera datam inter ſe rationem tenentia bilancem in ſitum erectum conſtituerent, tamen cum huius generis bilances pluribus labo-

laborent incommodis, id genus tanquam praecipuum hic examini ſubiiciam, quod in ponderum aequalitate conſiſtit.

Problema I.

Structuram bilancis determinare, quo in ſitu erecto quieſcat, ſi lancibus vtrinque pondera aequalia imponantur.

Solutio.

Sit O centrum motus, circa quod bilanx mobilis exiſtit, A et B puncta ſcapi, ex quibus lances cum ponderibus ſuspenduntur. Sint porro MM et NN lances, et P et Q onera ſeu pondera vtrinque impoſita; lancis vero MM pondus ſit $= m$, et lancis NN pondus $= n$. Solius bilancis ſine lancibus et ponderibus ſumtae pondus ponatur $= M$, eiusque centrum grauitatis ſit in g. Ponamus iam rectam AB horizontalem, in quam per centrum motus O ducatur normalis IOC, quae lingulam ſeu examen repraeſentabit, ſitumque verticalem tenebit. Quo ergo haec bilanx ponderibus et lancibus onuſta iſtum ſitum erectum conſeruet, oportet vt momenta vtrinque ſint aequalia. Hanc ob rem erit $(P+m)AC = (Q+n)BC + M.Cc$ ducta ex g in AB verticali gc. Quia autem per hypotheſin pondera P et Q ſunt inter ſe aequalia, ponatur $P = Q = p$ eritque $(p+m)AC = (p+n)BC + M.Cc$ ſeu $p(AC-BC) = n.BC - m.AC + M.Cc$; cuius aequationis illa pars $p(AC-BC)$ vtcunque eſt variabilis, cum bilanx ad quaecunque pondera aequalia debeat eſſe accommodata; altera vero pars $n.BC - m.AC + M.Cc$ eſt conſtans, nec a ponderum impoſitorum quantitate pendet. Quocirca quo aequalitas inter has partes

Tabula I. Figura 1.

eſſe queat, neceſſe eſt, vt vtraque ſit $=o$; hinc obtinebimus has duas aequationes AC $=$ BC atque $m.$AC $= n.$ BC $+$ M.Cc ſeu $m-n=\frac{\text{M.C}c}{\text{AC}}$. Ex his aequationibus duae ſequentes regulae conſequuntur, pro ſtructura bilancium.

Reg. I. Perpendicularis OC, quae ex centro motus O in rectam AB puncta ſuſpenſionum iungentem demiſſa, eam ſimul in duas partes aequales diuidere debet.

Reg. II. Lances ita debent eſſe comparatae ratione ipſarum grauitatis, vt etiam vacuae appenſae bilancem in ſitu erecto conſeruent; hinc enim fluit altera aequatio, $m-n=\frac{\text{M.C}c}{\text{AC}}$. Q. E. I.

Corollarium 1. Cum ergo ſit AC $=$ BC atque OC normalis in AB, erit triangulum AOB iſoſceles, et brachium OA $=$ brachio OB.

Corollarium 2. Si centrum grauitatis ſcapi g cadat in verticalem OC puta in G, tum ob C$c=o$, fient lances inter ſe pondere aequales.

Corollarium 3. Si centrum grauitatis ſcapi g in rectam IOC cadat, tum etiam ſolus ſcapus non onuſtus ſitum erectum tenebit, quod non accidit, ſi g extra rectam IOC ceciderit.

Corollarium 4. Quia pondera P et Q aequalia bilancem in ſitu erecto tenent, perſpicuum eſt, ſi pondera commutentur, tum bilancem aeque in ſitu erecto eſſe manſuram.

Scholion 1. Solent vulgo pro bilancibus hae duae praecipue regulae praeſcribi, vt primo ſcapi brachia inter ſe exacte ſint aequalia, atque ſecundo vt ſint etiam aeque grauia,

grauia, ſeu quod eodem redit, vt ſcapi centrum grauitatis in rectam O C cadat. Sed ex ſolutione problematis ſatis apparet, hanc poſteriorem regulam non eſſe abſolute neceſſariam; ſed bilancem huic primo requiſito ſatisfacere poſſe, etiamſi ſcapi centrum grauitatis, *g*, extra O C cadat. Dummodo igitur ſcapi brachia ſint aeque longa, vtcunque pondere inter ſe diſcrepent, bilanx ad ponderandum apta reddi poterit lancibus ſcilicet ita inſtruendis, vt bilancem in aequilibrio ſeruent; tum enim aequalia pondera lancibus impoſita aeque bilancem in ſitum erectum conſtituent, ac ſi brachia eſſent aequiponderantia. Hanc ob rem quo primo requiſito ſatisfiat, ſufficit vt brachia conficiantur exacte aeque longa, neque opus eſt, vt de aequalitate ponderum brachiorum tantopere ſimus ſolliciti.

Scholion 2. Sin autem brachia A C et B C longitudine fuerint inaequalia, tum pondera aequalia lancibus impoſita bilancem in ſitu erecto non conſeruabunt, ſi quidem ſolae lances appenſae hunc ſitum produxerint; ſed quo ſitus erectus obtineatur, longiori brachio minus pondus breuiori vero maius debet appendi; inuerſam nimirum brachiorum rationem pondera tenere debent. Ex quo perſpicitur, ſi haec pondera, quibus bilanx in ſitum erectum fuit perducta, inter ſe commutentur, ita vt pondus P lanci N N, pondus Q vero lanci M M imponatur, tum ſitum erectum conſeruari non poſſe, ſed bilancem in eam plagam, in quam brachium longius vergit, inclinari debere; vnde tutiſſimus obtinetur modus explorandi, vtrum ſcapi brachia ſint inter ſe aequaliter longa. Interim tamen, etiamſi bilanx vitio hoc laboret, cuiusuis oneris verum

pondus

pondus poterit cognoſci, ſi poſtquam bilanx ſolis lancibus in ſitum erectum fuerit reducta, onus in vtraque lance ponderetur, atque inter pondera inuenta medium proportionale capiatur.

REQVISITVM II.

Bilanx perfecta ita debet eſſe comparata, vt ponderum lancibus impoſitorum vel minimam inaequalitatem ſenſibili inclinatione patefaciat.

De bilancibus vtique non ſolum requiri ſolet, vt ponderum aequalitatem oſtendant, ſed etiam vt, quando pondera impoſita fuerint inaequalia, hanc ipſam inaequalitatem declarent. Fit autem hoc inclinatione ſcapi circa centrum motus vel axem in illam plagam, vbi grauius pondus eſt ſuspenſum; haec ergo inclinatio eo maior eſſe debet, quo maius fuerit diſcrimen ponderum. Sed iſta inclinatio praecipue requiritur, cum pondera appenſa vel minimum a ſe inuicem differunt; quam proprietatem cum bilanx habuerit, exactiſſime cognoſci poteſt, vtrum pondera impoſita ſint inter ſe aequalia an ſecus. Contra vero bilanx, quae hac proprietate caret, inſignem errorem in ponderando producere poteſt, dum etiam ponderum inaequalium aequalitatem mentitur. Hanc ob rem bilances requiruntur, vt vel minimam ponderum impoſitorum inaequalitatem ſenſibili inclinatione ob oculos ponant.

Problema II.

Inclinationem determinare, qua pondera inaequalia lancibus impoſita bilancem ex ſitu erecto declinant.

Tabula I. Figura 2. *Solutio.* Sit vt ante O centrum ſeu axis motus, circa quem ſcapus AOB mobilis exiſtit, A et B puncta, ex-

ex quibus lances M et N ſuspenduntur, g vero centrum grauitatis ſcapi, eiusque pondus $=$ M. Ex O ad AB ducatur normalis OC, quae rectam AB per requiſitum I biſecabit, eaque producatur, in eamque ex g perpendicularis ducatur gG. Iam lanci M cuius pondus ſit m imponatur pondus p, lanci N vero, cuius pondus $=n$, impoſitum ſit maius pondus $p+q$. Inclinabitur ergo ſcapus circa O, ad quam inclinationem commodius repraeſentandam, ponam directionem grauitatis tanto angulo declinaſſe a verticali, quantum ſcapus inclinauit, ita vt nunc ſcapus in ſitu AB maneat, rectae vero AM, BN, gL, quae ante erant verticales, abeant in Am, Bn et gl; atque lances cum ponderibus progreſſae ſint in m et n. Cum igitur ponamus bilancem in hoc ſitu inclinato in aequilibrio eſſe conſtitutum, oportet vt momenta omnia circa O ſe mutuo deſtruant. Sit anguli inclinationis bilancis, cui anguli MAm, NBn, et L$g\,l$ aequales ſunt, ſinus $=a$, coſinus $=\alpha$ poſito ſinu toto $=1$: ex natura aequilibrii vero debet eſſe $(p+m)$AO. ſin. mAO $+$ Ma. OG $=(p+q+n)$BO ſin. nBO $+$ Mα. Cc; potentiam enim M ſeu pondus ſcapi, quae ſecundum directionem grauitatis gl agit, reſoluo in ſuas laterales Ma et Mα, quarum illa in directione Gg haec vero in gL eſt ſita. At eſt ſinus mAO $=$ ſin. $(\text{MAO}-\text{MA}m)=\frac{\text{AC}.\alpha+\text{OC}.a}{\text{AO}}$; atque ſinus nBO $=$ ſin. $(\text{NBO}+\text{NB}n)=\frac{\text{AC}.\alpha-\text{OC}.a}{\text{AO}}$ ponendo BC $=$ AC et BO $=$ AO. His ergo ſubſtitutis habebimus hanc aequationem $(p+m)(\text{AC}\alpha+\text{OC}.a)$ $+\text{M}a.\text{OG}=(p+q+n)(\text{AC}\alpha-\text{OC}.a)+\text{M}\alpha.\text{C}c$, quae propter $m.\text{AC}=n.\text{AC}+\text{M}.\text{C}c$ per requiſitum

primſum abit ordinata in hanc $\frac{a}{\alpha} = \frac{q.AC}{2p.OC + (m+n)OC + q.OC + M.OG}$ $=$ tangenti anguli inclinationis, ad quam pondera p et $p + q$ lancibus M et N impoſita bilancem deducunt. Q. E. I.

Corollarium 1. Ex hac formula apparet, quo maior ſit longitudo brachiorum, eo maiorem quoque fore angulum inclinationis, qui a data differentia ponderum oritur ceteris paribus. Hinc ergo naſcitur pro conficiendis bilancibus

Regula III. *Scapus bilancis tam longus fiat, quam fieri poteſt; cauendum ſcilicet ne a ponderibus appenſis incuruetur; quo longior enim ſcapus accipitur, eo magis inflexioni eſt obnoxius.*

Corollarium 2. Tangens anguli inclinationis, quo libra ex ſitu erecto declinatur ſeu $\frac{a}{\alpha}$ eſt $\frac{q.AC}{(2p+m+n+q+M)OC + M.OG}$; vbi notandum in denominatore $2p + m + n + q + M$ integrum bilancis lancibus et ponderibus oneratae pondus exprimere.

Corollarium 3. Dato ergo angulo inclinationis bilancis; cuius tangens ſit $= A$, et pondere leuiore p, exceſſus grauioris q ſupra p reperiri poterit, erit namque $q = \frac{A(OC(2p+m+n) + M.OG)}{AC - A.OC}$; vnde apparet, ſi fuerit $OC = o$, tum exceſſum q etiam incognito pondere p definiri poſſe.

Corollarium 4. Si fuerit $(2p + m + n + q)OC + M.OG = o$ tum quidem minimum ſuperpondium q maximum generaret angulum inclinationis nempe rectum, ſed et hoc non conueniret, cum ponderatio foret difficillima.

Corollarium 5. Hanc ob rem quantitatis $(2p + m + n + q)OC + M.OG$ nec nihil nec multominus quantitas negatiua eſſe poterit. Interim tamen quo fuerit minor, eo

eo maior orietur inclinatio a data ponderum impoſitorum differentia.

Scholion 1. Quamuis per hoc requiſitum quantitas $(2p+m+n+q)OC+M.OG$ tam parua eſſe deberet quam fieri poſſet, tamen aliae rationes ſuadent, vt ea mediocrem obtineat valorem. Quando enim tertio requiſito ſatisfacere volumus, tum eidem quantitati maximus valor tribui debebit, quamobrem diligenter cauendum eſt ne alteri requiſito ſatisfaciendo alteri nimis parum ſatisfiat. Ceterum ex ſolutione huius problematis patet methodus, cuius ope ex bilancis inclinatione dignoſci poterit, quanto alterum pondus altero ſit grauius. Cum igitur pro data bilance regula fuerit formata, tum ad ponderandum carere poterimus minimis ponduſculis, quae alias ad perfectum aequilibrium in ſtatu erecto producendum non ſine moleſtia vſurpantur. Angulus autem inclinationis in hoc negotio commodiſſime cognoſcetur ex arcu circulari centrum in *o* habente, et in gradus diuiſo, qui in aginae ſupremo annectitur, in quo examen tanquam index inclinationis angulum indicabit.

Scholion 2. Hic etiam non eſt praetereundum, locum centri grauitatis *g*, quatenus extra verticalem OG cadit, formulam inuentam minime afficere, ſed eam inuariatam manere, dummodo eandem a recta AB diſtantiam ſeruet. Multo minus igitur tanta cura in id erit incumbendum, vt brachia ſcapi fiant aeque ponderoſa, cum inaequalitas ponderum brachiorum nec primo nec ſecundo requiſito vel minimum aduerſetur. Neque vero etiam ſequenti requiſito aduerſari deprehendetur. Deinde etiam

B 2 quod

quod alias in examinandis bilancibus fieri ſolet, ſine ſufficienti ratione inquiritur, vtrum ſolus ſcapus ſuſpenſus ſitum teneat erectum: et multo minore ratione illae bilances, in quibus hoc non deprehenditur, pro erroneis habentur. Cum ergo bilanx primo requiſito ſatisfaciens fuerit inuenta, quod examen, quemadmodum ſit inſtituendum, ſupra expoſui, ſi, quantum huic requiſito ſecundo ſatisfaciat, quis explorare velit, is poſtquam ponderibus impoſitis bilancem in ſitum erectum perduxerit, alteri ponderi tam parum adiiciat, quantum ad ſenſibilem inclinationem producendam ſufficit; quo minus enim additamentum ſuffecerit, eo magis bilanx huic requiſito ſatisfaciens. Saepius autem variae grauitatis ponderibus adhibendis iſtud examen ſuſcipi conuenit, cuius rationem ex aequatione inuenta intelligere licet.

REQVISITVM III.

Perfecta bilanx ita debet eſſe comparata, vt, cum lancibus aequalia pondera fuerint impoſita, atque bilanx ex ſitu erecto depellatur, tum ea maxima vi in ſitum erectum vrgeatur.

Requiſitum hoc maximi eſt momenti et in plurimis bilancibus vehementer deſideratur. Cum enim bilanx praecedentibus requiſitis ſatisfaciens aequalibus ponderibus fuerit onuſta, atque ex ſitu aequilibrii declinetur, tum neceſſe eſt, vt ſeſe in eum ſitum reſtituat. Reſtitutio autem ſine vi fieri nequit, quamobrem vis adeſſe debet, quae bilancem in ſitum erectum repellat; ſin enim haec vis nulla eſſet, tum bilanx in ſitu inclinato permaneret, etiamſi pondera aequalia eſſent, et propterea inepta foret, et nullius vſus. Praeterea quoniam reſtitutio ſemper

per a frictione aliquantulum impeditur, vis reſtituens frictioni ſuperandae par eſſe debet. Quo maior autem fuerit vis reſtituens, eo citius et fortius bilancem in ſitum aequilibrii reſtituet, neque frictio aliaque impedimenta nocebunt, quemadmodum in pluribus bilancibus euenit, quae vix in quietem perduci poſſunt. Interim tamen frictio omni ſtudio eſt vitanda, quod variis modis praeſtari poteſt, ſatis iam cognitis. Ex hac denique vis reſtituentis ratione tres bilancium ſpecies alias multum agitatae clare explicari poſſunt. Praeceps enim bilanx, quae etiam ſed incongrue celer vocatur, eſt, in qua vis reſtituens fit negatiua, efficitque vt bilanx aliquantillum ex ſitu aequilibrii depulſa non ſolum non reſtituatur, ſed adeo praeceps ſubuertatur. Pigra ſecundo eſt bilanx, quando vis reſtituens quidem eſt poſitiua, ſed tam parua, vt vix frictionem ſuperare queat. Tertia tandem ſpecies complectitur bilances bonas, quae illis vitiis carent, et quas hic deſcribere conſtitui.

Problema III.

Si bilanx, cuius lances aequalibus ponderibus ſint oneratae, dato angulo ex ſitu erecto inclinetur, inuenire vim, quae bilancem in ſitum erectum reſtituat.

Solutio. Vtrique lanci M et N onus ſit impoſitum, cuius pondus $=p$; maneantque vt ante pondus ſapi $=M$ eiusque centrum grauitatis in g, et pondera lancium M et N reſpectiue m et n. Inclinetur nunc bilanx angulo, cuius ſinus $=a$ et coſinus $=\alpha$ ex ſitu erecto ita, vt bilanx tota ſitum teneat $mAOBn$, angulique MAm, NBn et Lgl aequales ſint angulo inclinationis. His praemiſſis Figura 2.

 erit

erit vis reſtituens quaeſita aequalis exceſſui momentorum quibus brachium OA deprimitur ſupra momenta, quibus brachium OB deprimitur. Iſte igitur exceſſus erit $= (p + m)AO.$ ſin. $mAO + M\alpha.OG - (p + a)BO.$ ſin. $nBO - M\alpha.Cc$; iſte autem valor ob $AO = BO$ et $AC = BC$ atque ſin. $mAO = \frac{AC\ \alpha + OC.a}{AO}$ nec non ſin. $nBO = \frac{AC.\alpha - OC.a}{AO}$ – induet hanc formam $(p + m)(AC.\alpha + OC.a) + M.a.OG - (p + n)(AC.\alpha - OC.a) - M.\alpha.Cc$, quae cum ſit $m.AC - n.AC - M.Cc = o$ reducetur ad $(2p + m + n)OC.a + M.OG.a$. Huic igitur expreſſioni vis reſtituens eſt aequalis; tantaque vi bilanx ponderibus aequalibus p et p vtrinque onerata, cum angulo cuius ſinus eſt $= a$ inclinetur, in ſitum erectum reſtituitur. Q. E. I.

Corollarium 1. Ceteris ergo paribus vis reſtituens ſemper eſt proportionalis ſinui anguli, quo bilanx ex ſitu erecto declinatur, ita vt quo magis bilanx inclinetur, eo maiori vi ea ſe reſtituat.

Corollarium 2. Si vis reſtituens inuenta per ſinum anguli inclinationis a diuidatur, prodibit $(2p + m + n)OC + M.OG$, quo valore exprimitur firmitas, qua bilanx in ſitu ſuo erecto perſiſtit.

Corollarium 3. Si ergo $(2p + m + n)OC + M.OG$ fuerit quantitas negatiua, bilanx erit praeceps; ſin eadem quantitas habuerit valorem affirmatiuum quidem, ſed nimis paruum, tum bilanx erit pigra; at ſi eiusdem expreſſionis valor fuerit affirmatiuus ſatis magnus, bilanx erit bona.

Corollarium 4. Quo ergo huic requiſito plene ſatisfieret, oporteret $(2p + m + n)OC + M.OG$ maximum habere valorem: ſed per requiſitum ſecundum eidem

quan-

quantitati minimus valor poſtulatur. Quamobrem ne alterutri vis inferatur, mediocris valor huic quantitati erit tribuendus.

Corollarium 5. Si OC affirmatiuum habet valorem tum firmitas creſcit maioribus ponderibus imponendis; ſin OC fiat $= o$, tum firmitas bilancis in ſitu erecto perpetuo erit eadem, ſiue maioribus ſiue minoribus ponderibus fuerit onuſta. Sin autem OC negatiuum habuerit valorem, cadente ſcilicet C ſupra O, tum pro minoribus ponderibus bilanx poterit eſſe bona, maioribus autem ponderibus imponendis fiet pigra atque etiam praeceps.

Corollarium 6. Si punctum G ſupra O cadat, tum bilanx pro minoribus ponderibus poterit eſſe praeceps, quamdiu ſcilicet $2p + m + n$ minus fuerit quam $\frac{M. OG}{OC}$; cum autem maiora pondera imponantur, libra fiet ſucceſſiue pigra tandemque bona.

Corollarium 7. Bilances ergo confici poſſunt, quae ad minora pondera ſatis ſint bonae, ad maiora vero ineptae; contra etiam bilances idoneae eſſe poſſunt pro maioribus ponderibus, pro minoribus vero nullius vſus.

Scholion 1. Quanquam haec duo requiſita poſteriora ſecundum ſcilicet et tertium ita inter ſe pugnant vt alterum formulae $(2p + m + n)$ OC $+$ M. OG minimum, alterum vero eiusdem formulae maximum valorem poſtulet, tamen augenda ſcapi longitudine ſecundo requiſito ſatisfieri poteſt ſine detrimento tertii. Cum ergo ſcapus ſit ſatis longus, in valore ipſius $(2p + m + n)$ OC $+$ M. OG determinando magis ad tertium requiſitum erit reſpiciendum quam ad ſecundum. Interim tamen ſufficiet valorem illum mediocris magnitudinis aſſumſiſſe,

ſiſſe, cum id tantum intendatur; vt vis reſtituens frictioni ſuperandae par ſit. Quo magis ergo frictio minuetur, eo minor eſſe poterit valor formulae $(2p + m + n)$ OC + M. OG; quia inde tertium requiſitum nullam vim patitur, ſecundum vero eo fortius obtinetur. Quod autem ad frictionem attinet, probe notandum eſt, eam augeri, ſi maiora pondera bilanci imponantur; quo circa conueniet, bilancem ita conſtruere vt vis reſtituens eo magis augeatur, quo pondera appenſa ſint maiora. Hoc autem euenire non poteſt niſi OC affirmatiuum habuerit valorem; nam ſi punctum C ſupra O caderet, tum auctis ponderibus vis reſtituens minueretur, atque etiam negatiuum valorem conſequeretur, vnde bilanx praeceps et inutilis euaderet.

Scholion 2. Ex his annotationibus ſatis colligere licet, in bilancibus nec punctum C nec punctum G ſupra axem motus O commode conſtitui poſſe, niſi expreſſe bilanx deſideretur, quae vel ad minima vel ad maxima pondera tantum eſſet accommodata, pro reliquis vero inepta. Quamuis autem omnis bilanx vi ſtructurae et materiae ex qua eſt confecta, in ponderibus limites habeat, quos transgredi non licet, ne bilanci vis inferatur; tamen ob rationes iam expoſitas non conueniet alterutrum punctorum C et G ſupra O collocare. Exceptis igitur caſibus, quibus vel punctum C vel G ſupra axem motus O cadit, reliquarum ſpecierum bilancium duae praecipuae erunt, quibus vel punctum C vel punctum G in ipſum punctum O incidit; atque hae ſpecies ita ſunt comparatae, vt, ſi earum proprietates recenſuero, eo facilius reliquarum ſpecierum indoles cognoſci poſſit.

I. Ca-

I. Cadat igitur primo punctum C in axem motus O, centrum grauitatis autem ſcapi G infra rectam AB ſit collocatum interuallo GO, perinde enim eſt, ſiue in ipſam recta IOG incidat ſiue extra eam, quia eius diſtantia tantum ab AB in conſiderationem venit. Si nunc lanci MM pondus p lanci vero NN pondus $p+q$ imponatur iſta bilanx ex ſitu erecto inclinabitur ad angulum, cuius tangens erit $=\frac{q.AO}{M.OG}$. Iſta igitur bilanx hanc habebit proprietatem, vt ex data inclinatione facile diſcrimen ponderum innoteſcat, etiamſi neutrum pondus fuerit cognitum. Poſita enim tangente anguli inclinationis $=A$, erit ponderum differentia ſemper $=\frac{M A.OG}{AO}$. huius igitur ſpeciei bilances commodiſſime arcu circulari inſtrui poſſunt, in quo inclinatio bilancis indicatur. Firmitas porro, qua bilanx cum pondera aequalia fuerint impoſita, in ſitu erecto perſiſtit erit $=M.OG$. vnde apparet in hoc bilancium genere firmitatem ſemper eſſe eandem ſiue pondera impoſita fuerint magna ſiue parua. Cum igitur frictio creſcat, creſcentibus ponderibus impoſitis, iſta bilanx exactior erit pro minoribus ponderibus explorandis, quam pro maioribus. Iſta igitur bilancium ſpecies potiſſimum vſum habebit in re docimaſtica, vbi minima tantum ponduſcula imponuntur et explorantur. Tabula II. Fig. 1.

II. Si centrum grauitatis ſcapi G in centrum motus O cadat, vel vtrumque ſaltem aequaliter diſtet a recta AB, habebitur altera primaria bilancium ſpecies, in qua punctum O ſupra recta AB poſitum erit. Si nunc huiusmodi bilancis lanci MM, cuius pondus ſit $=m$, imponatur pondus p, alteri vero lanci NN, cuius pondus ſit $=n$ pondus imponatur $=p+q$, bilanx ex ſitu erecto ad angulum inclinabitur cuius tangens erit $=\frac{q.AC}{(2p+m+n+q)OC}$. Tabula II. Fig. 2.

Ex data ergo inclinatione bilancis huius differentia ponderum cognoſci non poterit, niſi altero pondere cognito; vnde tamen alterius ponderis exceſſus q ope calculi facile determinabitur. Firmitas vero, qua bilanx iſta in ſitu erecto, cum pondera aequalia fuerint impoſita, perſiſtit eſt $= (2p + m + n)$ O C; ex qua formula apparet, firmitatem creſcere, ſi pondera maiora imponantur. Quo circa haec bilanx aeque apta erit ad pondera maiora exploranda quam ad minora; hoc vero a bilance prioris caſus deficiet, quod, in caſu ponderum impoſitorum inaequalium, diſcrimen minus ſenſibiliter indicet, ſi pondera fuerint maiora, quam ſi ſint minora. Vtraque igitur bilanx peculiaribus gaudet praerogatiuis, vnde reliquarum bilancium proprietates colligi poterunt.

Scholion 3. Tribus hiſce requiſitis continentur omnia quae alias in bilancibus requiri ſolent; ita vt bilanx, quae omnibus iſtis requiſitis ſatisfacit, merito pro perfecta haberi poſſit. Momenta igitur ad quae in confectione bilancium eſt attendendum, ſunt 1. punctorum ſcapi ex quibus lances ſuſpenduntur interuallum, quod per regulam tertiam maximum eſſe debet. 2. Diſtantia centri motus a recta, puncta ſuſpenſionum, iungente, vbi notandum eſt hanc rectam a perpendiculari ex centro motus in eam ducta, in duas partes aequales ſecari debere per regulam primam. 3. Pondus ſcapi cum ſui centri grauitatis diſtantia a recta puncta ſuſpenſionum iunigente. 4. Lances, quae ita debent eſſe comparatae, vt vacuae appenſae ſcapum in ſitu erecto teneant per requiſitum ſecundum. 5. Poſitio mutuo centri motus, centri grauitatis ſcapi, et puncti inter puncta ſuſpenſionum medii attente eſt conſideranda, cum inde efficiatur, vt vtrique requiſitorum ſecundi et tertii maxime ſatisfiat. In hoc autem negotio finis praeſertim inſpici debet, cui bilanx quaeque deſtinatur.

IN-

INQVISITIO
IN
SVMMAM SERIEI $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+$ etc.
PER
Nic. Bernoullium, J. V. D. et Prof.

Sit ſumma quaeſita $=s$, ponatur Z$\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+$ etc. erit $s=Z+\frac{1}{4}s$, ſiue $\frac{3}{4}s=Z$ vel $s=\frac{4}{3}Z$. Sed Z eſt $=$quadrato ſeriei $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ etc. demta dupla ſumma rectangulorum ſingulorum binorum terminorum eiusdem ſeriei. Ponantur $a=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{}{5.7}+\frac{1}{7.}+$ etc. $b=\frac{1}{1.5}+\frac{1}{3.7}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{7.11}+$ etc. $c=\frac{1}{1.7}+\frac{1}{3\ 9}+\frac{1}{5.11}+\frac{1}{7.13}+$ etc. $d=\frac{1}{1.\ 9}+\frac{}{3.11}+\frac{1}{5.13}+\frac{1}{7.15}+$ etc. $e=\frac{1}{1.11}+\frac{1}{3.13}+$ etc. et ita porro: ponatur item $q=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ etc. eritque $Z=qq+2a-2b+2c-2d+2e-$ etc. Eſt autem $a=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}$, $b=\frac{1}{4}\times(\frac{1}{1}+\frac{1}{3})$, $c=\frac{1}{6}\times(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5})$, $d=\frac{1}{8}+(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7})$ $e=\frac{1}{10}\times(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9})$, etc. Oriuntur enim ſeries a, b, c, d, e etc. ſubtrahendo ſeriem $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$etc. mutilatam 1. 2. 3. 4. etc. primis terminis a ſe ipſa integra et diuidendo reliquum reſpectiue per 2, 4, 6, 8, 10, etc. quibus valoribus ſubſtitutis inuenitur $Z=qq+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\times(\frac{1}{1}+\frac{1}{3})+\frac{1}{3}\times(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5})-\frac{1}{4}\times(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7})+\frac{1}{5}\times(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9})-$ etc. $=qq+\frac{1}{1}-\frac{4}{2.1.3}+\frac{23}{3.1.3.5}-\frac{176}{4.1.3.5.7}+\frac{1689}{5.1.3.5.7.9}+\frac{19524}{6.1.3.5.7.9.11}+$ etc. Summa huius ſeriei (quae vocetur y, ita vt ſit $Z=qq+y$) expeditius inueſtigatur mutando eam in aliam, cuius omnes termini ſint affirmatiui, quod fieri poteſt coniungendo dimidia duorum quorumlibet terminorum conti-

guorum. Nimirum $y = \frac{1}{2.1} + \frac{1}{2.1.3} - \frac{7}{2.3.1.3.5} + \frac{58}{3.4.1.3.5.7} - \frac{582}{4.5.1.3.5.7.9} + \frac{6927}{5.6.1.3.5.7.9.11} - \text{etc.} = \frac{1}{2.1} + \frac{1}{4.1.3} + \frac{2}{3.1.3.5} - \frac{29}{3.4.1.3.5.7} + \frac{144}{4.5.1.3.5.7.9} - \frac{1338}{5.6.1.3.5.7.9.11} + \text{etc.} = \frac{1}{2.1} + \frac{1}{4.1.3} + \frac{2}{6.1.3.5} + \frac{6}{4.1.3.5.7} - \frac{78}{4.5.1.3.5.7.9} + \frac{519}{5.6.1.3.5.7.9.11} - \text{etc.} = \frac{1}{2.1} + \frac{1}{4.1.3} + \frac{2}{6.1.3.5} + \frac{6}{8.1.3.5.7} + \frac{24}{5.1.3.5.7.9} - \frac{384}{5.6.1.3.5.7.9.11} + \text{etc.} = \frac{1}{2.1} + \frac{1}{4.1.3} + \frac{2}{6.1.3.5} + \frac{6}{8.1.3.5.7} + \frac{24}{10.1.3.5.7.9} + \frac{120}{6.1.3.5.7.9.11}$ — etc. ita vt tandem in terminis mere affirmatiuis habeatur $y = \frac{1}{2.1} + \frac{1}{4.1.3} + \frac{1.2}{6.1.3.5} + \frac{1.2.3}{8.1.3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{10.1.3.5.7.9.} + \frac{1.2.3.4.5}{12.1.3.5.7.9.11} + \text{etc.}$, cuius ſeriei progreſſio manifeſta eſt, ſi enim T ſignificet terminum quemuis ordine n, et $\overset{1}{T}$ terminum ſequentem, cuius ordo ſit $n+1$, erit generaliter $nnT = (n+1)(2n+1)\overset{1}{T}$. Cum vero relatio horum terminorum componatur ex quantitatibus, in quibus indeterminata n aſcendit ad duas dimenſiones, hoc indicio eſt, ſummam dictae ſeriei definiri poſſe per aequationem differentialem ſecundi gradus. Proponatur enim inuenienda ſumma ſequentis ſeriei generalis $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{- - - - -} + Tx^n + \overset{1}{T}x^{n+1} + \text{etc.}$ in qua ſit generaliter $(a.n.(n-1) + bn + c.)T = (e.(n+1.)n + f.(n+1) + g)\overset{1}{T}$, id eſt, $(b+c)A = (2e+2f+g)B$, $(2a+2b+c)B = (be+3f+g)C$, $(6a+3b+c)C = (12e+4f+g)D$, $(12a+4b+c)D = (20e+5f+g)E$ etc. Summa eius definietur per ſequentem aequationem, ſumta dx conſtante; $gydx^2 + fxdydx + ex^2 ddy = gAxdx^2 + fAxdx^2 + cxydx^2 + bx^2dydx + ax^3ddy$. Nam haec

haec aequatio poſitis $y = Ax + Bxx + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 +$ etc. $dy = dx(A + 2Bx + 3Cxx + 4Dx^3 + 5Ex^4 +$ etc.$)$ $ddy = dx^2(2B + 6Cx + 12Dxx + 20Ex^3 +$ etc.$)$ et diuiſo vtrinque per dx^2, tranſit in hanc

$$\begin{aligned} & gAx + gBxx + gCx^3 + gDx^4 + gEx^5 + etc. \\ & fAx + 2fBxx + 3fCx^3 + 4fDx^4 + 5fEx^5 + etc. \\ & \quad + 2eBxx + 6eCx^3 + 12eDx^4 + 20eEx^5 + etc. \end{aligned} = \begin{aligned} & gAx + cAxx + cBx^3 + cCx^4 + cDx^5 + etc. \\ & fAx + bAxx + 2bBx^3 + 3bCx^4 + 4bDx^5 + etc. \\ & \quad + 2aBx^3 + 6aCx^4 + 12aDx^5 + etc. \end{aligned}$$

vbi omnes termini homogenei ſe inuicem deſtruunt. Quod ſi igitur proponatur ſummanda ſeries $y = \frac{1}{2.1}x + \frac{1}{4.1.3}xx + \frac{1.2}{6.1.3.5}x^3 + \frac{1.2.3}{8.1.3.5.7}x^4 + \frac{1.2.3.4}{10.1.3.5.7.9}x^5 +$ etc., in qua eſt $A = \frac{1}{2}$ et $nnT = (n+1)(2n+1)\overset{1}{T}$, ſiue $(n(n-1)+n)T = (2(n+1)n + (n+1))\overset{1}{T}$, per conſequens $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$, $e = 2$, $f = 1$, $g = 0$: his valoribus in ſuperiori aequatione ſubſtitutis obtinebitur $xdydx + 2x^2ddy = \frac{1}{2}xdx^2 + xxdydx + x^3ddy$, ſiue, per x diuidendo, $dydx + 2xddy = \frac{1}{2}dx^2 + xdydx + xxddy$, et per dy multiplicando $dy^2dx + 2xdyddy = \frac{1}{2}dydx^2 + xdy^2dx + xxdyddy$, cuius integralis eſt $xdy^2 = \frac{1}{2}ydx^2 + \frac{1}{2}xxdy^2$, quae aequatio ſeparatis indeterminatis euadit $\frac{dy^2}{y} = \frac{dx^2}{2x - xx}$, ſiue $\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$, cuius integralis eſt $2\sqrt{y} = \int \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$. Quia vero eſt $\int \frac{dx}{\sqrt{(2x - xx)}}$ dependet a longitudine arcus circularis, et in caſu, vbi $x = 1$ eſt aequalis quadranti circuli, cuius radius $= 1$, vel ſemicircumferentiae circuli, cuius diameter $= 1$, et quia $q = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. denotat etiam longitudinem quadrantis circuli, cuius diameter $= 1$, ſi peripheria eius integra vocetur p, erit $q = \frac{1}{4}p$ et $2\sqrt{y} = \frac{1}{2}p$, ſiue $y = \frac{1}{16}pp$, hinc $Z = qq + y = \frac{1}{8}pp$ et $s = \frac{4}{3}Z = \frac{1}{6}pp$. Q. E. I.

DE MOTV CYMBARVM
REMIS PROPVLSARVM IN FLVVIIS
AVCTORE
L. Eulero.

Tabula III. et IV.

Duplici modo cymbarum motus ſub calculum mathematicum cadit, altero mechanico, altero geometrico, qui duo modi ratione tractandi prorſus inter ſe differunt. Qui enim hanc materiam mechanice tractare ſuſcipiet, is primo ex principiis hydroſtaticis in aptiſſimam cymbarum figuram inquiret; tum vero ex vi remorum cymbae accelerationem atque integrum motum tam in aqua quieſcente quam in fluuio determinabit. Idem vero argumentum qui geometrice pertractare voluerit, is primo viam, quam cymba vtcunque directa et remis propulſa deſcribet, definire tenetur; deinde autem varia problemata, quibus commodiſſimus et citiſſimus traiectus per fluuios poſtulatur, reſoluet. Equidem in hac diſſertatione conſtitui hanc rem, quatenus in geometriam incurrit, euoluere, praetermiſſa altera parte, quae a principiis mechanicis pendet. Antequam vero hoc opus aggrediar, neceſſe eſt, vt aliquot hypotheſes praemittam atque ſtabiliam, quibus haec tractatio ad forum mere geometricum reducatur.

Hypotheſis 1.

Cymba, quae in aqua quieſcente remis propellitur, motu aequabili progreditur in directione ſpinae ſeu rectae proram et puppem iungentis.

In

In hac hypotheſi nihil pono niſi quod actu in omnibus cymbis, quae in aqua quieſcente remis propelluntur, obſeruatur. Primo enim remiges ex vtraque cymbae parte aequalibus viribus remigare ſolent, vnde fit vt cymba in ipſa ſpinae directione promoueatur. Deinde ab initio quidem cymbae motus eſt tardior, cum motus a quiete incipiat; at ſtatim fit aequabilis. Quam primum enim cymba tantam nacta eſt celeritatem, vt reſiſtentia aquae vim propellentem adaequet, tum neque accelerationem neque retardationem adipiſcetur; atque idcirco motu aequabili feretur. Inaequalitatem autem, quae in ipſo motus initio adeſt, hic tuto negligere licet, cum ſtatim ceſſet, atque initium computi tum demum conſtitui queat, quando motus revera aequabilis eſt factus. Haec eadem autem hypotheſis locum habet, quando directio ſpinae vi gubernaculi immutatur; tum enim ſimul ipſius cymbae directio variatur, celeritate manente eadem. Ope gubernaculi ergo effici poteſt, vt cymba in quacunque curua data, motu aequabili promoueatur; dummodo ſpina perpetuo ſecundum curuae datae tangentem dirigatur.

Hypotheſis 2.

Cymba in fluuio conſtituta et remis non propulſa, a fluuio abripitur, et in ipſa fluuii directione eademque, quam fluuius habet, celeritate promouebitur.

Si cymba minore quam fluuius celeritate mouetur, tum a vi fluuii acceleratur, donec aequalem celeritatem fuerit conſecuta, quod cum euenerit, cymba cum fluuio pari celeritate, atque in eadem directione abripietur.

Tem-

Tempus autem, quo cymba adhuc tardius mouetur, quam fluuius, hic negligimus, cum ſit exiguum, atque in mechanicam tractationem pertineat; quam hic non attingo. Deinde vero etiam ſi ſummo rigore hunc cymbae motum examinare vellemus, is vtique ſemper minor foret motu fluuii, propter aeris reſiſtentiam, qua cymbae pars ex aqua eminens impeditur. Sed cum haec differentia ſatis ſit parua, contentus ero, ſi iſtae hypotheſes ad veritatem ſaltem prope accedant, atque in praxi tuto negligi queant. Meum enim propoſitum non eſt hanc materiam accuratiſſime ſecundum leges motus inveſtigare, ſed tantum per hypotheſes a veritate non multum diſcrepantes ad geometriam puram reuocare, ad quod hae duae hypotheſes ſunt accommodatae.

Cum igitur per has hypotheſes conſtet, quemadmodum tum cymba remis propulſa in aqua quieſcente tum etiam remis deſtituta in fluuio moueatur; colligere hinc licebit, quomodo cymba remis propulſa in fluuio progredi debeat. Hoc enim caſu cymba motu compoſito mouebitur, qui oritur ex duobus lateralibus, altero ſcilicet, quo moueretur, ſi aqua quieſceret, altero quo moueretur, ſi remi abeſſent. Compoſitione motus igitur in ſubſidium vocata, tota tractatio noſtra per ſolam geometriam abſolui poterit; quamobrem ad ſequentia problemata huc ſpectantia ſoluenda progrediar.

Problema I.

Data fluuii in ſingulis locis celeritate atque directione, quam ſpina cymbae vbique tenet, inuenire curuam, quam cymba in fluuio deſcribet.

So-

Solutio.

Traiiciat recta AB curſum fluminis normaliter, ſitque AMC curua quaeſita, in qua cymba ſeu potius eius centrum grauitatis M moueatur; erunt huius curuae applicatae MP ad rectam AB tanquam ad axem ductae in directione fluuii ſitae. Ponamus cymbam in M perueniſſe, hocque in loco directionem ſpinae eſſe aMb, quae cum directione fluminis PM angulum PMb conſtituat, cuius ſinus ſit $=m$, et coſinus $=n$, poſito ſinu toto $=1$, ita vt ſit $m^2+n^2=1$. Exponat c celeritatem cymbae, qua in aqua quieſcente remis propulſa vniformiter moueretur ſecundum directionem ſpinae; u vero exprimat celeritatem qua fluuius in loco M progreditur in directione ſua Mq; quae celeritas vtcunque ſit variabilis. Vera autem celeritas, qua cymba ſeu potius eius centrum grauitatis M actu in curua AMC mouetur, ſit $=v$; quae quaeritur. Iam ponatur abſciſſa $AP=x$; applicata $PM=y$, et via emenſa $AM=s$. atque ducatur applicata proxima pm, vt ſit $Pp=Mn=dx$; $mn=dy$ atque $Mm=ds$. Si nunc euaneſcente fluuii celeritate cymba ſolis remis vrgeretur, tum progrederetur in directione ſpinae ab, celeritate c, qua puncto temporis centrum grauitatis M perueniat in b. (per hyp. 1.) At ſi ceſſante vi remorum cymba a ſolo fluminis curſu agitaretur, tum propelleretur M in directione PM, celeritate $=u$, qua eodem tempuſculo pertingat ex M in q, (per hyp. 2.) ita vt futurum ſit $Mb : Mq=c:u$. Si ergo cymba ab vtraque vi, remorum ſcilicet et fluuii coniunctim, vrgeatur, tum neceſſe eſt, vt in diagonali Mm, parallelogrammi $Mbmq$ in-

Tabula III. Fig. 1.

incedat, celeritate huic ipſi diagonali proportionali, adeo vt ſit $Mm : Mb = v : c$ ſeu $Mm : Mq = v : u$. Quia autem eſt ſin. $PMb =$ coſ. $bMn = m$; et coſ. $PMb =$ ſin. $bMn = n$; erit tang. $bMn = \frac{n}{m} = \frac{bn}{Mn}$; vnde prodit $bn = \frac{ndx}{m}$ et $bm = Mq = dy + \frac{ndx}{m}$. At cum ſit $\frac{Mn}{Mb} = m$; erit $Mb = \frac{dx}{m}$. Quoniam vero eſt $Mb : Mq = c : u$ erit $dx : mdy + ndx = c : u$, vnde pro curua quaeſita iſta emergit aequatio $udx = cmdy + cndx$; ſeu $dy = \frac{dx(u - cn)}{cm}$. Vera autem cymbae celeritas v, qua in hac curua mouetur, cognoſcetur ex analogia $ds : \frac{dx}{m} = v : c$, vnde erit $v = \frac{cmds}{dx}$. Q. E. I.

Corollarium 1. Cum ſit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, erit loco dy, valorem inventum $\frac{dx(u - cn)}{cm}$ ſubſtituendo, $ds = \frac{dx}{cm} \sqrt{(c^2 - 2cnu + uu)}$

Corollarium 2. Ex data in ſingulis locis celeritate cymbae vera innoteſcet tempus, quod cymba ad arcum curuae AM abſoluendum impendit: erit ſcilicet hoc tempus $= \int \frac{ds}{v} = \int \frac{dx}{cm}$

Corollarium 3. Si ergo directio cymbae ſeu angulus PMb per ſolam abſciſſam AP determinetur, tum etiam tempus, quo arcus datae abſciſcae reſpondens abſoluitur, per ſolam abſciſſam definietur, neque a fluuii celeritate huiusque mutabilitate pendebit.

Corollarium 4. Ex aequatione curuae AMC naturam exprimente $dy = \frac{dx(u - cn)}{cm}$ intelligitur, vbi fuerit $u > cn$ ibi cymbam in fluuio deſcendere, vbi vero ſit $u < cn$ ibi aſcendere; quo denique in loco ſit $u = cn$ ibi cymbam a recta AB maxime diſtare, eoque in loco curuae deſcriptae tangentem parallelam fore rectae AB.

Corol-

Corollarium 5. Si motus cymbae verus per Mm decomponatur in motum traiicientem, cuius directio parallela eſt rectae AB, et motum aſcenſus vel deſcenſus, cuius directio ad priorem eſt normalis et cum directione curſus fluminis congruit, erit motus traiicientis celeritas $= cm$; motus deſcendentis vero celeritas $= \frac{cmdy}{dx} = u - cn$.

Corollarium 6. Celerrime igitur cymba fluuium traiiciet, ſi fuerit $m = 1$, hoc ergo fit, ſi ſpina cymbae perpetuo ad curſum fluuii normaliter dirigatur. Tempus autem, quo cymba hoc caſu a ripa per interuallum AP $= x$ elongatur, erit $= \frac{x}{c}$.

Corollarium 7. Si cymba ſecundum ipſam fluuii directionem at contra curſum dirigatur, fiet $m = o$, et $n = 1$, vnde motus traiiciens euaneſcet, cymbaque vel ascendet vel deſcendet, prout u vel minor vel maior fuerit quam c, erit ſcilicet celeritas, qua aſcendit, $= c - u$.

Corollarium 8. Sin autem prora cymbae deorſum dirigatur fiet $n = -1$, atque cymba in fluuio recta deſcendet celeritate $c + u$, hoc eſt aggregato celeritatum fluuii et ipſius cymbae, qua in aqua quieſcente moueretur.

Scholion. In ſolutione huius problematis poſui proram cymbae b ſurſum directam, ita vt angulus PMb, quem directio ſpinae cum curſu fluminis allabentis conſtituit, ſit acutus; ſed eadem ſolutio aeque patet ad angulos obtuſos. Nam ſi angulus PMb foret obtuſus, tum eius coſinus n accipi debet negatiuus, eademque aequatio, quam inveni, pro hoc caſu valebit. Ceterum cum iſta ſolutio latiſſime pateat, ad clariorem cognitionem expediet nonnullos caſus particulares euoluiſſe, ad quod ſequentia problemata adiicere viſum eſt.

Problema II.

Fig. 1. *Si Cymba ab cum directione fluuii* PM *perpetuo eundem conſeruet angulum* PMb, *invenire curuam* AMC, *in qua cymba mouebitur.*

Solutio.

Sit AEFB alueus fluuii, et AB recta fluuium normaliter traiiciens, quae ducta ſit ex puncto A, e quo cymba egreſſa. Sit cymbae celeritas, qua in aqua quieſcente progrederetur $= c$, quam exprimat recta AD $= c$; curua vero AQB exponat fluuii celeritatem in ſingulis latitudinibus, ita vt eius applicatae PQ denotent celeritatem, qua portio fluuii PMmp labitur; poſita ergo AP $= x$ erit PQ $= u$. Sit porro AMC curua quaeſita, in qua cymbae ab centrum grauitatis M mouetur, atque eius applicata PM $= y$: vera vero celeritas, qua cymba elementum Mm percurrit $= v$; anguli denique PMb ſinus ſit $= m$ et coſinus $= n$, poſito ſinu toto $= 1$, qui per hypotheſin ſunt conſtantes. His poſitis erit $dy = \frac{dx(u-cn)}{cm}$ atque $y = \int \frac{udx}{cm} - \frac{nx}{m}$: vnde erit PM $= \frac{areae.\,APQ}{m.\,AD} - \frac{n}{m}$ AP; ex qua aequatione facilis conſtructio ſequitur curuae quaeſitae AMC per quadraturam curuae AQB. Tempus vero quo cymba arcum AM abſoluit erit $= \int \frac{dx}{cm} = \frac{x}{cm} = \frac{AP}{m.\,AD}$.

Corollarium 1. Cum ſit $dy = \frac{dx(u-cn)}{cm}$ erit $ddy = \frac{dx\,du}{cm}$ poſito dx conſtante. Curua ergo AMC habebit punctum flexus contrarii, vbi eſt $du = o$, hoc eſt, vbi celeritas fluuii eſt maxima.

Corol-

Corollarium 2. Tangens anguli AMP, quem curua a cymba deſcripta cum curſu fluminis PM conſtituit eſt $= \frac{dx}{dy} = \frac{cm}{u - cn}$. Vbi ergo celeritas fluuii u euaneſcit, ibi ſpinae directio curuam tangit.

Corollarium 3. Si C fuerit punctum in oppoſita fluuii ripa, in quo cymba appellit, erit $BC = \frac{areae.\ AQBA}{m.\ AD} - \frac{n}{m} AB$. Quare ſi fuerit area $AQBA = n\ AB.\ AD$, tum cymba in ipſo puncto B appellet.

Corollarium 4. Si ponatur $AB = a$; area $AQBA = ab$, atque $BC = f$, erit $f = \frac{ab}{mc} - \frac{na}{m}$. Ex qua aequatione erit $mcf = ab - nac$. atque $m^2 c^2 f^2 = c^2 f^2 - n^2 c^2 f^2 = a^2 b^2 - 2na^2 bc + n^2 a^2 c^2$, vnde oritur $n = \frac{a^2 b \pm f\surd(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)}{(a^2 + f^2)c}$ atque $m = \frac{abf \mp a\surd(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)}{(a^2 + f^2)c}$; at $\frac{m}{n} = \frac{ac^2 f \pm ab\surd(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)}{a^2b^2 - c^2f^2}$

Corollarium 5. Si ergo cymba debeat appellere ad punctum datum C; tangens anguli PMB, quem cymba cum directione curſus fluuii conſtanter tenere debet, erit $= \frac{ac^2 f \pm ab\surd(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)}{a^2b^2 - c^2f^2}$ Niſi ergo ſit $c\surd(a^2 + f^2) > ab$ hoc eſt niſi fuerit $AD > \frac{area\ AQBA}{AC}$, fieri nequit vt cymba ad punctum C appellat.

Corollarium 6. Quia m negatiuum valorem habere nequit, alias enim cymba non ad ripam oppoſitam accederet; vnica directione cymbae ad punctum C perueniri poterit, ſi fuerit $bf < \surd(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)$ ſeu $b < c$.

Corollarium 7. At ſi fuerit $bf > \surd(a^2c^2 + c^2f^2 - a^2b^2)$ ſeu $b > c$. tum duplici modo cymba ad punctum C pertingere poterit, ob duplicem valorem ipſius m affirmatiuum. Oportet autem praetera eſſe $f > \frac{a}{c}\surd(bb - cc)$; ne m prodeat imaginarium.

Corollarium 8. His autem caſibus, quibus duplici angulo directionis cymba ad C pertingit, ſemiſumma duorum horum angulorum aequalis eſt angulo BAC ducta chorda A C. Semidifferentiae vero horum angulorum ſinus eſt $\frac{ab}{c\sqrt{(aa+ff)}}$ atque coſinus $= \frac{2ab\sqrt{(aacc+ccff-aabb)}}{cc(aa+ff)}$. Vnde ex ſemiſumma et ſemidifferentia facile vterque angulus ſatis faciens reperitur.

Corollarium 9. Quando ergo fit, vt angulus, qui eſt ſemidifferentia, minor ſit angulo BAC, tum duplici angulo punctum C attingi poterit. Citius autem cymba ad C appellet, angulum ſequendo maiorem, ſeu potius eum cuius ſinus eſt maior; tempus enim, quo cymba fluuium traiicit eſt $= \frac{AB}{m\,AD}$, vbi m eſt ſinus anguli, quem directio cymbae cum curſu fluminis tenet.

Scholion Ex aequatione $PM = \frac{areae\,APQ}{m.AD} - \frac{n}{m}AP$, quam pro curua a cymba deſcripta inueni, ſequens ſatis facilis deducitur conſtructio huius curuae. Data enim curua ALQB, cuius applicatae celeritatem fluuii exprimunt, per A ducatur recta GAH parallela directioni, quam cymba perpetuo tenet, et ex D in eam demittatur perpendicularis DG erit $DG = m.AD$, et $PR = \frac{n}{m}AP$. Hanc obrem curuae deſcriptae quoduis punctum M reperitur ſumendo $PM = \frac{areae.\,APQ}{DG} - PR$. Tempus vero, quo cymba ex A in M peruenit exprimitur per $\frac{AP}{DG}$. Ceterum notandum eſt, ſi curua ALB per puncta A et B tranſeat, quod fere in omnibus fluuiis locum habet, quippe qui in medio celerrime ad ripas vero tardiſſime labuntur, tum non ſolum AH eſſe tangentem curuae in A, ſed etiam tangentem in C eſſe ipſi AH parallelam. Praeterea ſi

Tabula IV. Figura 1.

fluuius

fluuius in aequalibus ab vtraque ripa diſtantiis aequales habeat celeritates, ita vt curua ALB diametro gaudeat LIK medium tenente inter ripas AE et BF, tum curua deſcripta AKC duas habebit partes ſimiles AK et KC cis et trans punctum K; in K vero habebit punctum flexus contrarii; prout ex ſuperioribus facile liquet.

Problema III.

Si cymba fluuium traiiciens perpetuo dirigatur verſus punctum fixum H, *definire curuam* AMC, *quam cymba ex* A *egreſſa in fluuio deſcribet.* Tabula III. Figura 3.

Solutio.

Sit vt ante curua AQB ſcala celeritatum fluminis, et AD celeritas c, qua cymba in aqua quieſcente promoueretur; atque $AP = x$ $PM = y$; $PQ = u$, ſin. $PMb = m$, coſ. $PMb = n$. Fluuii autem latitudo AB ſit $= a$, $BG = g$ et $GH = b$; ducta ex puncto fixo H in PM recta normali HGK. Erit ergo $HK = a + b - x$; et $KM = y - g$. Quia autem directio cymbae ab ad punctum H tendit, erit $\frac{a+b-x}{y-g}$ tangens anguli directionis PMb et propterea $= \frac{m}{n}$, vnde fit $m = \frac{a+b-x}{\sqrt{((y-g)^2+(a+b-x)^2)}}$. Cum igitur ſupra pro curua quaeſita iſta inuenta ſit aequatio $dy = \frac{udx}{cm} - \frac{ndx}{m}$, erit pro noſtro caſu $dy = \frac{udx\sqrt{((y-g)^2+(a+b-x)^2)} - c(y-g)dx}{c(a+b-x)}$. Tempus vero, quo cymba ex A in M pertingit, erit $= \int \frac{dx\sqrt{((y-g)^2+(a+b-x)^2)}}{c(a+b-x)}$ Q. E. I.

Corollarium 1, Quamuis in aequatione inuenta variabiles y et x et u, quae ab x pendet, ſint inter ſe permixtae, tamen ſi ponatur $y - g = (a + b - x)z$ a ſe inuicem

uicem ſeparabuntur, prodibit enim haec aequatio $\frac{c\,dz}{\sqrt{(1+zz)}} = \frac{u\,dx}{a+b-x}$.

Corollarium 2. Quia u ab x pendet, ponatur $\int \frac{u\,dx}{a+b-x} = lX$, quod integrale ita ſit acceptum, vt euaneſcat poſito $x=0$. Hinc ergo erit $c\,l(z+\sqrt{(1+zz)}) = lX$ + Conſt. ad quam conſtantem determinandam ponatur $x=0$, fietque $z = \frac{-g}{a+b}$; prodibit ergo Conſt. $= c\,l\,\frac{-g+\sqrt{(g^2+(a+b)^2)}}{a+b}$.

Corollarium 3. Poſito ergo $\int \frac{u\,dx}{a+b-x} = X$ ſeu $X = c^{\int \frac{u\,dx}{a+b-x}}$ habebitur ſequens aequatio integralis pro curua quaeſita $X^{\frac{1}{c}} = \frac{(a+b)z+(a+b)\sqrt{(1+zz)}}{-g+\sqrt{(g^2+(a+b)^2)}}$ ſeu $\frac{X^{\frac{1}{c}}(a+b-x)}{a+b} = \frac{y-g+\sqrt{((y-g)^2+(a+b-x)^2)}}{-g+\sqrt{(g^2+(a+b)^2)}}$.

Corollarium 4. Inuento autem ex his aequationibus y ſeu z per x, erit tempus, quo cymba ex A in M pertingit $= \int \frac{dx\sqrt{(1+zz)}}{c}$, quod propterea conceſſis quadraturis aſſignari poterit.

Corollarium 5. Si punctum H in punctum G ſeu ipſam ripam cadat, vt ſit $b=0$, habebitur $\frac{X^{\frac{1}{c}}(a-x)}{a} = \frac{y-g+\sqrt{((y-g)^2+(a-x)^2)}}{-g+\sqrt{(g^2+a^2)}}$. Si nunc ponatur $x=a$, quo inueniatur $y=BC=f$, ſeu punctum C cognoſcitur, vbi cymba in ripa BF appellet, reperietur $\frac{2f-2g}{-g+\sqrt{(a^2+g^2)}} = 0$, niſi forte hoc caſu $X^{\frac{1}{c}}$ fiat quantitas infinite magna, quae in $a-x=0$ ducta producat quantitatem finitam.

Corol-

Corollarium 6. Si ergo facto $x = a$ quantitas $\frac{X^{\frac{1}{c}}(a-x)}{a}$ euaneſcat, prodibit $f = g$, ſeu $BC = BG$. His ergo caſibus cymba ad ipſum punctum G, ad quod perpetuo dirigebatur, appellet.

Corollarium 7. Ex ipſa autem rei natura intelligitur, ſi extrema curuae AB applicata in B fuerit vel $= 0$, vel minor quam c, hoc eſt, ſi fluuius ad ripam BF minori celeritate feratur, quam cymba propellitur, tum cymbam ſemper ad ipſum punctum G appellere debere, ſi quidem H in G cadit. Si enim in alio puncto appelleret, tum motum verſus G dirigendo moueri pergeret, donec ad G peruenerit.

Scholion.

Quo autem eiusmodi cymbae motus clarius cognoſcatur, exemplum afferam, quo aequationem inuentam penitus euoluere licet. Habeat nimirum fluuius vbique eandem celeritatem, quo ſcala celeritatum fiat recta ab parallela axi AB, et dirigatur cymba perpetuo ad punctum fixum G in ripa oppoſita ſitum, vt ſit $BG = g$. Fiet ergo u quantitas conſtans, quae ſit $= \alpha c$. Hoc ergo caſu habebitur Tabula IV. Fig. 2.

$$lX = \alpha c \int \frac{dx}{a-x} = \alpha c\, l \frac{a}{a-x} \text{ ſeu } X = \frac{a^{\alpha c}}{(a-x)^{\alpha c}}.$$

Hoc ergo valore in aequatione inuenta ſubſtituto prodibit $\frac{a^{\alpha-1}}{(a-x)^{\alpha-1}} = \frac{y-g+\sqrt{((y-g)^2+(a-x)^2)}}{-g+\sqrt{(g^2+a^2)}}$. Hinc patet, ſi fuerit $\alpha < 1$, tum cymbam in ipſo puncto G eſſe appulſuram; ſin autem fuerit $\alpha > 1$, tum cymbam omnino non ripam BF

attingere poſſe. Caſus autem quo fit $\alpha = 1$, ſeu $u = c$ habebitur $\sqrt{(g^2 a^2)} = y + \sqrt{((y-g)^2 + (a-x)^2)}$ ſex $x^2 - 2ax = 2gy - 2y\sqrt{(a^2 + g^2)}$ quae eſt aequatio pro parabola axem habente BF et verticem in F, vbi eſt BF $= \frac{a^2}{2\sqrt{(a^2+g^2)} - 2g}$ eiusque parameter erit $2\sqrt{(a^2 + g^2)} - 2g$; ita vt ergo huius parabolae focus cadat in ipſum punctum G. Ex dato ergo foco G, poſitione axis FB et puncto A, per quod parabola transire debet, parabola deſcribetur.

Problema 4.

Tab: IV. Figura 3.

Data ſcala celeritatum fluuii AQB, *inuenire cymbae directionem in ſingulis locis, qua fiat, vt cymba datam curuam* AMC *deſcribat.*

Solutio.

Quemadmodum applicatae PQ curuae AQB celeritatem fluuii in ſingulis locis P deſignant, ita ſit AD ceteritas qua cymba in directione ſpinae in aqua quieſcente progrederetur. Sit igitur AD $= c$; AP $= x$; PQ $= u$; in curua vero a cymba deſcribenda ponatur applicata PM $= y$; et arcus AM $= s$. vt ideo ſit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$. Sit iam ab directio cymbae quaeſita, quam in ſingulis punctis M habere debet, vt in data curua AMC moueatur; atque anguli PMb ſinus ponatur $= m$ eiusdemque coſinus $= n$ poſito ſinu toto $= 1$. Dantur ergo tum aequatio inter x et u tum etiam aequatio inter x et y, ex quibus vel m vel n definiri oportet. Inuenimus autem in problemate primo hanc aequationem $u\,dx - c\,m\,dy = c\,n\,dx = c\,dx\sqrt{(1 - m^2)}$ ob $n = \sqrt{(1 - mm)}$. Sumendis

mendis igitur quadratis prodibit $u^2 dx^2 - 2cmudxdy + c^2 m^2 dy^2 = c^2 dx^2 - c^2 m^2 dx^2$, quae abit in hanc $c^2 m^2 = \frac{2cmudxdy + c^2 dx^2 - u^2 dx^2}{dx^2 + dy^2}$, ex qua per radicis extractionem reperitur $cm = \frac{udxdy \pm dx\sqrt{(c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2)}}{dx^2 + dy^2}$ atque $cn = \frac{udx^2 \mp dy\sqrt{(c^2 dx^2 + c^2 dy^2 - u^2 dx^2)}}{dx^2 + dy^2}$. Ex his ſequitur anguli PMb tangens, quae eſt $\frac{m}{n} = \frac{ccdydx \pm udx\sqrt{(ccdx^2 + ccdy^2 - u^2 dx^2)}}{uudx^2 - ccdy^2}$ Cymba ergo angulum hunc tenens in curua data AMC incedet. Q. E. I.

Corollarium 1. Angulus PMb cuius tangens eſt $\frac{m}{n}$ commode in duos angulos reſolui poteſt quorum alterius tangens eſt $\frac{dy}{dx}$ alterius vero tangens $\frac{\pm\sqrt{(ccdx^2 + ccdy^2 - u^2 dx^2)}}{udx}$. Quamobrem erit ang. PMb = Ang. tang. $\frac{dy}{dx}$ $\pm$ Ang. tang. $\frac{\sqrt{(ccdx^2 + ccdy^2 - u^2 dx)}}{udx}$.

Corollarium 2. Vbique ergo cymba duplicem angulum PMb tenere poterit, quo in data curua AMC ingrediatur; dummodo fuerit $c^2 dx^2 + c^2 dy^2 > u^2 dx^2$ ſeu $c^2 ds^2 > u^2 dx^2$. Nam ſi alicubi ſaltem fuerit $c^2 ds^2 < u^2 dx^2$, tum omnino fieri nequit, vt curua propoſita a cymba deſcribatur.

Corollarium 3. Quo igitur curua propoſita ſit deſcriptibilis, ita eſſe debet comparata, vt ſit vbique $\frac{c}{u} > \frac{dx}{ds}$ hoc eſt vt ſit vbique $\frac{AD}{PQ} > \frac{Mn}{Mm}$.

Corrollarium 4. Cum nusquam eſſe poſſit $Mn > Mm$, intelligitur, ſi nulla applicata curuae AQB maior ſit quam AD, tum omnem curuam AMC a cymba abſolui poſſe; quia hoc caſu fieri nequit, vt vsquam ſit $\frac{AD}{PQ} < \frac{Mn}{Mm}$.

Corollarium 5. Quod autem ad duplicem angulum directionis attinet, quibus curua data deſcribi poſſe inuenta

 eſt,

eſt, notandum eſt, tum tantum vtrumque locum inuenire, quando vterque ſit affirmatiuus, ſi quidem motus initium in A collocetur. Duplex igitur angulus locum habebit, ſi fuerit Ang. tang. $\frac{dy}{dx} >$ Ang. tang. $\frac{\sqrt{(ccdx^2+ccdy^2-u^2dx^2)}}{udx}$ hoc eſt, ſi fuerit $udy > \sqrt{(cdx^2+c^2dy^2-u^2dx^2)}$ ſeu ſi fuerit $u > c$.

Corollarium 6. Cum vera cymbae celeritas in M, qua elementum Mm abſoluit, ſit $= \frac{cmds}{dx}$; erit noſtro caſu celeritas cymbae vera $= \frac{udy \pm \sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{ds}$ ob $dx^2 + dy^2 = ds^2$.

Corollarium 7. Tempus autem, quo arcus curuae AM abſoluitur erit $= \int \frac{ds^2}{udy \pm \sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}$. idem vero tempus transformando formulam prodit $= \int \frac{udy \mp \sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{u^2-c^2}$; ſi ſcilicet numerator et denominator per $udy \mp \sqrt{(ccds^2 - u^2dx^2)}$ multiplicetur.

Scholion.

Cum celerior cymbae motus tardiori praeferendus ſit, ex duobus directionis angulis quibus cymba datam curuam deſcribit, eum eligere conuenit, cuius ſinus m eſt maior, hoc enim caſu tempus, quod eſt $\int \frac{dx}{cm}$, minus euadet. Hanc ob rem ex ſignis ambiguis vtemur ſuperiore, eritque $cm = \frac{udxdy + dx\sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{ds^2}$; $cn = \frac{udx^2 - dy\sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{ds^2}$; atque angulus PM$b$ aequabitur ſummae angulorum, quorum tangentes ſunt $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{\sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{udx}$, vel quorum ſinus ſunt $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{\sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{cds}$. Aequabitur ergo angulus PMb ſummae angulorum, quorum coſinus ſunt $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{udx}{cds}$, vnde iſte quaeſitus angulus facile reperitur. Tempus autem, quo cymba curuae praeſcriptae portionem AM abſoluit, erit $= \int \frac{udy - \sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)}}{u^2-c^2}$

Quam-

Quamobrem, ſi linea AM fuerit recta, ita vt ſit $y = Kx$, erit tempus per AM $= \int \frac{kudx - dx\surd(cc + cckk - uu)}{uu - cc}$. Apparet igitur hoc caſu eſſe debere $u < c\surd(1 + kk)$.

Problema 5.

Cognita fluuii in ſingulis locis celeritate inuenire lineam citiſſimi traiectus AMC, *in qua cymba citius ex* A *in* C *pertingit, quam per vllam aliam lineam puncta* A *et* C *iungentem.*

Solutio.

Manentibus omnibus, vt in praecedente problemate, curua AMC eius indolis eſt inueſtiganda, vt $\int \frac{udy - \surd(c^2ds^2 - u^2dx^2)}{uu - cc}$ minimum obtineat valorem; hac enim formula tempus exhibetur, qua cymba curuae arcum AM abſoluit. Communicaui autem praeterito anno vniuerſalem methodum quaeſtiones huiusmodi ſoluendi, quae, ſi curua quaeratur, in qua $\int Z dx$ maximum minimumue euadat, ſitque $dZ = F dy + G dx + H dp + I dq + K dr$ etc. exiſtente $dy = p dx$; $dp = q dx$; $dq = r dx$ etc. tum pro curua quaeſita iſthanc praebuit aequationem $0 = F dx - dH + \frac{d\,dI}{dx} - \frac{d^3K}{dx^2}$ etc. exiſtente dx conſtante. Quo ergo formula noſtra ad ſpeciem $\int Z dx$ reducatur pono $dy = p dx$ ſecundum methodum datam; eritque $\int Z dx = \int \frac{pu - \surd(cc + ccpp - u^2)}{u^2 - c^2} dx$, ſeu $Z = \frac{pu - \surd(c^2 + c^2p^2 - u^2)}{u^2 - c^2}$. Prodit igitur Z functio variabilium u et p ſeu x et p, ſiquidem u ab x pendet, prout in problemate, vbi curua AQB ponitur data, poſui. Habebitur ergo $dZ = G dx + H dp$ euaneſcentibus reliquis terminis, indeque pro curua quaeſita reſultabit dH

 $= o$,

$= o$, atque $H = $ conſt. Sufficit itaque quantitatem H inueniſſe ex Z, quae obtinebitur differentiando Z, poſito tantum p variabili. Hanc ob rem reperietur $H = \frac{u}{uu-cc} - \frac{ccp}{(u^2-c^2)\sqrt{(cc+ccpp-uu)}} = $ Conſt. $= \frac{1}{g}$, vnde pro curua quaeſita ſequens emergit aequatio $gu\sqrt{(cc+ccpp-uu)} - ccgp = (uu-cc)\sqrt{(cc+ccpp-uu)}$, quae ſumendis quadratis reducta abit in hanc $p = \frac{cc+gu-uu}{c\sqrt{((g-u)^2-cc)}}$. Cum autem ſit $dy = pdx$, natura curuae quaeſitae iſta exprimetur aequatione $dy = \frac{(cc+gu-uu)dx}{c\sqrt{((g-u)^2-cc)}}$, ex qua, quia variabiles ſunt a ſe inuicem ſeparatae, curua conſtrui poterit, erit enim $y = \int \frac{(cc+gu-uu)dx}{c\sqrt{((g-u)^2-cc)}}$ integrale ita capiendo, vt euaneſcente x fiat $y = 0$. Q. E. I.

Corollarium 1. Quo ergo curua AMC inueniatur, per quam cymba tempore breuiſſimo ex A ad datum punctum C pertingat, conſtans arbitraria g ita eſt definienda, vt poſito $x = AB = a$, fiat $y = BC = b$.

Corollarium 2. Quia ergo curua AMC eſt inuenta, innoteſcet angulus directionis PMb, quem cymba in quouis loco M tenere debet, quo in curua inuenta moueatur. Cum enim ſit $\sqrt{(cc+ccpp-uu)} = \frac{ccgp}{cc+gu-uu} = \frac{cg}{\sqrt{((g-u)^2-cc)}}$ erit $\sqrt{(c^2ds^2-u^2dx^2)} = \frac{cgdx}{\sqrt{((g-u)^2-cc)}}$; indeque tangens anguli $PMb = \frac{-\sqrt{((g-u)^2-cc)}}{c} = \frac{-(cc+gu-uu)dx}{ccdy}$.

Corollarium 3. Secans ergo anguli PMb eſt $\frac{-g+u}{c}$ eiusque adeo coſinus $= \frac{-c}{g-u}$, quia anguli bMn ſinus. Cymba ergo ſemper in hoc angulo directa breuiſſimo tempore ex loco A in locum C pertingit.

Co-

Corollarium 4. Si fluuius vbique eadem celeritate feratur, ſeu u fuerit conſtans, tum linea citiſſimi traiectus fiet recta: hoc ergo caſu cymba in recta linea progrediendo celerrime ex A ad M pertinget.

Corollarium 5. Si ponatur $g = \infty$, fiet angulus PMb rectus; cymba ergo perpetuo ad curſum fluuii normaliter directa tempore breuiſſimo fluuium traiiciet; curua autem, quam deſcribet, hanc habebit aequationem $y = \int \frac{u\,dx}{c}$. Appellet ergo cymba in C, vt ſit $BC = \frac{\text{area } AQBA}{AD}$.

Corollarium 6. Quod autem ad conſtantem g attinet, intelligitur eam ita debere accipi, vt $(g-u)^2$ ſit maius quam c^2. Niſi enim hoc obſeruetur, curua inuenta fit imaginaria.

Corollarium 7. Cum ſit m ſeu ſinus anguli $PMb = \frac{\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}{g-u}$, erit tempus quo cymba ex A in M peruenit $= \int \frac{dx}{cm} = \int \frac{(g-u)\,dx}{c\sqrt{((g-u)^2 - cc)}}$. Hocque tempus eſt breuiſſimum quo cymba ex A in M peruenire poteſt.

DE

DE AEQVATIONIBVS DIFFERENTIALIBVS QVAE CERTIS TANTVM CASIBVS INTEGRATIONEM ADMITTVNT.

AVCTORE
L. Eulero.

§. 1.

Cum ad aequationes differentiales, quae generaliter integrari nequeunt methodis adhuc vſitatis, peruenitur; non parum augmenti analyſis accipere cenſenda eſt, ſi caſus ſaltem particulares aſſignentur, quibus integratio locum inueniat. Dum enim integratio caſuum ab integratione generalis aequationis non pendet, eo magis erit abſcondita atque inuentu difficilis, quo minus per generaliores integrandi methodos perfici poterit. Talis aequatio iam ante complures annos a *Comite Riccato* eſt producta, atque a nonnullis inſignibus geometris multum agitata, ex qua ſatis perſpicere licet, quam difficulter caſus integrabiles per alias methodos tractarentur, niſi reductione difficiliorum caſuum ad ſimpliciores vti vellemus. Caſus ſcilicet iſti integrabiles ita ſunt inuenti, vt idonea facta ſubſtitutione caſus ſimpliciſſimus, cuius integratio in promtu eſt, in alium transmutetur eadem forma generali contentum, hicque denuo in alium et ita porro in infinitum, quo facto horum caſuum omnium integratio ex ſimpliciſſimo conſequitur.

§. 2.

§. 2. Proponam hic autem aliam methodum latius patentem, qua non ſolum in aequatione illa *Riccatiana*, ſed etiam in plurimis aliis generalem integrationem pariter reſpuentibus; caſus integrabiles erui poterunt. Methodus vero mea in hoc conſiſtit, vt integrationem aequationis generalis per ſeriem abſoluam, quae in caſibus certis abrumpatur; hoc enim facto horum ipſorum caſuum integralia finitis aequationibus exprimentur. Sed cum quaelibet aequatio plurimis modis per ſeriem integrari poſſit; difficillimum plerumque eſt in eiusmodi ſeriem incidere, quae certis caſibus abrumpatur; ita aequationem illam *Riccatianam* per varias ſubſtitutiones in aliam formam transmutari oportet, antequam integratio per ſeriem eiusmodi abſolui queat, quae caſibus integrabilibus abrumpatur.

§. 3. Talis autem praeparatio, quae ad ſeriem idoneam manuducat, alio modo fieri nequit, niſi vt aequatio propoſita in aequationem differentialem ſecundi vel altioris cuiusdam gradus transmutetur, in qua altera variabilis vbique vnam tantum obtineat dimenſionem; huiusmodi enim aequatio facile et commode per ſeriem integrari poteſt. At hoc ſolum non ſufficit ad propoſitum noſtrum; ſeries enim praeterea haec ita debet eſſe comparata, vt certis caſibus abrumpi queat, quod euenit, ſi facto coefficiente vniuscuiusque termini $=0$, ſequentium terminorum omnium coefficientes ſimul euaneſcant. Cum igitur haec praeparatio tantis laboret difficultatibus, expediet negotium a poſteriori aggredi, atque primo aequationem differentialem ſecundi gradus generaliſſimam contemplari, cuius integratio per ſeriem abſoluta hac gaudeat praerogatiua, vt infinitis caſibus fiat finita; quibus adeo caſibus aequatio aſſumta integrari

poterit. Hoc facto aequationem iſtam differentialem ſecundi gradus ad differentialem primi gradus reducam, eamque in varias formas transmutabo, quo plurimas imo infinitas obtineam aequationes differentiales primi gradus, quae iisdem caſibus ſint integrabiles. Hinc autem non ſolum perſpicuum erit, aequationes inuentas illis caſibus eſſe integrabiles, ſed retrogrediendo etiam ipſa aequatio integralis aſſignari poterit.

§. 4. Huiusmodi autem aequatio differentialis ſecundi gradus, quae requiſitis illis ſatisfaciat, atque latiſſime pateat, eſt haec:

$$(a+bx^n)x^2ddv+(c+fx^n)xdxdv+(g+hx^n)v\,dx^2=0,$$

in qua variabilis x elementum dx poſitum eſt conſtans. Ex hac autem aequatione valor ipſius v duplici modo per ſeriem definiri poteſt, quorum alter eſt, ſi ponatur $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} + Dx^{m+3n} + Ex^{m+4n} +$ etc. Hinc enim valoribus loco v, dv et ddv ſubſtitutis, et terminis homogeneis factis $=0$, ſequentes prodibunt coefficientium A, B, C, D etc. et exponentis m determinationes. Primo enim debet eſſe $g+cm+am(m-1)=0$, vnde ne ad irrationalia perveniamus, m potius tamquam numerum cognitum ſpectemus ex eoque g determinemus, eritque $g=-cm-am(m-1)$. Deinde vero habebimus hoc valore loco g vbique ſubſtituto

$$B = \frac{-A(h+fm+bm(m-1))}{cn+an(2m+n-1)}$$

$$C = \frac{-B(h+f(m+n)+b(m+n)(m+n-1))}{2cn+2an(2m+2n-1)}$$

$$D = \frac{-C(h+f(m+2n)+b(m+2n)(m+2n-1))}{3cn+3an(2m+3n-1)}$$

$$E = \frac{-D(h+f(m+3n)+b(m+3n)(m+3n-1))}{4cn+4an(2m+4n-1)} \text{ etc.}$$

Erit

Erit ergo A quantitas conſtans arbitraria, a qua ſequentes coefficientes omnes pendent.

§. 5. Ex his coefficientium valoribus inuentis intelligitur, ſi vnicus coefficiens euanuerit, ſequentes omnes ſimul euaneſcere, ita, vt his caſibus valor ipſius v fiat finitus, atque idcirco aequatio aſſumta

$$(a+bx^n)x^2 ddv+(c+fx^n)xdxdv+(g+hx^n)vdx^2=0$$

integrationem admitat. Si enim fuerit $h+fm+bm(m-1)=0$, tum erit $v=Ax^m$; ſin autem ſit $h+f(m+n)+b(m+n)(m+n-1)=0$, tum erit $v=Ax^m+Bx^{m+n}$, atque ſi $h+f(m+2n)+b(m+2n)(m+2n-1)=0$, erit $v=Ax^m+Bx^{m+n}+Cx^{m+2n}$. Semper igitur aequatio propoſita integrationem admittet, quoties fuerit $h+f(m+in)+b(m+in)(m+in-1)=0$; ſeu $h=-f(m+in)-b(m+in)(m+in-1)$ denotante i numerum quemcunque integrum affirmatiuum cyphra non excepta. Interim tamen ii excipiendi ſunt caſus quibus denominatores euaneſcunt, ita iſta integratio non ſuccedit, ſi fuerit $c=-a(2m+(i+1)n-1)$, ſi quidem hoc caſu i minor fuerit quam illo.

§. 6. Alter modus ex noſtra aequatione valorem ipſius v per ſeriem eruendi, in hoc conſtat, vt ponatur $v=Ax^k+Bx^{k-n}+Cx^{k-2n}+Dx^{k-3n}+Ex^{k-4n}+$ etc. Hinc enim pro v, dv et ddv debitis valoribus ſurrogandis reperietur; $h+fk+bk(k-1)=0$, quare ponamus $h=-fk-bk(k-1)$. Porro vero erit

$$B=\frac{A(g+ck+ak(k-1))}{nf+nb(2k-n-1)}$$

$$C=\frac{B(g+c(k-n)+a(k-n)(k-n-1))}{2fn+2bn(2k-2n-1)}$$

$$D=\frac{C(g+c(k-2n)+a(k-2n)(k-2n-1))}{3fn+bn(2k-3n-1)}$$

$$E=\frac{D(g+c(k-3n)+a(k-3n)(k-3n-1)}{4fn+4bn(2k-4n-1)} \quad \text{etc.}$$

Quo-

Quoties ergo fuerit $g = -c(k-in) - a(k-in)(k-in-1)$ denotante vt ante i numerum quemcunque integrum affirmatiuum, toties aequatio propoſita erit integrabilis. Namque ſi $i=0$ erit $v = Ax^k$, ſi $i=1$ erit $v = Ax^k + Bx^{k-n}$; ſi $i=2$ erit $v = Ax^k + Bx^{k-n} + Cx^{k-2n}$ et ita porro.

§. 7. Aequatio ergo noſtra generalis

$$(a+bx^n)x^2 ddv + (c+fx^n)x dx dv + (g+hx^n) v dx^2 = 0$$

in qua eſt $g = -cm - am(m-1)$ atque $h = -fk - bk(k-1)$, quibus definitionibus nulla vis amplitudini aequationis infertur, cum loco arbitrariarum quantitatum g et h duae nouae arbitrariae m et k introducantur. Haec, inquam, aequatio integrationem admittit, quoties fuerit

vel $f = \frac{(m+in)(m+in-1) - k(k-1)}{k-m-in} b = (1-k-m-in)b$,

vel $c = \frac{(k-in)(k-in-1) - m(m-1)}{m-k+in} a = (1-k-m+in)a$

Duplici ergo modo infiniti caſus aſſignari poſſunt, quibus aequatio propoſita integrabilis exiſtit; atque inſuper his ſingulis caſibus ipſa integralia ſeu valores ipſius v per x algebraice exprimi poterunt, quaerendo valores coefficientium B, C, D, etc. quippe quorum numerus iſtis caſibus fiet finitus.

§. 8. Quamuis autem hoc modo caſuum erutorum integralia algebraica inueniantur, tamen non eſt putandum haec integralia aeque latere, ac aequationes differentiales ex quibus ſunt ortae. Quemadmodum enim integrale ipſius dx non ſolum eſt x ſed etiam $x+a$, ita haec integralia algebraica, quae hoc modo inueniuntur, ſunt tantum caſus particulares plenorum integralium, qui oriuntur ſi conſtans quaepiam arbitraria vel nihilo vel infinito aequalis ponatur. Interim tamen in his omnibus caſibus, qui-

bus

bus integrale ſpeciale inuenitur, ope ipſius huius integralis ſpecialis generale et plenarium integrale facile inueniri poteſt. Sit enim aequatio differentio differentialis $P\,ddv + Q\,dx\,dv + R\,v\,dx^2 = o$ vbi P, Q, R ſint functiones quaecunque ipſius x, cuius iam inuentum ſit integrale particulare per huiusmodi viam ſcilicet $v = X$ hoc eſt functioni cuidam ipſius x. Iam ad aequationem integralem completam eruendam pono $v = Xz$ erit $dv = z\,dX + X\,dz$ atque $ddv = z\,ddX + 2\,dX\,dz + X\,ddz$, quibus ſubſtitutis aequatio propoſita abibit in hanc

$$\begin{aligned}&+ Pz\,ddX + 2P\,dX\,dz + PX\,ddz = o.\\&+ Qz\,dX\,dx + QX\,dx\,dz\\&+ RzX\,dx^2\end{aligned}$$

ſed cum X ſit valor, qui pro v ſubſtitutus ſatisfacit erit $P\,ddX + Q\,dX\,dx + RX\,dx^2 = o$, Quo circa deletis his terminis reſtabit $2P\,dX\,dz + QX\,dx\,dz + PX\,ddz = o$ ſeu $\frac{2\,dX}{X} + \frac{Q\,dx}{P} + \frac{ddz}{dz} = o$; in qua cum P et Q ſint functiones ipſius x, ponatur $\int \frac{Q\,dx}{P} = S$ eritque integrando $X^2\,dz = C\,e^{-S}\,dx$; atque $z = C\int \frac{e^{-S}\,dx}{X^2}$. denotante e numerum cuius logarithmus hyperbolicus eſt 1. Aequationis ergo $P\,ddv + Q\,dx\,dv + R\,v\,dx^2 = o$, cui ſatisfacit $v = X$ completum integrale erit $v = CX\int \frac{e^{-\int \frac{Q\,dx}{P}}\,dx}{X^2}$

§. 9. Cum igitur conſtet quibusnam caſibus aequatio noſtra differentio-differentialis $(a + b\,x^n)\,x^2\,ddv + (c + f\,x^n)\,x\,dx\,dv + (g + h\,x^n)\,v\,dx^2 = o$ integrationem admittat, atque ſimul etiam horum caſuum integralia completa inueniri queant; inquiramus in aequationes differen-

 tiales

tiales primi gradus, quae ex iſta reſultent, atque ideo iisdem caſibus integrabiles exiſtant. Aequatio autem propoſita facile in aequationem differentialem primi gradus transmutatur ponendo $v = e^{\int z dx}$, ita vt ſit $z = \frac{dv}{v dx}$. vnde cognito valore ipſius v, ſimul valor ipſius z innoteſcit. Erit vero $dv = e^{\int z dx} z dx$ et $ddv = e^{\int z dx} (dx dz + z^2 dx^2)$ quibus valoribus ſubſtitutis aequatio noſtra tranſibit in hanc. $(a + b x^n) x^2 dz + (c + f x^n) x z dx + (a + b x^n) x^2 z^2 dx + (g + h x^n) dx = 0$. Haec ergo aequatio differentialis primi gradus, factis $g = -cm - am(m-1)$ et $h = -fk - bk(k-1)$ ſemper eſt integrabilis, ſi fuerit vel $f = \frac{(m+in)(m+in-1) - k(k-1)}{k-m-in} b = (1-k-m-in) b$

vel $c = \frac{(k-in)(k-in-1) - m(m-1)}{m-k+in} a = (1-k-m+in) a$

quibus caſibus etiam ex valore ipſius v inuento, valor ipſius z tam completus quam incompletus ope aequationis $z = \frac{dv}{v dx}$, inuenietur.

§. 10. Quo autem clarius appareat, quales aequationes ſimpliciores in hac generali contineantur, in aliam formam aequationem inuentam transmutemus, in qua tres tantum inſint termini huius formae $P dz + Q z^2 dx + R dx = 0$ denotantibus P, Q, et, R, functiones ipſius x. Haec vero reductio pluribus modis fieri poteſt, quorum primus eſt, ſi ponatur $z = T y$, vbi T eſt functio ipſius x etiamnum incognita. Facta ergo hac ſubſtitutione erit

$$(a + b x^n) T x^2 dy + (a + b x^n) y x^2 dT + (a + b x^n) T^2 x^2 y^2 dx + (g + h x^n) dx = 0 + (c + f x^n) T y x dx$$

in qua ponatur $(c + f x^n) T dx + (a + b x^n) x dT = 0$ quo terminus, qui y continet, euaneſcat; habebitur ergo

$(c + f$

$\frac{(c+fx^n)dx}{(a+bx^n)x}+\frac{dT}{T}=0$, vnde valorem ipſius T erui oportet. Reducetur autem haec aequatio ad iſtam $\frac{cdx}{ax}+\frac{(af-bc)x^{n-1}dx}{a(a+bx^n)}+\frac{dT}{T}=0$, cuius integrale eſt $\frac{c}{a}lx+\frac{af-bc}{abn}l(a+bx^n)+lT=C$ atque $T=\frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$. Poſito ergo $z=\frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}}}{x^{\frac{c}{a}}}$ aequatio noſtra abibit in hanc

$$dy+\frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{anb}}y^2dx}{x^{\frac{c}{a}}}+\frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2}dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}}=0$$

quae propterea iisdem caſibus, quibus ſuperiores aequationes, integrationem admittit.

§. 11. Hinc iam ſpecialiores formemus aequationes ponendo primo $bc=af$ vt ſit $dy+x^{-\frac{c}{a}}y^2dx+\frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2}dx}{a+bx^n}=0$

Ponatur porro $x^{\frac{a-c}{a}}=t$ ſeu $x=t^{\frac{a}{a-c}}$ habebitur $dy+\frac{ay^2dx}{a-c}+\frac{a(g+ht^{\frac{na}{a-c}})dt}{(a-c)(a+bt^{\frac{an}{a-c}})tt}=0$. Haec ergo aequatio, ſi fuerit $g=-cm-am(m-1)$ et $h=-\frac{b}{a}(ck+ak(k-1))$ ſemper integrationem admittet, quoties erit vel $c=(1-k-m-in)a$ vel $c=(1-k-m+in)a$ hoc eſt quoties erit $\frac{c+a(k+m-1)}{an}$ numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus.

§. 12.

§. 12. Si inſuper fuerit $c = o$, habebitur loco g et h actu ſubſtitutis ſuis valoribus $dy + y^2 dt = \frac{(am(m-1) + bk(k-1)t^n)dt}{(a+bt^n)tt}$ quae aequatio integrabilis erit, quoties fuerit vel $\frac{1-k-m}{n}$ vel $\frac{k+m-1}{n}$ numerus integer affirmatiuus; hoc eſt quoties fuerit $\frac{k+m-1}{n}$ numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus. Haec ergo aequatio $dy + y^2 dt = \frac{am(m-1)dt}{a+bt^n)t.}$ integrabilis erit, ſi fuerit vel $\frac{m-1}{n}$ vel $\frac{m}{n}$ numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus. Atque haec aequatio $dy + y^2 dt = \frac{bk(k-1)t^n dt}{(a+bt^n)t}$ integrabilis erit, ſi vel $\frac{k-1}{n}$ vel $\frac{k}{n}$ fuerit numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus.

§. 13. At ſi fuerit $c = a$, habebitur iſta aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{(mma+kkbx^n)dx}{(+bx^n)x}$ quae ſemper integrationem admittet quoties fuerit $\frac{k+m}{n}$ numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus. Quare haec aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{m^2 adx}{(a+bx^n)x}$ integrabilis erit, quoties $\frac{m}{n}$ fuerit numerus integer; haec vero aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{k^2 bx^{n-1}dx}{a+bx^n}$ quoties $\frac{k}{n}$ fuerit numerus integer.

§. 14. Reſumamus aequationem generalem $dy + \frac{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}} y^2 dx}{x^{\frac{a}{c}}} + \frac{(g+hx^n)x^{\frac{c}{a}-2} dx}{(a+bx^n)^{\frac{bc-af}{abn}+1}} = 0$, et ponamus

namus $c = -a(n-1)$, fiatque $(a+bx^n)^{\frac{b-f}{bn}} = t$, vt ſit $x^n = \frac{t^{\frac{bn}{b-f}} - a}{b}$; prodibit iſta aequatio $dy + \frac{y^2 dt}{b-f} + \frac{b(bg - ah + bt^{\frac{bn}{b-f}})\, t^{\frac{bn}{b-f}-2}\, dt}{(b-f)(t^{\frac{bn}{b-f}} - a)^2} = 0$, in qua eſt $g = am(n-m)$ et $h = -fk - bk(k-1)$. Haec vero aequatio toties integrabilis euadit, quoties fuerit vel $\frac{k+m-n}{n}$ numerus integer affirmatiuus ſeu i vel $\frac{f+b(m+k-1)}{bn}$ numerus integer negatiuus. Si inſuper fuerit $f = b - nb$, orietur iſta aequatio $dy + \frac{y^2 dt}{nb} + \frac{b(am(n-m) - ak(n-k) + k(n-k)t)\, dt}{nt(t-a)^2} = 0$, quae ſemper integrationem admittet dummodo $\frac{k+m}{n}$ fuerit numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus. Hinc poſito $k = n$, iſta aequatio $dy + \frac{y^2 dt}{nb} + \frac{abm(n-m)\, dt}{nt(t-a)^2} = 0$, integrationem admittet, ſi fuerit $\frac{m}{n}$ numerus integer. At facto $m = n$, haec aequatio $dy + \frac{y^2 dt}{nb} + \frac{bk(n-k)\, dt}{nt(t-a)} = 0$, integrabilis erit, quando fuerit $\frac{k}{n}$ numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus.

§. 15. Reuertamur ad aequationem primitiuam inter x et z inuentam

$(a+bx^n)x^2 dz + (c+fx^n)xz dx + (a+bx^n)x^2 z^2 dx + (g+hx^n)\, dx = 0$, quae poſito $g = -cm - am(m-1)$ et $h = -fk - bk(k-1)$ integrabilis eſt, ſi fuerit vel $f = (1-k-m-in)b$, vel $c = (1-k-m+in)a$. Alio autem modo eam transformemus in aequationem tribus tantum terminis conſtantem. Ponamus ſcilicet $z = Ty + S$, denotantibus T et S fun-

 ctioni-

ctionibus ipſius x; erit $dz = T\,dy + y\,dT + dS$ his ſubſtitutis prodibit iſta aequatio

$$\begin{aligned}(a+bx^n)Tx^2dy+(a+bx^n)x^2ydT+(a+bx^n)x^2T^2y^2dx+(a+bx^n)x^2dS&=o\\ +(c+fx^n)Txydx \qquad\qquad +(c+fx^n)xSdx&\\ +2(a+bx^n)x^2TSydx \qquad\qquad +(a+bx^n)x^2S^2dx&\\ +(g+hx^n)dx&\end{aligned}$$

ex qua, quo terminus y continens egrediatur, ponatur $(a+bx^n)x\,dT + 2(a+bx^n)x\,T\,S\,dx + (c+fx^n)\,T\,dx = o$, ſeu $\frac{dT}{T} + 2S\,dx + \frac{(c+fx^n)\,dx}{(a+bx^n)\,x} = 0$. Ponamus ante omnia $T = x^p$, quo poſt diuiſionem per $(a+bx^n)Txx$ coefficiens ipſius y^2dx fiat ſimplex poteſtas ipſius x; erit $\frac{p}{x} + 2S + \frac{c+fx^n}{x(a+bx^n)} = 0$ atque $S = \frac{-c-ap-(f+bp)x^n}{2x(a+bx^n)}$.

Hinc fiet $dS = \frac{a(c+ap)dx - a(n-1)(f+bp)x^ndx + b(f+bp)x^{2n}dx + b(n+1)(c+ap)x^ndx}{2xx(a+bx^n)^2}$.

Atque his valoribus ſubſtitutis obtinebitur iſta aequatio $(a+bx^n)x^{p+2}dy + (a+bx^n)x^{2p+2}y^2dx + \frac{p(p+2)(a+bx^n)dx}{4} + \frac{(c+2g)dx+(f+2h)x^ndx}{2}$ $\frac{-ccdx+2n(bc-af)x^ndx-2cfx^ndx-ffx^{2n}dx}{4(a+bx^n)} = o$ quae per $(a+bx^n)x^{p+2}$ diuiſa reducitur ad hanc $dy + x^py^2dx + \frac{p(p+2)dx}{4x^{p+2}} + \frac{(c+2g)dx+(f+2h)x^ndx}{2(a+bx^n)x^{p+2}} - \frac{(c+fx^n)^2dx+2n(bc-af)x^ndx}{4(a+bx^n)^2x^{p+2}}$ Quae aequatio ita eſt comparata, vt poſito $g = -cm-am(m-1)$ et $h = -fk-bk(k-1)$, ſem-

ſemper ſit integrabilis, ſi fuerit vel $\frac{-(k+m-1)b-f}{bn}$ vel $\frac{(k+m-1)ac+}{an}$ numerus integer affirmatiuus.

§. 16. Ponamus primo $bc-af=0$ ſeu $f=\frac{bc}{a}$; et aequatio inuenta tranſibit in hanc $dy+x^py^2dx+\frac{(p+1)^2dx}{4x^{p+2}}-\frac{(a-c)^2dx}{4a^2x^{p+2}}+\frac{(g+hx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}}=0$, quae ſi ſit $g=-cm-am(m-1)$ et $h=-\frac{b}{a}(ck+ak(k-1))$, integrabilis exiſtit, ſi $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ fuerit numerus integer ſiue affirmatiuus ſiue negatiuus. Ponamus porro $c=a$, quo prodeat iſta aequatio $dy+x^py^2dx+\frac{(p+1)^2dx}{4x^{p+2}}=\frac{(amm+bkkx^n)dx}{(a+bx^n)x^{p+2}}$, quae integrabilis erit ſi $\frac{k+m}{n}$ fuerit numerus integer.

§. 17. Ponamus in aequatione generali vltimo §. 15. inuenta $b=0$, quo meri termini ſimplices prodeant, habebitur iſta aequatio $dy+x^py^2dx+\frac{(p+1)^2dx}{4x^{p+2}}-\frac{(a-c)^2dx}{4aax^{p+2}}+\frac{gdx.}{ax^{p+2}}+\frac{(af-naf+2ah-cf)x^ndx}{2a^2x^{p+2}}-\frac{ffx^{2n}dx}{4aax^{p+2}}=0$, quae poſito $g=-cm-am(m-1)$ et $h=-fk$ integrabilis exiſtit, ſi vel $\frac{(k+m-1)a+c}{an}$ fuerit numerus integer affirmatiuus, vel ſi ſit $f=0$; qui quidem caſus per ſe conſtat. Ponamus $a^2(p+1)^2-(a-c)^2+4ag=\alpha a^2$, atque $af-naf-2afk-cf=\beta af$. erit $g=\frac{\alpha a^2+(a-c)^2-a^2(p+1)^2}{4a}$ et $c=a-na-2ak-\beta a)$; vnde erit $g=\frac{\alpha a+a(n+2k+\beta)^2-a(p+1)^2}{4}$;

 qui-

quibus ſubſtitutis erit $dy + x^p y^2 dx + \frac{\alpha dx}{4x^{p+2}} + \frac{\mathfrak{G} f x^n dx}{2ax^{p+2}}$ $- \frac{ffx^{2n}dx}{4aax^{p+2}} = o$, eſtque ob valorem ipſius g iam ante definitum $n + 2k + \mathfrak{G} = 2m + \sqrt{((p+1)^2 - \alpha)}$, at aequatio integrationem admittet, ſi fuerit $\frac{m-n-k-\mathfrak{G}}{n}$ ſeu $\frac{-n-\mathfrak{G}\pm\sqrt{((p+1)^2-\alpha)}}{2n}$ numerus integer affirmatiuus. Sit $\alpha = o$ et $\mathfrak{G} = o$ habebitur iſta aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa}$ quae toties integrationem admittit, quoties fuerit $\frac{-n\pm(p+1)}{2n}$ numerus integer affirmatiuus. Sit ergo $i = \frac{-n\pm(p+1)}{2n}$ erit $n = \frac{\pm(p+1)}{2i+1}$; atque aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{\frac{\pm 2(p+1)}{2i+1}-p-2}dx}{4aa}$ ſemper erit integrabilis. Haec autem aequatio ipſa eſt Riccatiana; nam poſito $p = 0$ prodit $dy + y^2 dx = \frac{ffx^{\frac{\pm 2 - 4i - 2}{2i+1}}dx.}{4aa}$

§. 18. Ponamus tantum $\alpha = o$, habebimus hanc aequationem $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} - \frac{\mathfrak{G}fx^{n-p-2}dx}{2a}$, quae integrabilis erit, ſi fuerit $\frac{\pm(p+1)-n-\mathfrak{G}}{2n}$ numerus integer affirmatiuus puta i. Facto autem $\pm(p+1) - n - \mathfrak{G} = 2ni$ erit $\mathfrak{G} = \pm(p+1) - n(2i+1)$. Quamobrem haec aequatio $dy + x^p y^2 dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} + \frac{(nf(2i+1) + f(p+1))x^{n-p-2}dx}{2a}$ ſemper eſt integrabilis. Hinc ſequuntur ſequentes aequationes ſimpliciores

$dy +$

$$dy + y^2\,dx = \frac{ffxxdx}{4aa} + \frac{f(4i+2\pm 1)dx}{2a}$$
$$dy + y^2\,dx = \frac{ffdx}{4aa} + \frac{f(2i+1\pm 1)dx}{2ax}$$
$$dy + \frac{y^2dx}{x} = \frac{ffxdx}{4aa} + \frac{f(2i+1)dx}{2a}$$

quae omnes ſunt integrabiles. Quare haec aequatio $dy + Ay^2du = Buudu + Cdu$ integrabilis exiſtit, quando $\frac{C\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$ fuerit numerus integer affirmatiuus impar, namque $4i+2 \pm 1$ omnes numeros impares complectitur in ſe.

§. 19. Ponamus in ſuperiore aequatione tantum $\beta = 0$; et prodibit iſta aequatio $dy + x^py^2dx = \frac{ffx^{2n}dx}{4aax^{p+2}} - \frac{\alpha dx}{4x^{p+2}}$, quae integrabilis erit, quoties fuerit $\frac{-n \pm \sqrt{((p+1)^2 - \alpha)}}{2n}$ numerus integer affirmatiuus, qui ſit i, erit ergo $n(2i+1) = \sqrt{((p+1)^2 - \alpha)}$ atque $\alpha = (p+1)^2 - n^2(2i+1)^2$. Quamobrem haec aequatio $dy + x^py^2dx = \frac{ffx^{2n-p-2}dx}{4aa} + \frac{(n^2(2i+1)^2 - (p+1)^2)dx}{4x^{p+2}}$ ſemper integrabilis erit. Si ſit $p = 0$, erit iſta aequatio $dy + y^2dx = \frac{ff}{4aa}x^{2n-2}dx + \frac{(n^2(2i+1)^2 - 1)dx}{4xx}$ pariter ſemper integrabilis. Hinc ponendo $\frac{ff}{4aa} = A$, quia f et a ſunt quantitates arbitrariae, integrabiles erunt ſequentes aequationes

$$dy + y^2dx = A\,dx + \frac{i(i+1)dx}{xx}$$
$$dy + y^2dx = Ax^2dx + \frac{(4i+3)(4i+1)dx}{4xx}$$
$$dy + y^2dx = Ax^4dx + \frac{(3i+2)(3i+1)dx}{xx}$$

atque huius generis innumerabiles aliae.

§. 20. Fiat in aequatione $d y + x^p y^2 d x = \frac{d x(f f x^{2n} - 2 a \beta f x^n - \alpha a^2)}{4 a^2 x^{p+2}}$ §. 17. inuenta $\alpha = -\beta^2$, quo ſit $dy + x^p y^2 dx = \frac{(f x^n - \beta a)^2 d x}{4 a^2 x^{p+2}}$ quae aequatio toties integrabilis erit, quoties fuerit $\frac{-n-\beta \pm \sqrt{((p+1)^2+\beta^2}}{2n}$ numerus integer affirmatiuus puta $= i$. Erit ergo $(2i+1)n + \beta = \sqrt{((p+1)^2+\beta^2)}$ atque $\beta = \frac{(p+1)^2-n^2(2i+1)^2}{2n(2i+1)}$. quoties ergo β huiusmodi habuerit valorem, aequatio $dy + x^p y^2 d x = \frac{(fx^n-\beta a)^2 dx}{4a^2 x^{p+2}}$ integrationem admittet. Poſito igitur $p = 0$ iſta aequatio $dy + y^2 dx = \frac{dx}{xx}(\frac{n^2(2i+1)^2-1}{4n(2i+1)} + \frac{f}{2a}x^n)^2$ integrabilis erit. At ſi $p = -1$ prodibit iſta aequatio $dy + \frac{y^2 dx}{x} = \frac{dx}{x}(\frac{n(2i+1)}{4} + \frac{f}{2a}x^n)^2$ integrabilis. Sit autem $x^{p+1} = t$, erit $x^p dx = \frac{dt}{p+1}$; $x^n = t^{\frac{n}{p+1}}$; et $\frac{dx}{x^{p+2}} = \frac{dt}{(p+1)tt}$, habebitur ergo iſta aequatio $(p+1)dy + y^2 dt = \frac{(f t^{\frac{n}{p+1}} - \beta a)^2 dt}{4a^2 tt}$ quae integrabilis erit, ſi fuerit $\beta = \frac{(p+1)^2-n^2(2i+1)^2}{2n(2i+1)}$.

§. 21. Multo quidem plura conſectaria ex noſtra aequatione generali non parum elegantia deduci poſſent; ſed ampliorem euolutionem aliis, quos haec iuuant, relinquo. Interim notari conuenit praeter hanc methodum, quam ſum ſecutus, alias dari innumeras, quarum ope aequationes differentiales, quae certis duntaxat caſibus integrabiles euadunt, inueniri poſſunt, ſed operatio nimis fit laborioſa. Ita ſi conſideretur haec aequatio $(a+bx^n+cx^{2n})x^2 ddv + (f+gx^n+hx^{2n})xdxdv + (p+qx^n+rx^{2n})vdx^2 = 0$, po-

ponaturque $v = Ax^m + Bx^{m+n} + Cx^{m+2n} +$ etc. hos coefficientes quidem definire licebit, ſed binos contiguos euaneſcere oportet, quo ſequentes omnes euaneſcant. Scilicet quo fiat $v = Ax^m$ neceſſe eſt vt ſit $p + fm + am(m-1) = 0$; ſimulque $q + gm + bm(m-1) = 0$ et $r + hm + cm(m-1) = 0$. Quo autem fiat $v = Ax^m + Bx^{m+n}$, requiritur vt ſit primo $B = -\frac{A(q+gm+bm(m-1))}{nf+na(2m+n-1)}$, ſecundo $p + fm + am(m-1) = 0$; tertio $r + h(m+n) + c(m+n)(m+n-1) = 0$ et quarto $n^2(b + c(2m+n-1))(f + a(2m+n-1)) + (q + gm + bm(m-1))(q + g(m+n) + b(m+n)(m+n-1)) = 0$. Ex quo ſatis liquet, vlterius progrediendo laborem in immenſum excreſcere.

§. 22. Vnicum tamen coronidis loco exemplum ſimplicius afferam, quo feci $b = 0$, $c = 0$, $f = 0$ et $g = 0$, poſitoque $v = e^{\int z dx}$ poſui $z = y - \frac{h}{2a} x^{2n-1}$, quo facto ſequens prouenit aequatio $dy + y^2 dx = \frac{hh}{4aa} x^{4n-2} dx + \frac{x^{2n-2} dx}{2a}(h(2n-1) -2r) - \frac{q}{a} x^{n-2} dx + \frac{m(m-1)dx}{xx}$; quae per duos caſus expoſitos integrabilis eſt, primo ſi fuerit $q = 0$ et $r = -mh$, ſecundo ſi fuerit $q = n\sqrt{ah}(1-n-2m)$ et $r = -h(m+n)$, preter hos vero caſus infiniti dantur alii, quibus iſta aequatio pariter integrabilis exiſtit, ſed ad eos determinandos reſolutiones aequationum plurium dimenſionum requiruntur. Poſito $r = \frac{h(2n-1)}{2}$ per ſecundum caſum iſta aequatio $dy + y^2 dx = \frac{hh}{4aa} x^{4n-2} dx \pm \frac{n}{a} x^{n-2} dx \sqrt{3ahn} + \frac{(16nn-1)dx}{4xx}$ integrabilis erit.

SO-

SOLVTIONES
TRIVM PROBLEMATVM
ASTRONOMICORVM.

AVTHORE
Georg. Wolffg. Krafft.

Problema Primum

Tabula V. VI. et VII.

Sit in plano horizontali à Sole illuminato erectus ſtylus verticalis, datae longitudinis: quaeritur quamnam curuam deſcriptura ſit, durante toto aliquo die, extremitas vmbrae huius ſtyli, à Sole in planum proiectae.

Solutio.

Sit in Fig. I. Meridiani planum DAFB; proiectiones in hoc plano ſint, Aequatoris ED, Paralleli, quem Sol aliquo die deſcribit, FG, Horizontis AB; et in centro Terrae erectus ſtylus perpendicularis ad horizontem CH. His poſitis euidens eſt, Solem durante toto die deſcribere circa hunc ſtylum Conum vmbroſum HKI.

Primo quidem angulus ad verticem KHI huius Coni definitur à radio Solis emiſſo è meridie FHK, et emiſſo è media nocte GHI. Eſt igitur hic angulus ad verticem Coni KHI $= 180° - FHI = 180° - FGH - GFH = 180° - 2GFH$, quia HF et HG cenſendae ſunt aequales, ob longitudinem ſtyli CH infinite paruam reſpectu ipſarum FH et GH, et punctum H fere coincidens cum C. Sunt autem,

autem, ob allegatam rationem, rectae FH et FC cenſendae coincidentes; quare ob parallelas FG et ED erit $2\,GFH = 2\,FCE =$ duplo Declinationis Borealis EF; et hinc angulus $KHI = 180^\circ - 2FCE = 2(90^\circ -$ Decl.$)$, et $\frac{1}{2}$ KHI $= 90^\circ -$ Decl. conſequenter angulus ad verticem Coni vmbroſi, quem Sol aliquo die deſcribit circa apicem ſtyli erecti, eſt duplum complementum Declinationis, quam Sol eo die tenet. Si Declinatio Solis fuerit Auſtralis, hoc eſt, prioris negatiua: erit idem angulus ad verticem $= 2(90^\circ +$ Decl.$)$ quae expreſſio dat angulum gibbum GHF, Fig. II. vel ſimilem gibbum KHI, id quod indicat, Conum vmbroſum hoc caſu deſcriptum praecedentis tantum eſſe oppoſitum.

Secundo, Conus hic ſecatur ab Horizonte ita, vt ſectionis huius proiectio ſit MN. Angulus vero, quem planum ſecans, hoc eſt, Horizon, efficit cum latere Coni, verſus verticem Coni ſumtus, id eſt, in Declinatione Boreali angulus AMH, in Declinatione autem Auſtrali angulus BMH, aequalis eſt, in illo caſu, ſemicirculo, minus altitudine meridiana Solis pro illo die; in hoc vero caſu, ſoli altitudini meridianae Solis; ob angulos FMB et FCB inclinatione infinite paruâ differentes. Cum igitur angulus HMC aequalis cenſendus ſit, altitudini meridianae Solis: erit

Tertio, in triangulo HMC, et poſito ſinu toto $=1$. haec analogia: ſinus alt. meridianae Solis eſt ad longitudinem ſtyli perpendiculariter erecti CH, vti ſinus totus ad longitudinem ipſius HM; itaque initium ſectionis ſit ſemper ſic, vt habeatur $HM = \frac{\text{long. ſtyli}}{\text{ſin. alt. merid.}}$ denique etiam

H *Quar-*

Quarto, euidens eſt, verticem huius Coni ſpectare Septentrionem in Declinatione Solis Boreali; nam in Fig. I. ob HC infinite paruam reſpectu ipſius CE, cadet quilibet parallelus FG Declinationis Borealis ſupra punctum H, adeoque vertex et latera Coni habebunt ſitum quem Figura repraeſentat. In Declinatione Auſtrali autem vertex Coni ſpectabit meridiem, vti in Fig. II. Ex his igitur conditionibus ſectio huius Coni vmbroſi pro quolibet die poterit determinari, et conſequenter curua quaeſita inueniri per Aequationem Algebraicam. Sit igitur pro Declinatione Solis Boreali in Fig. III. Conus vmbroſus HKLI, qui ſecetur ab Horizonte AMB, efficiatque Curuam MQL, cuius ſit Abſciſſa $MP = x$, ſemiordinata $PQ = y$, intelligaturque per punctum P tranſire planum circulare RQS, baſi KLI quippe parallelum. Angulus KHI eſt 2 (90° — Decl.) dependet igitur à ſola Declinatione Solis, quae cum 24 gradus nunquam excedat: euidens eſt, angulum ad verticem Coni KHI ſemper eſſe obtuſum. Itaque ſi ſtatuatur pro die aliquo Declinationis Solis ſinus $= m$, coſinus $= n$, altitudinis meridianae Solis ſinus $= p$, coſinus $= q$, poſito ſinu toto $= 1$, altitudo ſtyli erecti $= a$, erit ex his angulus RPA = AMR — MRP = 180° — AMH — MRP; ſed in Declinatione Boreali eſt per praemiſſum II. AMH = 180° — alt. merid. Solis, et, demiſſa HN perpendiculari ad RS, MRP = 90° — RHN = 90° — $\frac{1}{2}$KHI = 90° — 90° + Declinat. per praemiſſum I. = Declinationi; quibus ſubſtitutis fit RPA = alt. merid. Solis — Decl.; quare cum illius ſinus et coſinus ſint p et q, huius vero m et n, erit ſinus differentiae, hoc eſt ſin. RPA $= pn - qm$. Exinde fluit analogia in Triangulo MRP ſequens:

ſin.

ſin. MRP (m) : MP (x) = ſin. RPA $(pn-qm)$: MR $(\frac{pnx-qmx}{m})$. Eſt autem per praemiſſum III. MH = $\frac{a}{p}$ hinc exiſtit RH = MH + MR = $\frac{a}{p}+\frac{pnx-qmx}{m}$; triangulum ergo RHN praebet hanc analogiam, ſinus totus (1) : RH $(\frac{a}{p}+\frac{pnx-qmx}{m})$ = ſin. RHN (n) : RN $(\frac{an}{p}+\frac{pn^2x-qmnx}{m})$. In triangulo RMP eſt ſin. MRP (m) : MP (x) = ſin. AMH (p) : RP $(\frac{px}{m})$, igitur PS = 2RN − RP = $\frac{2an}{p}+\frac{2pn^2x-2qmnx-px}{m}$; et denique ob PQ^2 = RP × PS ex natura Circuli, habebitur aequatio generalis pro ſectione Coni MQL, quae, membris in ordinem redactis, fit ſequens: $y^2+\frac{(p^2+2pn.(qm-pn))x^2}{m^2}-\frac{2anx}{m}=0$. Statuatur nunc denuo Eleuationis Aequatoris in loco aliquo Terrae ſinus k coſinus l, atque cum in Declinatione Boreali Solis, et dato aliquo loco in Hemiſphaerio Boreali, ſit altitudo meridiana Solis = Eleu. Aequatoris + Declinat. Solis, erit ex hac conſideratione per regulas Trigonometricas $p=kn+ml$, $q=nl-km$, ex quibus fit $qm-pn=-k$ $(m^2+n^2)=-k$, quo ſubſtituto ſuperior aequatio abit in hanc:

$$y^2+\frac{p^2-2pnk}{m^2}x^2-\frac{2an}{m}x=0$$

quae rurſus, ſubrogato primum valore ipſius $p=kn+ml$, et deinde in ſecundo aequationis membro poſitis $n^2=1-m^2$, et $l^2=1-k^2$, abit in hanc:

$$y^2+\frac{m^2-k^2}{m^2}x^2-\frac{2an}{m}x=0$$

Valet autem haec aequatio pro eo caſu, in quo Declinatio Solis eſt Borealis, et locus datus eſt in Hemiſphaerio Boreali. Si ergo deſideretur aequatio pro Declinatione Solis Auſtrali, euidens eſt, Coſinum Declinationis n manere inuariatum, ſed Sinum Declinationis fieri negatiuum,

quare in hoc caſu pro $+ m$ ſcribendum erit $- m$; quoniam vero etiam x hoc caſu fit negatiua: euidens eſt, aequationem ipſam manere inuariatam in terminis et ſignis. Pro locis Terrae autem in Hemiſphaerio Auſtrali ſitis, fiet Eleuatio Aequatoris angulus obtuſus, atque ibi erit k ſinus anguli illius obtuſi.

Corollarium I.

Habeat Sol nullam Declinationem, ſed verſetur in Aequatore, eritque $m = o$, $n = 1$, quare mutabitur aequatio generalis in hanc $y^2 - \frac{k^2}{o^2}x^2 - \frac{2a}{o}x + o$, vbi reſpectu termini medii reliqui duo extremi euaneſcunt; quare habebitur $k^2x^2 = o$, vel $x = o$, quod indicat, lineam eo die ab vmbra ſtyli deſcriptam eſſe Rectam. Quoniam enim generaliter angulus coni vmbroſi ad verticem KHI eſt 2 (90-Decl.) erit poſitâ Declinatione nullâ idem angulus = 180, adeoque hoc caſu nullus generatur Conus, ſed eius loco prodit tantum planum circulare Aequatoris, ſiue Conus, cuius angulus ad verticem eſt 180 graduum, quare eius ſectio ab Horizonte facta erit Linea recta.

Corollarium II.

Vt aequatio generalis abeat in Ellipſin, neceſſe eſt, vt coefficiens ipſius x^2, qui eſt $\frac{m^2-k^2}{m^2}$ ſit affirmatiuus, hoc eſt, vt ſit $m > k$, vel Declinatio Solis maior quam Eleuatio Aequatoris; quod accidere poteſt in omnibus locis, quorum Eleuatio Aequatoris comprehenditur inter gradus 0 et $23\frac{1}{2}$, hoc eſt, in vtraque Zonâ frigidâ.

Erit

Erit vero Ellipſeos ſic generatae Axis tranſuerſus $= \frac{2amn}{m^2-k^2}$ et Parameter $= \frac{2an}{m}$. Quae Ellipſis vt mutetur in Circulum, opus eſt, vt Ellipſeos Axis tranſuerſus et Parameter ſint aequales, vnde fit $\frac{2amn}{m^2-k^2} = \frac{2an}{m}$, vel $m^2 = m^2 - k^2$, vel $k = 0$, hoc eſt, Eleuatio Aequatoris nulla, quod accidit ſub vtroque Polo, vbi deſcribitur Circulus, cuius radius $= \frac{an}{m}$.

Corollarium III.

Vt aequatio generalis mutetur in Hyperbolam, debet eſſe $\frac{m^2-k^2}{m^2}$ quantitas negatiua, vel $m < k$, hoc eſt, Declinatio minor quam Eleuatio Aequatoris; quod accidere poteſt in omnibus locis, quorum Eleuatio Aequatoris comprehenditur inter $23\frac{1}{2}^\circ$ et 90°; hoc eſt, in vtrâque Zona Temperatâ et Torridâ. Erit vero Hyperbolae ſic generatae Axis tranſuerſus $= \frac{2amn}{k^2-m^2}$, et Parameter $= \frac{2an}{m}$.

Corollarium IV.

Vt eadem aequatio generalis exhibeat Parabolam, requiritur vt coëfficiens $\frac{m^2-k^2}{m^2}$ euadat nullus, quo efficitur $m = k$, vel Declinatio Solis = Eleuationi Aequatoris; quod accidere poteſt in iis Terrae locis, quorum Eleuatio Aequatoris comprehenditur inter gradus 0 et $23\frac{1}{2}$, hoc eſt in Zona Frigida vtraque. Prodit autem in hoc caſu Parabola, cuius Parameter $= \frac{2an}{m}$.

Corollarium V.

Soluitur hinc haud difficulter Problema *Iacobi Bernoullii*, in quo alicubi locorum obſeruatur, Sole obtinente altitudinem meridianam 45. grad. extremitatem vmbrae, a bacillo ad planum horizontale verticaliter erecto, proiectae, deſcribere illo die Hyperbolam, cuius axis transuerſus aequatur longitudini bacilli; quaeritur, quo Terrae loco, et quo anni die obſeruatio ſit facta? Erit enim per Coroll. III. ob deſcriptam a bacilli vmbra Hyperbolam, cuius axis transuerſus aequalis altitudini bacilli, $\frac{2amn}{k^2-m^2}=a$, aut $2mn=k^2-m^2$; ſed ob Solis altitudinem meridianam 45°, erit $p=kn+ml=\frac{1}{\sqrt{2}}$, vnde deducitur $k=\frac{n\pm m}{\sqrt{2}}$, quo valore ſubſtituto in aequatione praecedente, fit $4mn=n^2\pm 2mn-m^2$, vnde deducuntur duo valores ipſius m; eſt nempe primo $m^2=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$, aut etiam ſecundo $m^2=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{10}}$; adeoque m quatuor habet valores ſequentes $\frac{491}{532}$, $\frac{203}{532}$, $\frac{785}{795}$, et $\frac{127}{795}$, pro ſinu toto 1. vnde fiunt Declinationes ipſae ſequentes: I. 67° 21′. II. 22° 26′. III. 80° 54′. IV. 9° 11′. quarum ſolae ſecunda et quarta in Solem cadunt, reliquae vero excluduntur. Si itaque requiſita Problematis locum inuenire debeant, neceſſe eſt, vt Declinatio Solis ſit vel 22° 16′, vel 9° 11′; quarum vtraque cum poſſit eſſe vel Borealis vel Auſtralis, et in Declinatione Solis Boreali ſit Eleuatio aequatoris = alt. merid. − Decl.; in Declinatione Solis autem Auſtrali ſit Eleuatio aequatoris = alt. Merid. + Decl. dabuntur in Hemiſphaerio Boreali caſus ſequentes:

Decl.

Decl. Solis.		*Eleu. Aequ.*
22° 26′ Bor.	- - - -	22° 34′.
9° 11′ Bor.	- - - -	35° 49′.
22° 26′ Auſtr.	- - -	67° 26′.
9° 11′ Auſtr.	- - -	54° 11′.

quae omnia cum in Hemiſphaerio quoque Auſtrali dantur: patet, dari in vniuerſum ſolutiones octo Problematis propoſiti.

Corollarium VI.

Deriuatur quoque ex huius Problematis reſolutione modus ſequens inueniendi Declinationem Solis, et Eleuationem aequatoris. In plano horizontali ducta ſit linea meridiana, BAp Fig. VI. atque in huius extremo erectus verticaliter ſtylus BC altitudinis a. Obſeruetur primo extremitas vmbrae meridianae, quae ſit A; deinde tempore aliquo elapſo capiatur extremum quodcunque huius vmbrae M, e quo demittatur perpendicularis in Meridianam MP; ſimili modo notetur etiam ſubſequens aliquod extremum vmbrae m, et noua perpendicularis mp excitetur; quibus factis, dico fore tangentem Declin. Solis $= \frac{2a. AP \times Ap \times Pp}{PM^2 \cdot Ap^2 - pm^2 . AP^2}$. Cum enim puncta M et m ſint in ſectione Conica AMm, cuius datur aequatio, ſubſtituantur tantum in hac, primo AP et PM, deinde Ap et pm, loco x et y, obtinebiturque duplex valor ipſius k; exinde noua aequatione formata, reperietur indicatum. Declinatione autem ſic inuenta, et altitudine meridiana data, ex longitudine ſtyli BC et vmbrae meridianae BA, Eleuatio Aequatoris non latebit.

Pro-

Problema Secundum.

Sint in Fig. IV. Meridianus GBH *Horizon.* GH, *Aequator* KI, *Polus* A, *et Zenith* B. *Atque ſint duae ſtellae* E *et* F, *quarum Declinationes, et Aſcenſiones Rectae ſint cognitae; obſeruetur vtraque ſimul in eadem altitudine quacunque; atque oportet ex his inuenire Eleuationem Aequatoris loci, in quo obſeruatio haec facta eſt.*

Solutio.

Reſoluitur hoc Problema per ſimplicem Trigonometriam ſphaericam ſequenti modo. Intelligatur per puncta E et F ductus arcus circuli maximi in Sphaera; atque in Triangulo EAF dati ſunt arcus AE, AF, qui dependent a Declinationibus ſtellarum LE et MF, vna cum angulo EAF, qui eſt differentia aſcenſionum rectarum vtriusque ſtellae; ex his ergo inuenietur arcus EF, nec non angulus AEF. In Triangulo BEF aequicruro iam datus eſt arcus EF, vna cum BE aut BF, quod eſt complementum altitudinis inuentae; itaque ex his inueniri poterit angulus BEF. Subtrahatur hic angulus BEF ab altero iam reperto angulo AEF, atque remanebit angulus AEB; quo obtento, in Triangulo BEA, ex datis angulo AEB, complemento altitudinis BE, et Declinatione AE, reperietur arcus AB; qui aequalis eſt Eleuationi Aequatoris. Obſeruationem vero ad hoc Problema requiſitam commodiſſime ope fili horizontaliter extenſi abſolui poſſe puto.

Pro-

Problema Tertium.

Repraeſentet in Fig. V. CZPF *Meridianum*, CGD *Horizontem*, EGF *Aequatorem*, Z *Zenith*, *et* P *Polum loci*, *cuius Eleuatio Aequatoris quaeritur*; *Sint* A *et* b *duae ſtellae*, *quarum dentur Declinationes* HA, et Ib, *et diſtantia* Ab. *Obſeruetur prioris ſtellae* A *altitudo quaecunque* KA, *atque eo momento*, *quo altitudo haec capitur*, *altera ſtella ſit in* b; *poſt interiectum tempus quodcunque datum promoueantur ſtellae motu primo*, A *quidem in* a, b *autem in* B; *atque in hoc ſitu capiatur iam quoque altitudo alterius ſtellae* B, *quae ſit* LB. *Ex his datis debet inueniri eleuatio aequatoris* PZ.

Solutio.

Concipiatur ductus arcus circuli maximi BA per duo loca, in quibus captae ſunt altitudines, transiens; atque ex datis *b*P, complemento Declinationis ſtellae *b*, AP complemento Declinationis ſtellae A, et A*b* diſtantia harum ſtellarum, inuenietur in Triangulo *b*AP angulus ad Polum *b*PA, cui adiiciatur angulus BP*b*, ex tempore inter captas altitudines obſeruato cognitus, vt habeatur integer angulus APB.

In Triangulo ABP, ex modo inuento angulo APB, et ex complementis Declinationum ſtellarum AP, BP, inuenientur arcus AB, nec non angulus BAP.

In Triangulo ZBA, ex datis complementis altitudinum ZB, ZA, et arcu AB, indagabitur angulus BAZ, qui ab inuento BAP ablatus, relinquet angulum ZAP, ergo denique in Triangulo ZAP, ex cognitis angulo ZAP,

complemento Declinationis AP. et complemento altitudinis ZA, inuenietur latus ZP quaeſitum.

Commodus hic locus eſt exponendi, qua ratione confici poſſit Horologium ſolare aequinoctiale, quod ſine praeuia deſcriptione lineae meridianae horas monſtret; quae quidem horologia ſolaria eo magis horizontalibus, ſimili artificio conſtructis, praeferenda ſunt, quo facilius ea delineantur, et quo maiori exinde gaudent exactitudine. In plano igitur iuxta altitudinem Aequatoris eleuato, et cum Aequatoris plano coincidente, erigatur perpendiculariter ſtylus arbitrariae longitudinis; è puncto, cui infixus eſt hic ſtylus, deſcribantur plurimi circuli, tot nempe, quot amplitudo plani ſine confuſione patitur, quorum cuilibet adſcribantur illi dies anni, in quibus vmbrae, ab hoc ſtylo proiectae, extremitas illum circulum deſcribit; quorum circulorum radii facili opera per calculum Trigonometricum eruuntur; quibus factis circulorum horum concentricorum intimus et extremus diuidantur in horas 24, et earum partes, capto initio a recta per medium plani transeúnte, cui hora 12 meridiana adſcribenda erit; horae eaedem lineis rectis coniungantur; atque paratum erit hoc horologium ſolare. Vſus autem eius in his conſiſtit, vt primò ſciatur dies et menſis anni; ſecundo horologium tamdiu hinc et inde conuertatur, donec extremitas vmbrae ſtylaris illum circulum attingat, qui diei propoſito conuenit; quo obtento eadem vm̀bra, iuxta longitudinem ſuam protenſa, horam quoque illius diei oſtendet.

DE

DE MACHINARVM TAM SIMPLICIVM QVAM COMPOSITARVM VSV MAXIME LVCROSO.

AVCTORE
L. Eulero.

§. 1.

DE Machinis ſimplicibus, cuiusmodi ſunt Vectis, Axis in peritrochio, Trochlea, Cochlea, Cuneus et planum inclinatum, atque machinis ex his compoſitis tantum iam antiquiſſimis temporibus eſt disputatum, vt haec doctrina iam penitus exhauſta eſſe videatur. Sed ſi rem curatius inſpiciamus, omnes fere, qui de machinis ſcripſerunt, in iis examinandis ita ſunt verſati, vt tantum aequilibrium, quod in quaque machina potentia cum onere tenet, definirent; ipſum vero motum, quo onus a potentia eleuatur prorſus neglexerunt. Quod cum in machinarum doctrina praecipuum ſit, quippe quae non tam ad aequilibrium conſeruandum, quam ad onera actu mouenda adhiberi ſolent, non parum is praeſtitiſſe cenſendus erit, qui leges, quibus machinarum motus determinatur expoſuerit atque ſtabiliuerit. Tabula VIII. et IX.

§. 2. Duobus ſcilicet iisque diuerſis modis tractationem de machinis inſtitui conuenit, quorum alter ad ſtaticam pertinet, atque ſtatum aequilibrii in omnibus machinis inueſtigat, alter vero ad mechanicam eſt referendus,

quo ipſe motus machinarum, cum aequilibrium ceſſat, indagatur. Harum tractationum prior igitur iam ita eſt occupata atque exculta, vt nihil amplius in ea deſiderari queat; poſterior vero contra ita adhuc eſt derelicta atque neglecta, vt propemodum nihil eo ſpectans conſtet, nemoque in eo laborauerit. Solum fere, quod ex hac parte notum eſt, in hoc conſiſtit, vt ad onus mouendum maior potentia applicari debeat, quam quae ad aequilibrium ſufficit; et hoc quidem tam obuium eſt, vt nullum vnquam qui tantum de machinis cogitarit, fugere potuerit. Praeterea etiam iſtud principium paſſim circumfertur, quod quantum per diminutionem potentiae lucremur, tantundem ratione temporis perdamus: quod principium vtique ad tractationem mechanicam pertineret; indeque demonſtrandum fuiſſet: ſed hoc ipſum principium nullo nititur undamento, nec niſi vehementer reſtringatur, admitti poteſt, prout ex ſequentibus fuſius apparebit.

§. 3. Mirandum quidem non eſt, praecipuam atque maxime vtilem doctrinae de machinis partem tamdiu incultam iacuiſſe. Cum enim non admodum pridem mechanica excoli coeperit, ante etiam principia latuerunt, quibus aditus ad hanc tractationem patuiſſent. Nunc vero, etiamſi in mechanica plurima capita ſint pertractata, tamen ea pars, quae motum corporum finitorum complectitur, tam parum etiamnum inueſtigata, vt nequidem de principiis adhuc ſatis conſtet. Pertinet autem vtique haec de machinis tractatio ad iſtam mechanicae partem, cum machinae ſint corpora finitae magnitudinis, quae inſtar punctorum conſiderare non licet, atque propterea motus ex

ipſarum

ipſarum ſtructura et ratione potentiae et oneris debeat determinari. Cum igitur non ita pridem vera et genuina huius mechanicae partis principia detexiſſem et demonſtraſſem, licebit eorum beneficio deſideratam illam machinarum tractationem aggredi, atque motum cuiusuis machinae determinare.

§. 4. In omni machina multiplicatio potentiae praecipue intenditur, quo minori potentia ope machinae tantum praeſtari queat, quantum maiori potentia nuda. Ante omnia igitur in quauis machina conſideranda venit ratio multiplicationis potentiae; qua indicatur quoties potentia machinae applicata multiplicetur. Pendet autem haec multiplicationis ratio a ſtructura machinae, atque ſecundum praecepta ſtatica pro quauis machina facile definitur; vnde ſimul conſtat, ſi ratio oneris ad potentiam aequalis fuerit rationi multiplicationis, tum aequilibrium adeſſe debere. Quo ergo onus a potentia ſuperetur, et actu moueatur, neceſſe eſt, vt ratio multiplicationis maior ſit, quam ratio oneris ad potentiam, ſeu, vt potentia per machinam aucta maior euadat quam onus eleuandum ſeu promouendum. Cuiusmodi igitur hoc caſu in quaque machina oriatur motus, et quanta velocitate onus promoueatur, eſt id, in quod hoc loco inquirere conſtitui, et in quo primarius machinarum vſus conſiſtit, quippe quae non ad aequilibrium ſed ad motum producendum ſunt accommodatae.

§. 5. Poſt machinarum ſtructuram diligenter perpendenda eſt tam oneris quam potentiae indoles. Potentia autem omnino eſt corpus vi praeditum machinam mouendi,

cuiusmodi ſunt pondera, elateres, flumina, venti, atque vires animales hominum beſtiarumue; quae diuerſitas, prout in ſtatica tractatione machinarum parui ſeu potius nullius eſt momenti, ita in tractatione mechanica inprimis eſt attendenda. In ſtatica enim ſufficit noſſe quantitatem vis ſiue trahendi, ſiue pellendi, qua quaeque potentia gaudet; haecque quantitas congrue per pondera exponitur; namque cuiuscunque etiam indolis fuerit potentia machinae applicata, ſemper pondus aſſignari poteſt, quod aequali vi machinam afficeret. Ita non ſolum vires elaterum animaliumque cum ponderibus comparari poſſunt, ſed etiam illae vires, quae ab alliſione fluminum atque ventorum cum ponderibus ſunt homogeneae, atque per pondera menſurantur. Dummodo igitur potentiae applicatae, cuiuscunque etiam fuerit naturae, pondus aequiualens conſtet, id ad ſtaticam contemplationem prorſus ſufficit.

§. 6. Ad mechanicam autem machinarum pertractionem praeter quantitatem virium ſollicitantium, quae quidem hoc etiam loco aptiſſime per pondera indicantur, ipſa potentiae indoles diligenter eſt conſideranda. In motus productione enim plurimum refert, an potentia machinam mouens ſit pondus, an elater, an flumen ventusue, au vis animalis, etiamſi omnes inter ſe quantitate conueniant, atque ratione aequilibrii nihil diſcrepent. Hic enim etiam motus ipſius potentiae, dum machinam mouet, in conſiderationem venit, qui ſine diſpendio effectus, quem potentia in machinam mouendam exerit, generari non poteſt; iſte autem potentiae motus, ſeu potius pars effectus, qui in potentia mouenda conſumitur, ex vi inertiae po

tentiae

tentiae eſt diiudicanda. In quaque potentia igitur duas res contemplari oportet, vim ſcilicet, quae cum pondere aequiparatur, atque inertiam, quae ex quantitate materiae ipſius potentiae aeſtimari debet, quatenus ea ſimul mouetur. Hinc igitur ingens naſcitur diſcrimen inter potentias mouendas ſupra memoratas; ſi enim ponderibus machinae mouentur, inertia maſſis ponderum, hoc eſt, ipſis ponderibus eſt proportionalis. Elateres autem, etſi ingentibus ponderibus aequiualent, tamen plerumque tam paruam habent inertiam, vt cum exiguis maſſis ſint comparandae. Similis fere eſt ratio virium animalium, quibus longe minor quantitas materiae ad motum cietur, quam ſi earum loco aequiualentia pondera ſubſtituantur. In viribus autem fluuiorum et ventorum inertia plane eſt nulla, cum in aqua vel aere, dum machina mouetur, nullus nouus motus generetur.

§. 7. Pari ratione circa onera, quae machinarum ope moueri debent, duplex inquiſitio eſt inſtituenda. Primo enim videndum eſt, an onus vi quapiam inſita motui machinae renitatur et quanta vi, quae vis iterum commodiſſime cum pondere comparari poteſt. Ita ſi pondus ope machinae debeat eleuari, id vi grauitatis renititur motui machinae; ſin autem ſuper plano horizontali ſit promouendum, nullus adeſt reniſus. Perinde res ſe habet, ſi elaſtrum machinae ope ſit tendendum, quippe quod ſua vi elaſtica machinae reluctatur. Secundo loco maſſa oneris mouendi ſeu inertia eſt attendenda, qua fit, vt pars potentiae mouentis ad motum in onere generandum inſumatur, haecque inertiae vis, ſi machinae tantum ſtatice tractentur, prorſus non in computum ingreditur, ſed re-

luctatio

luctatio ſolum ſpectatur, cum qua potentia machinae applicata in aequilibrio conſiſtit. Niſi ergo onus obluctetur, tum nequidem ſtatica tractatio locum habet, quia ſponte adeſt aequilibrium, nullaque opus eſt potentia, ſed in mechanica machinarum conſideratione plurimum eiusmodi onera occurrunt, quae non reluctantur, ſed ad quae tantum mouenda omnis vis impenditur; ſic in omnis generis molendinis nulla adeſt reluctantia, nilque adeſt, quod niſu contrario machinam ſollicitaret, ſed omnis vis impenditur ad inertiam ſolam ſuperandam motumque generandum. Ex quo ſatis perſpicitur in mechanica tractatione iſtam diſtinctionem maximi eſſe momenti, neque ea neglecta certi quicquam de effectu machinarum ſtatui poſſe.

§. 8. Deinceps etiam de ipſa machina non ſufficit eius ſtructuram tantum noſſe, a qua multiplicatio potentiae ſollicitantis pendet, et quae ſola in ſtatica contemplatione adhibetur: ſed inſuper neceſſe eſt, vt eius maſſa et materia inſpiciatur. Cum enim onus moueri nequeat, machina immota, motus quoque in machina generari debet, quod ſine diſpendio potentiae ſollicitantis fieri nequit. Ad hunc ergo motum machinae definiendum inertia ipſius machinae in computum eſt ducenda, ſimulque ad relatiuas celeritates, quibus ſingulae machinae particulae mouentur, eſt reſpiciendum. In quibusdam etiam machinis partes exiſtunt, quae non ſolum ſunt mouendae, ſed etiam eleuandae, quarum propterea non tantum inertia, ſed reluctantia ſuperari debet. Hoc ſcilicet euenit in vecte, niſi eius grauitatis centrum in ipſo hypomochlio ſit ſitum; atque praecipue in trochleis compoſitis ſeu polyſpaſtis, in quibus inferiorem partem non ſolum moueri, ſed etiam

attolli

attolli opportet, ſi quidem polyſpaſta ad onera eleuanda adhibeantur: ſecus enim ſe res habet, ſi eorum ope onera horizontaliter protrahantur.

§. 9. Frictio denique praecipue eſt attendenda ſine qua nulla omnino machina confici poteſt. Non ſolum autem ipſa machina frictione laborat, ſed etiam onus, interdum quoque potentia ſollicitans, quae ſine frictione moueri non poſſunt. In exemplo molarum enim ſupra allato tota fere vis, quae ad machinam mouendam requiritur, in frictione ſuperanda abſumitur. Atque ſi onus ſuper plano ſiue horizontali ſiue inclinato eſt promouendum; frictio imprimis ſuperari debet, quemadmodum euenit in plauſtris et rhedis promouendis. Quamquam autem frictio mirum in modum diminui poteſt, tamen ſemper omnino tolli nequit, atque in machinis eius ratio imprimis eſt habenda, cum per eam effectus, qui ſine ea oriri deberet, vehementer turbetur. Quantumuis autem prima fronte conſideratio frictionis difficilis et moleſta videatur, tamen integrum calculum fere aeque facile inſtitui, ac ſi frictio prorſus abeſſet. Quando enim machina cum onere in motum eſt conſtituenda, certa atque determinata pars potentiae ſollicitantis ad frictionem ſuperandam requiritur, quae eadem manet, ſiue machina celerius ſiue tardius moueatur. Quouis igitur caſu iſta vis frictionem ſuperans practice cognoſcetur, ſi ea potentia tentando inueſtigetur, quae machinam mouere incipiat: oneris autem vis renitens, ſi quae adeſt, in hoc negotio tolli debet. Haec ergo ſi ſemel fuerit inuenta, perpetuo a tota vi ſollicitante ſubtrahi debet, atque ex vi reſidua ipſe motus perinde conſequetur, prorſus ac ſi nulla frictio adeſſet.

K §. 10.

§. 10. Praeterea de omnibus fere machinis eſt notandum, earum motum non eſſe acceleratum, ſed ad ſenſum aequabilem exiſtere; etiamſi potentia ſollicitans indeſinenter agat. Niſi enim machina celerrime moueatur, ſtatim ac vis ſollicitans ceſſat, eodem quaſi momento totus machinae motus ſiſtitur, cuius rei cauſa tam frictioni, quam aliis impedimentis, quibus omnes machinae obnoxiae ſunt, eſt tribuenda. Cum igitur machina eadem celeritate, qua motum incepit, moueri pergat, ſi quidem potentia ſollicitans indeſinenter agat, hanc conſtantem celeritatem tuto ex effectu potentiae ſollicitantis, quae alias in acceleratione conſiſtit, colligere licebit, quippe quo acceleratio eſt maior, eo celerius etiam machina mouetur. Hoc autem eo magis a quolibet admittetur, cum principalis noſter ſcopus in hoc verſetur, vt pro quouis caſu ea machina eligatur, qua onus celerrime moueri queat. His igitur praemiſſis ipſam tractationem aggredior, atque praecipuas machinarum ſpecies contemplabor, inueſtigaturus, quanta celeritate datum onus a data potentia ope cuiusque machinae promoueatur.

Propoſitio 1.

Tabula VIII. Fig. 1. §. 11. *Si vecti* AOC *ſuper hypomochlio* Y *in eius centro grauitatis* O *ſito, applicata ſit in* A *potentia* P, *in* B *vero onus* Q; *inuenire celeritatem, qua onus* Q *a potentia* P *ope vectis mouebitur.*

Solutio.

Exprimat p vim, qua vectis punctum A a potentia P in directione AP ſollicitatur; atque q vim, qua onus Q vectem in directione BQ trahit. Praeterea vero denotet

tet P inertiam potentiae P, et Q inertiam oneris Q. Sit porro maſſa ipſius vectis AC ſeu eius inertia $= A$, eiusque longitudo $AC = 2AO = 2a$ poſito vecte vbique eiusdem craſſitiei; at BO ſit $= b$. Iam ex ſtatica conſtat momentum ad vectem ſuper hypomochlio mouendum eſſe $= ap - bq$; quod per momentum inertiarum diuiſum dabit celeritatem angularem circa O. Momentum vero ipſius vectis habetur, multiplicando ſingulas vectis particulas in quadrata ſuarum diſtantiarum a centro motus, quod proinde, ſi latitudo vectis negligatur, vt plerumque fieri poteſt, per calculum reperietur $= \frac{Aa^2}{3}$. Inertiae vero potentiae P momentum prodibit multiplicando inertiam P in AO^2, eritque $= Pa^2$; quia in motu P eadem celeritate mouetur qua punctum A, punctum A vero per quadratum ipſius AO multiplicari debet. Pari modo momentum ex inertia oneris Q ortum eſt Qb^2, ita vt vniuerſum momentum ex cunctis inertiis ortum ſit $\frac{Aa^2}{3} + Pa^2 + Qb^2$. Hanc ob rem erit celeritas angularis, qua vectis ſuper hypomochlio Y conuertetur $= \frac{ap - bq}{\frac{Aa^2}{3} + Pa^2 + Qb^2}$; quae ducta in $BO = b$ dabit veram celeritatem, qua onus Q mouebitur, nempe $\frac{abp - bbq}{\frac{Aa^2}{3} + Pa^2 + Qb^2}$. Haecque formula locum habet, ſi nulla adeſſet frictio; at ſi frictio affuerit, ponamus ad eam ſuperandam vim Φ requiri in A applicandam, debebitque Φ a p auferri, atque in formula inuenta loco p ſubſtitui, $p - \Phi$, ita vt prouentura ſit celeritas oneris $Q = \frac{ab(p-\Phi) - bbq}{\frac{Aa^2}{8} + Pa^2 + Qb^2}$. Q. E. I.

Corollarium 1.

Vt igitur onus Q in directione QB moueatur, neceſſe eſt, vt ſit $a(p-\Phi) > bq$, ſeu $\frac{a}{b} > \frac{q}{p-\Phi}$; id quod etiam ex ſtaticis liquet; nam ſi $ap = bq$, tum onus a potentia in aequilibrio tenetur. Quare ad onus mouendum debet eſſe $ap > bq$; ad frictionem autem ſimul ſuperandam oportet, vt ſit etiam $a(p-\Phi) > bq$.

Corollarium 2.

Si onus nulla vi actioni potentiae reluctetur, ſed tantum eius inertia motui reſiſtat, tum erit $q = o$. Hoc ergo caſu onus mouebitur, ſi modo fuerit $a(p-\Phi) > o$, hoc eſt ſi $p > \Phi$. Quare hoc caſu requiritur vt potentia ſollicitans maior ſit, quam vis frictioni ſuperandae par; quod ſi fuerit, erit celeritas oneris $= \frac{ab(p-\Phi)}{\frac{Aa^2}{3} + Pa^2 + Qb^2}$. Locum habet iſte caſus, ſi onus etſi ponderoſum motu horizontali ſit promouendum.

Corollarium 3.

Si potentia ſollicitans P inertia careat, quemadmodum fit, ſi vectis ab alliſione aquae ſeu venti vrgeatur, tum erit $P = o$. Celeritas oneris igitur hoc caſu erit $= \frac{ab(p-\Phi) - b^2 q}{\frac{Aa^2}{3} + Qb^2}$; maior igitur eſt, quam ſi potentia ſollicitans inertiam habeat.

Corollarium 4.

Ex formula inuenta intelligitur duobus caſibus celeritatem oneris euaneſcere, quorum primus eſt ſi $a(p-\Phi) = bq$ ſeu

bq ſeu $b = \frac{a(p-\Phi)}{q}$; alter vero ſi $b = 0$, ex quo ſponte ſequitur, inter hos quaſi extremos valores ipſius *b* dari medium quempiam, quo onus celerrime moueatur.

Scholion.

§. 12. Poſuimus in hac propoſitione hypomochlium Y in ipſo centro grauitatis vectis eſſe conſtitutum, ne ipſius vectis pondus potentiam ſollicitantem vel augeret vel dimi-nueret; ſed ex principiis hic adhibitis aeque facile erit ſolu-tionem ad alios quoque caſus accommodare. Deinde ve-ctem ideo vbique eiusdem feci craſſitiei, quo eius momen-tum facilius calculo poſſet exponi, ſin autem vectis aliter ſit comparatus eius momentum per calculum eſt inueſti-gandum et in formula inuenta loco $\frac{Aa^2}{3}$ ſubſtituendum. Neque vero etiam iſtud momentum $\frac{Aa^2}{3}$ pro vectibus vbique aeque craſſis valet, niſi ipſa craſſities prae longitudine eua-neſcat, atque hypomochlium in ipſum grauitatis centrum incidat. Generalis autem regula pro inueniendo momento vectis prismatici ABCD reſpectu hypomochlii Y vbicunque poſiti haec eſt. Querendum eſt primo momentum reſpe-ctu centri grauitatis O, quod eſt $\frac{A.AC^2}{12}$, ducta diagonali AC, et denotante A maſſam vectis; ad hocque addi debet $A.OY^2$, ſeu factum ex maſſa in quadratum diſtantiae hy-pomochlii a centro grauitatis; quo facto aggregatum $\frac{A.AC^2}{12}$ $+ A.OY^2$ dabit momentum vectis deſideratum. Denique notandum eſt, etſi hic vectem tantum heterodromum con-templatus ſum, tamen ſolutionem etiam vectes homo-dromos in ſe complecti. Namque his caſibus fit quidem $BO = b$ negatiua, ſed potentia ſollicitans quoque in con-

Figura 2.

Figura 1.

 trariam

trariam plagam trahere debet, ita vt p vel $(p-\Phi)$ negatiuum obtineat valorem. His autem permutatis formula inuenta celeritatem oneris exprimens manet inuariata, ſcilicet $\frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{\frac{Aa^2}{3}+Pa^2+Qb^2}$, ita vt ſolutio ad omnis generis vectes aeque pateat.

Propoſitio 2.

Fig. 1. §. 13. *Data potentia* P *vecti* AC *circa hypomochlium* Y *mobili applicata, inuenire punctum* B, *in quo onus* Q *applicatum celerrime moueatur.*

Solutio.

Ex praecedente propoſitione eſt oneris Q celeritas $= \frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{\frac{Aa^2}{3}+Pa^2+Qb^2}$, in qua expreſſione p denotat vim potentiae ſollicitantis, P eiusdem inertiam; q vim oneris reluctantem, et Q eiusdem inertiam; $\frac{Aa^2}{3}$ momentum vectis inertiae, a, diſtantiam potentiae a hypomochlio, b diſtantiam oneris ab eodem: Φ denique vim ad frictionem ſuperandam requiſitam. His expoſitis problema propoſitum reſoluetur, ſi in formula celeritatem oneris exprimente b fiat variabile atque formulae differentiale nihilo aequetur. Prodibit autem $(\frac{A}{3}+P)(p-\Phi)a^3-2(\frac{A}{3}+P)a^2bq=Q(p-\Phi)ab^2$, ſeu $b^2=-\frac{2(\frac{1}{3}A+P)abq}{Q(p-\Phi)}+\frac{(\frac{1}{3}A+P)a^2}{Q}$ vnde prodit

$$b=-\frac{aq(\frac{1}{3}A+P)\pm a\sqrt{(q^2(\frac{1}{3}A+P)^2+Q(\frac{1}{3}A+P)(p-\Phi)^2)}}{Q(p-\Phi)}$$

De-

Debebit ergo eſſe $BO:AO = -1 \pm \sqrt{\left(1 + \frac{Q(p-\Phi)^2}{(\frac{1}{3}A+P)qq}\right)}$ $: \frac{Q(p-\Phi)}{q(\frac{1}{3}A+P)}$, vnde punctum quaeſitum B facile definitur Q. E. I.

Corollarium 1.

Si onus Q omni reluctantia extrinſeca careat, ſolaque inertia motui reſiſtat, tum celerrime mouebitur, ſi capiatur $BO = b = \pm a\sqrt{\frac{\frac{1}{3}A+P}{Q}}$, quia hoc caſu q euaneſcit. Quare punctum B hoc caſu perinde eſt, in quonam vectis brachio capiatur, modo ſit $BO:AO = \sqrt{(\frac{1}{3}A+P)}:\sqrt{Q}$.

Corollarium 2.

Sin autem onus inertia careat, atque vi tantum extrinſeca q motui vectis reſiſtat. Prout fere euenit, ſi lamina vehementer elaſtica debeat tendi, tum erit $Q = 0$. quo caſu aequatio vltimo inuenta abſurdum indicare videtur ob denominatorum $= 0$; ſed ex initiali ſtatim prodit $(p-\Phi)a = 2bq$. Erit ergo $BO:AO = p-\Phi : 2q$.

Scholion.

§. 14. Duplex ſitus puncti B, qui ob radicis quadratae extractionem prodiit, indicat quaeſito ſatisfieri poſſe, punctum B tam in brachio OA quam OC accipiendo; alter enim valor ipſius B eſt affirmatiuus, alter negatiuus. Harum autem ſolutionum prior tantum noſtro problemati ea ſignificatione, qua eſt propoſitum, ſtricte intellecto ſatisfacit. Altera vero ſolutio, qua punctum B in brachium

chium AO cadit, iſti quaeſtioni, quae quidem quoque in problemate continetur, ſatisfacit, qua quaeritur punctum in brachio OA, in quo ſi applicetur onus Q, id celerrime moueatur. Caſus autem iſte non ſpectat vectem homodromum, in vulgari ſenſu acceptum, hic enim tam potentia P quam onus Q viribus ſuis conſpirant ad vectem in eandem plagam conuertendum, ita vt iſto caſu ne aequilibrium quidem locum habeat. Interim tamen manifeſtum eſt dari locum B in brachio OA, in quo onus Q celerrime moueatur, quem locum alter ſolutionis caſus indicat.

Propoſitio 3.

§. 15. *Inuenire celeritatem, qua onus datum* Q *a* Fig. 3. 4. *potentia* P *ope axis in peritrochio* AOB *promouetur.*

Solutio.

Sit in hac machina radius maior, cui potentia P eſt applicata, $AO = a$; radius minor $OB = b$, in qua a centro O diſtantia onus Q trahitur. Maſſa autem ipſius machinae ponatur $= A$, eiusque momentum reſpectu axis per O tranſeuntis, circa quem machina mobilis exiſtit $= M$; erit ſcilicet M aggregatum ex ſingulis machinae particulis in ſuarum ab axe diſtantiarum quadrata multiplicatis, quod aggregatum pro quouis caſu propoſito calculo eſt determinandum. Habebit ergo M ſemper huiusmodi formam Ak^2; atque ſi machina fuerit cylindrus ex materia homogenea conſtans erit $M = \frac{Aa^2}{2}$; vnde ſi machina ex duobus conſtet cylindris, eius momentum erit aggregatum ex momentis vtriusque cylindri. Sit porro vis, qua po-

potentia P machinam ſollicitat $= p$, eiusque inertia $=$ P. Oneris vero Q vis extrinſeca, ſi quam habet, qua effectui potentiae P obluctatur ſit $= q$, inertia vero $=$ Q. In figuris allegatis duo caſus repraeſentantur, quorum priore onus eſt pondus eleuandum, quo propterea tam q quam Q eius maſſae ſunt proportionales; poſteriore vero figura onus eſt moles, motu horizontali promouenda, quo igitur q euaneſcit. Quicquid autem ſit, momentum virium ad rotam conuertendam erit $ap-bq$, frictione neglecta; at ſi frictio affuerit, ad quam ſuperandam potentia Φ in radio maiore applicata requiritur, erit momentum virium $= a(p-\Phi)-bq$. Momentum autem inertiarum erit $=$ $M+Pa^2+Qb^2$, quia P eadem celeritate mouetur, qua machinae punctum, A, Q vero eadem celeritate, qua punctum B; prout in prima propoſitione iam notauimus. Ex his momentis igitur erit celeritas angularis genita vt $\frac{a(p-\Phi)-bq}{M+Pa^2+Qb^2}$, ideoque celeritas ipſa qua onus Q in directione QB ad machinam trahitur, erit vt $\frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{M+Pa^2+Qb^2}$ Q. E. I.

Corollarium 1.

Quo igitur onus Q ad machinam attrahatur neceſſe eſt, vt ſit $a(p-\Phi)>bq$. Si enim ſit $ap=bq$, tum onus a potentia in aequilibrio conſeruatur, quare ad onus mouendum oportet vt ap tanto maius ſit quam bq, vt etiam frictioni ſuperandae par ſit.

Corollarium 2.

Si onus nulla vi extrinſeca actioni machinae reſiſtat, prout fit in caſu figurae quartae, tum ob $q=0$, erit celeritas, qua onus promouebitur vt $\frac{ab(p-\Phi)}{M+Pa^2+Qb^2}$. Hoc ergo

L caſu

caſu onus ſemper promouebitur, modo potentia applicata maior ſit, quam ad frictionem ſuperandam opus eſt.

Corollarium 3.

Duo hic iterum caſus ſunt notandi, quibus celeritas oneris euaneſcit, qui ſunt, quando eſt vel $a(p-\Phi)=bq$ vel $b=0$. Interque hos duos caſus reliqui omnes, quibus onus ad machinam trahitur continentur. Quamobrem neceſſe eſt, vt inter hos caſus vnus contineatur, quo onus celerrime moueatur.

Corollarium 4.

Si nullum adſit onus mouendum, ſed tantum celeritas requiratur, qua potentia rotam in gyrum agit; fiet $q=0$ et $Q=0$. Celeritas igitur, qua rotae punctum B circumuertetur erit $=\frac{ab(p-\Phi)}{M+Pa^2}$ ideoque celeritas angularis machinae prodibit $=\frac{a(p-\Phi)}{M+Pa^2}$.

Corollarium 5.

Si potentia P euaneſcat, atque onus vi trahente polleat, machina in ſenſum contrarium conuertetur celeritate angulari, quae eſt vt $\frac{bq-a\Phi}{M+Qb^2}$. Frictio enim ſemper a potentia ſollicitante auferri debet, cum motui perpetuo reſiſtat.

Propoſitio 4.

§. 16. *Datis maſſa et momento machinae definire radium minorem* OB, *quo efficitur vt datum onus a data potentia ope machinae celerrime moueatur.*

So-

Solutio.

Manentibus omnibus denominationibus, quibus in propoſitione praecedente ſumus vſi, erit celeritas, qua moles Q a potentia P ope machinae mouebitur vt $\frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{M+Pa^2+Qb^2}$ Quare ad propoſitum problema ſoluendum quantitas radii minoris b ita eſt determinanda, vt iſta expreſſio maximum obtineat valorem. Facto ergo b variabili atque formulae illius differentiali poſito $=0$ habebitur, $Ma(p-\Phi)+Pa^3(p-\Phi)=2(M+Pa^2)bq+Qab^2(p-\Phi)$, quae praebet $b^2=-\frac{2(M+Pa^2)bq}{Qa(p-\Phi)}+\frac{M+Pa^2}{Q}$. ex qua oritur $b=-\frac{(M+Pa^2)q}{Qa(p-\Phi)}\pm\frac{\sqrt{((M+Pa^2)^2q^2+Qa^2(p-\Phi)^2(M+Pa^2))}}{Qa(p-\Phi)}$; quae aequatio quidem duplicem dat valorem ipſius b, ſed pro inſtituto noſtro tantum affirmatiuus locum habet, cum negatiuus in alio caſu huc non pertinente maximi proprietate gaudeat. Erit ergo quaeſitus radius minor $b=-\frac{(M+Pa^2)q+\sqrt{(q^2(M+Pa^2)^2+Qa^2(p-\Phi)^2(M+Pa^2))}}{Qa(p-\Phi)}$ Q. E. I.

Corollarium 1.

Si igitur radius minor b eius quantitatis accipiatur, quam formula inuenta indicat, onus celerrime promouebitur. Ipſa autem celeritas haec maxima erit $=\frac{q}{2Q}\left(-1+\sqrt{\left(1+\frac{Qa^2(p-\Phi)^2}{(M+Pa^2)q^2}\right)}\right)$, quae expreſſio reperitur, ſi loco b eius valor inuentus in formula $\frac{ab(p-\Phi)-b^2q}{M+Pa^2+Qb^2}$ ſubſtituatur.

Corollarium 2.

Si onus mouendum Q nulla vi extrinſeca ſit praeditum, ſed eius ſola inertia a potentia ſollicitante ſuperari debeat erit $q=0$, atque onus celerrime mouebitur, ſi ra-

dius minor b capiatur $= \sqrt{\frac{M+Pa^2}{Q}}$. Tum autem celeritas erit $= \frac{a(p-\Phi)}{2\sqrt{Q(M+Pa^2)}}$.

Corollarium 3.

Sin autem onus mouendum inertia careat, atque tantum vis eius extrinſeca quaedam, cuiusmodi eſt vis elaſtica ſuperanda ſit, tum ob $Q=0$, erit $b=\frac{a(p-\Phi)}{2q}$. Ipſa autem celeritas maxima, qua hoc caſu onus mouebitur, erit $=\frac{a^2(p-\Phi)^2}{4q(M+Pa^2)}$. Hique ſunt duo caſus praecipui, inter quos reliqui omnes quibus onus et inertiam et vim extrinſecam habet, continentur.

Scholion.

§. 17. Ex hac propoſitione non ſolum axis in peritrochio vſus maxime lucroſus cognoſcitur, ſed etiam quantum interſit pro quouis caſu machinam maxime idoneam elegiſſe, abunde intelligitur. Niſi enim machina ita conficiatur, prout ſolutio poſtulat, fieri poteſt, vt idem onus a maxima potentia tardiſſime promoueatur, quod a longe minore potentia, machinae idoneae ope, celerius moueri poteſt. Cum igitur in vſu machinarum hoc precipue requiratur, vt datum onus a data potentia non ſolum moueatur, ſed etiam celerrime et minimo temporis diſpendio moueatur, perſpicuum eſt hanc propoſitionem in vita communi maximam vtilitatem afferre. Praeterea etiam hinc inſufficientia principii vulgo recepti ſatis ſuperque patet, quo ſtatuitur, quantum diminutione potentiae ſollicitantis lucremur, tantumdem per diminutionem celeritatis perdi. Celeritas enim oneris non a ſola potentia ſollicitante pendet, ſed etiam ab ipſius machinae indole, prout formulae inuentae ſatis declarant. Interim tamen id certum erit,

ſi

ſi ſemper machinae maxime idoneae adhibeantur, tum idem onus a maiore potentia celerius motum iri, quam a minore; ipſae autem celeritates non tenent potentiarum rationem; in caſu enim coroll. 2. rationem fere ſimplicem, in caſu autem coroll. 3. rationem habent fere duplicatam. Denique manifeſtum eſt in hac de motu machinarum doctrina, minime ſufficere vires potentiae et oneris tantum conſideraſſe, ſed etiam rationem inertiarum tam potentiae, quam oneris imprimis eſſe habendam, quae tamen vulgo, cum haec doctrina ſecundum ſtatica principia ſolum tractari ſolet, penitus negliguntur. Caſus autem ſupereſt, quo radius maior determinari debet, vt onus velociſſime a data potentia moueatur, poſito radio minore dato, qui caſus praecipue locum habet, quando circumuolutione cylindri onus ope funis circumuoluendi moueri debet, qnem igitur in ſequente propoſitione euoluam.

Propoſitio 5.

§. 18. *Determinare longitudinem vectis* AC, *quo datum onus* Q *a data potentia* P *ope cylindri circa axem* O *mobilis celerrime promoueatur.*

Solutio.

Sit vt ante radius cylindri BO$=b$, et integer radius maior quaeſitus ACO$=a$, oneris Q vel eleuandi vel horizontaliter promouendi, prout vtrumque in figura repraeſentatur inertia $=$Q, et vis reluctans $=q$, potentiae P inertia $=$P et vis ſollicitans $=p$. Maſſa vero cylindri ponatur $=$A, erit momentum ex eius inertia ortum $=\frac{Ab^2}{2}$, ſiquidem cylindrus ex materia vniformi conſtet, momentum autem ex inertia vectis AC ortum tuto negligi Tab. IX. Fig. 1.

 po-

poterit. Ad frictionem porro ſuperandam requiratur potentia Φ in diſtantia OC a centro O applicanda; cum enim frictio ſit conſtans, expedit eam a loco conſtante computare, quam ab etiamnum incognito A. His igitur praemiſſis erit celeritas, qua onus mouebitur $= \frac{abp - b^2\Phi - b^2 q}{\frac{1}{2}Ab^2 + Pa^2 + Qb^2}$, quae, quo fiat maxima, ponatur a variabile, et differentiale ortum ponatur $= 0$. Prodibit autem $b^3 p(\frac{1}{2}A + Q) + 2ab^2 P(\Phi + q) = Pa^2 bp$; vnde oritur $a^2 = \frac{2ab(\Phi + q)}{p} + \frac{b^2(\frac{1}{2}A + Q)}{P}$ quae aequatio praebet $a = \frac{b(\Phi + q)}{p} + \sqrt{(\frac{b^2(\Phi + q)^2}{pp} + \frac{b^2(\frac{1}{2}A + Q)}{P})}$ Debebit ergo fieri $AO : BO = 1 + \sqrt{(1 + \frac{pp(\frac{1}{2}A + Q)}{(\Phi + q)^2 P})} : \frac{p}{\Phi + q}$; vnde longitudo vectis AC adhibendi aptiſſima cognoſcitur. Q. E. I.

Corollarium 1.

Cum igitur ſit $a = \frac{b(\Phi + q)}{p} + b\sqrt{(\frac{(\Phi + q)^2}{pp} + \frac{\frac{1}{2}A + Q}{P})}$ erit ipſa celeritas, qua onus Q ope machinae hoc modo applicatae promouebitur $= \frac{\sqrt{((\Phi + q)^2 + \frac{pp(\frac{1}{2}A + Q)}{P})} - \Phi - q}{A + 2Q}$ vnde perſpicitur, quo minor ſit maſſa cylindri, eo celerius onus motum iri.

Co-

Corollarium 2.

Si vis ſollicitans nullam habeat inertiam, tum radius maior AO ſit infinite magnus. Quare in machinis, quae vento mouentur motus eo celerior exiſtit, quo longiores fuerint alae ventum excipientes, etiamſi maiorem non habeant ſuperficiem quam breuiores.

Corollarium 3.

Sequitur porro ex formula inuenta, quo maior fuerit vis ſollicitans p eo minorem vectem AC applicari debere, quo onus celerrime moueatur. Semper autem ceteris paribus maior potentia onus celerius mouebit quam minor.

Scholion.

§. 19. Supra iam monui, modum hunc, quo vtor celeritates exprimendi, ſtrictiſſimo ſenſu veritati non eſſe conſentaneum, ſed has expreſſiones ita tantum eſſe comparatas, vt ex earum quantitate celeritatis quantitas ſaltem colligi queat. Accurate enim loquendo iſtae expreſſiones, quas ad celeritates deſignandas vſurpo, accelerationem momentaneam tantum definiunt; ſatis autem perſpicuum eſt, quo maior ſit acceleratio, eo maiorem quoque fore ipſam celeritatem genitam. Hoc autem ad meum inſtitutum, quo potiſſimum in eos caſus inquiro, quibus onus celerrime moueatur, prorſus ſufficit; ea ipſa enim machina, in qua acceleratio oneris maxima exiſtit, onus quoque celerrime mouebit. Interim tamen non arduum eſt ex iisdem expreſſionibus veram oneris quouis loco celeritatem determinare. Cum enim in noſtro praeſenti caſu, cui praeceden-

cedentes ſimiles ſunt, acceleratio oneris ſit $= \frac{abp - b^2(\Phi + q)}{\frac{1}{2}Ab^2 + Pa^2 + Qb^2}$; ponamus onus iam per ſpatium x eſſe promotum, atque in hoc, quo nunc verſatur loco celeritatem habere tantam, quantam graue ex altitudine v cadendo adipiſcitur, eritque $dv = \frac{abp - b^2(\Phi + q)}{\frac{1}{2}Ab^2 + Pa^2 + Qb^2} dx$; Quocirca erit $v = \frac{abp - b^2(\Phi + q)}{\frac{1}{2}Ab^2 + Pa^2 + Qb^2} x$; cuius expreſſionis radix quadrata celeritatem oneris praebebit; ex quo adhuc clarius perſpicitur, onus celerrime promoueri, ſi haec expreſſio $\frac{abp - b^2(\Phi + q)}{\frac{1}{2}Ab^2 + Pa^2 + Qb^2}$ maximum obtineat valorem. Sed hinc ſimul intelligitur onus perpetuo motu accelerato promoueri debere, ſimili ei, quo grauia delabuntur, id quod tamen in plerisque machinis non vſu venit, cuius phaenomeni cauſa praecipua eſſe videtur actio potentiae ſollicitantis, quae plerumque non indeſinenter aequali vi vrget, prout in calculo ponitur; id quod imprimis de iis machinis intelligendum eſt, quae viribus animalibus ad motum cientur. Praeterea vero etiam reſiſtentia aeris, aliaque occulta impedimenta in cauſa eſſe posſunt, quo motus ſtatim aequabilis fiat, vlteriorque acceleratio ceſſet, quemadmodum in horologiis videre licet, quae deſcenſu ponderum ne ſenſibilem quidem accelerationem nanciſcuntur, etiamſi motu pendulorum careant.

Propoſitio 6.

Fig. 2. §. 20. *Si machina ex pluribus rotis conſtet inter ſe connexis; inuenire celeritatem qua onus* Q *a data potentia* P *ope huius machinae moueatur.*

So-

Solutio.

Ponamus hic tres rotas coniunctas, quarum prima circa centrum O, ſecunda circa C, et tertia circa E mobilis ſit. Quaelibet porro rota duplici praedita eſt disco maiore et minore, quorum minore quaeuis rota ſequentem mouet, circa minorem vero diſcum tertiae rotae tanquam circa cylindrum ope ſunis circumuoluendi onus promouetur. Sit nunc potentiae P vis ad machinam mouendam $= p$, eiusque inertia $= P$; oneris niſus contrarius $= q$, et eius inertia $= Q$. Ponatur rotae tertiae DE momentum inertiae $= M$; momentum ſecundae BC$= L$, et momentum primae $= K$: Sit vero rotae primae radius maior $AO = a$; minor $BO = b$; rotae ſecundae radius maior BC $= c$, minor $CD = d$; rotae tertiae radius maior $DE = e$; minor $EF = f$. Frictio autem totius machinae tanta ſit, vt ad eam ſuperandam potentia Φ in A applicata requiratur. His praemiſſis erit momentum potentiae ſollicitantis ad primam rotam mouendam $= ap$, momentum vero ad ſecundam rotam mouendam $= \frac{ac}{b} p$; atque momentum ad tertiam rotam mouendam $= \frac{ace}{bd} p$, motui vero tertiae rotae reluctatur vis oneris momento fq. Quo circa momentum ad tertiam rotam mouendam erit $= \frac{ace}{bd} p - fq$, atque frictione in computum ducta, erit hoc momentum $= \frac{ace}{bd}(p - \Phi) - fq$. Si iam motum tertiae rotae tantum conſideremus, quippe quo motus oneris producitur, quem quaerimus, erit momentum inertiae rotae tertiae $= M$, et momentum inertiae oneris $= Qf^2$, Rotae ſecundae autem tum ſolum foret $= L$, vt poſuimus, ſi eodem, quo tertia motu angulari moueretur, at cum in ratione $\frac{DE}{CD} = \frac{e}{d}$ celerius moueatur, augendum eſt eius momen-

tum in eadem ratione duplicata, ita vt ſit L $\frac{e^2}{a^2}$; atque ſimili modo proueniet momentum inertiae primae rotae $= \frac{K c^2 . e^2}{b^2 . d^2}$. Momentum autem, quod ex inertia potentiae ſollicitantis naſcitur erit $= \frac{Pa^2 . c^2 . e^2}{b^2 . d^2}$; ita vt vniuerſum momentum, ex omnibus inertiis coniunctis ortum, ſit $= \frac{Pa^2c^2e^2}{b^2d^2} + \frac{Kc^2e^2}{b^2d^2} + \frac{Le^2}{a^2} + M + Qf^2$. Ex his naſcitur vis acceleratrix tertiae rotae $= \frac{\frac{ace(p-\Phi)}{bd} - fq}{\frac{Pa^2c^2e^2}{b^2d^2} + \frac{Kc^2e^2}{b^2d^2} + \frac{Le^2}{d^2} + M + Qf^2}$ $= \frac{abcde(p-\Phi) - b^2d^2fq}{Pa^2c^2e^2 + Kc^2e^2 + Lb^2e^2 + Mb^2d^2 + Qb^2d^2f^2}$; cui cum ipſam celeritatem angularem tertiae rotae proportionalem ponamus, erit celeritas oneris $= \frac{abcdef(p-\Phi) - b^2d^2f^2q}{Kc^2e^2 + Lb^2e^2 + Mb^2d^2 + Pa^2c^2e^2 + Qb^2d^2f^2}$. Ex qua formula ſimul intelligitur, ſi numerus rotarum adhuc maior ponatur, quemadmodum celeritas oneris ſit exprimenda. Q. E. I.

Corollarium 1.

Cum quaeuis rota ex duobus diſcis conſtet maiore et minore, erit $K = Aa^2 + Bb^2$; vbi A denotat partem quampiam maſſae diſci maioris primae rotae, B vero partem quamdam maſſae diſci minoris, quae partes erunt dimidiae, ſi diſci fuerint cylindri. Simili modo habebit L eiusmodi formam $Cc^2 + Dd^2$, atque M talem $Ee^2 + Ff^2$. His igitur formis ſurrogatis erit oneris celeritas, qua mouebitur $= \frac{abcdef(p-\Phi) - b^2d^2f^2q}{a^2c^2e^2(A+P) + b^2c^2e^2(B+C) + b^2d^2e^2(D+E) + b^2d^2f^2(F+Q)}$ ex qua formula facilius caſus plurium rotarum euoluentur.

Co-

Corollarium 2.

Si nunc ponatur ratio radii maioris ad minorem in prima rota vt $k : 1$ ſeu $\frac{a}{b} = k$, atque $\frac{c}{d} = l$; et $\frac{e}{f} = m$, erit celeritat oneris $= \frac{klm(p - \Phi) - q}{k^2 l^2 m^2 (A + P) + l^2 m^2 (B + C) + m^2 (D + E) + F + Q}$

Corollarium 3.

Duobus ergo caſibus celeritas oneris poteſt eſſe nulla, quorum primus eſt, ſi ſit $klm(p - \Phi) = q$, alter vero ſi vel k, vel l, vel m fuerit $= 0$, illo enim caſu numerator euaneſcit, hoc autem denominator fit infinite magnus. Inter hos autem caſus omnes illi continentur, quibus onus actu mouetur.

Corollarium 4.

Dabitur ergo talis rotarum diſpoſitio pro datis potentia et onere, qua onus celerrime mouebitur; quae cum in vſu machinarum maximi ſit momenti, operae pretium erit eam inueſtigare, id quod in propoſitione ſequente praeſtabitur.

Propoſitio 7.

§. Inter omnes machinas, quae ex pluribus conſtant rotis coniunctis, quarum quaeque ſequentem mouet, eam determinare, cuius ope datum onus a data potentia celerrime promoueatur.

Solutio.

Retentis omnibus denominationibus, quibus in praecedente propoſitione ſum vſus, exprimet formula coroll. 2. commodiſſime celeritatem, qua onus Q ope machinae ex tribus rotis coniunctis compoſitae a potentia P mouebi-

 tur,

tur, et quae facillime ad quemcunque rotarum numerum accommodari poteſt. Erit ergo celeritas oneris $= \frac{klm(p-\Phi)-q}{kl^2m^2(A+P)+l^2m^2(B+C)+m^2(D+E)+F+Q}$ quae maxima eſt reddenda poſitis p, q, P et Q conſtantibus. Ponamus autem quoque quantitates A, B, C, D, E, F conſtantes, quae ex maſſis maiorum et minorum diſcorum, ex quibus rotae conſtant, determinantur. Quanquam enim hae quantitates a diametris rotarum pendent, atque iſtae diametri etiamnum ſunt incognitae, tamen quoque a craſſitie pendent, quae eſt arbitraria, et hanc ob rem ſine errore pro conſtantibus haberi poſſunt. Praeterea ad illam formam maximam efficiendam, non tam ipſam rotarum et diſcorum magnitudinem definimus, quam eorum mutuam relationem, numeros ſcilicet k, l, et m, ita vt ab harum variabilitate ipſa diſcorum quantitas non afficiatur. Sit ergo $klm = x$; numerusque x indicabit, quoties per machinam totam potentia applicata multiplicetur; atque ſit etiam $lm = y$, et $m = z$. Praeterea ſit breuitatis gratia $p-\Phi = r$; $A+P = K$; $B+C = L$; $D+E = M$ et $F+Q = N$, quibus ſuffectis erit celeritas oneris $= \frac{rx-q}{Kx^2+Ly^2+Mz^2+N}$ atque numeri x, y, z ita determinari debebunt, vt iſta expreſſio maximum obtineat valorem. Facile autem perſpicitur celeritatem fore eo maiorem, quo minores ſint numeri y et z, ita vt hos numeros definire non ſit opus. Quamobrem tantum x per methodum maximorum determinaſſe ſufficiet. Prodibit autem iſta aequatio $(Ly^2+Mz^2+N)r = Krx^2-2Kqx$, ſeu $x^2 = \frac{2qx}{r} + \frac{Ly^2+Mz^2+N}{K}$ ex qua oritur $x = \frac{q}{r} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{r^2} + \frac{Ly^2+Mz^2+N}{K}\right)}$ ſeu reſtitutis prioribus valoribus erit $klm = \frac{q}{p-\Phi} + \sqrt{\left(\frac{q^2}{(p-\Phi)^2} + \frac{(B+C)l^2m^2+(D+E)m^2+F+Q}{A+P}\right)}$ qua aequatione problema ſoluitur. Q. E. I.

Co-

Corollarium 1.

Si valor ipſius x inuentus in expreſſione celeritatis ſubſtituatur, prodibit celeritas oneris maxima quaeſita $= \frac{rr}{2Kr\sqrt{(\frac{q^2}{r^2}+\frac{Ly^2+Mz^2+N}{K}}+2Kq}$ quam apparet eo maiorem fore, quo minores fiant numeri y et z, ſeu numeri l et m.

Corollarium 2.

Ad problema propoſitum ergo ſoluendum machinam ita inſtrui oportet, vt potentiae multiplicatio per totam machinam facta tanta fiat, quanta eſt inuenta. Rotae autem ipſae quotquot fuerint, ita ſunt diſponendae, vt eae, prima excepta, potentiam quam minime augeant.

Corollarium 3.

Intelligitur porro, quo minor ſit rotarum numerus, eo celerius onus a data potentia promoueri. Cum enim numeri y, z, nec quantitates L, M, N neque euaneſcere neque negatiuos valores induere queant, manifeſtum eſt, quo pauciores literae L, M, N, hoc eſt quo pauciores rotae adhibeantur, eo celerius onus promoueri poſſe.

Corollarium 4.

Si igitur aliae circumſtantiae machinam plurium rotarum requirant, tum ſcopus intentus obtinebitur, ſi in prima rota ratio inter radium maiorem et minorem ſeu k tam magna conſtituatur, quam fieri poteſt. Si enim k etiam maior fiat qnam klm, tum ob l et m numeros vnitate minores, celeritas oneris eo maior euadet.

Scholion.

§. 22. Machinae ex pluribus rotis conſtantes tum praecipue adhiberi ſolent, quando per vnam rotam tanta potentiae multiplicatio produci nequit, quanta ad onus mouendum requiritur. His igitur caſibus primae rotae radius maior ad minorem maximam, quam fieri poteſt rationem tenere debebit; quo in ſequentibus autem rotis ratio inter radios maiores et minores, rationem aequalitatis minime ſuperet. Quando autem aliae circumſtantiae plures rotas requirunt, tum data regula maiore vtilitate adhiberi poteſt, qua in ſola prima rota maxima potentiae multiplicatio conſtitui debet. Hinc naſcitur regula ſumme vtilis pro molis tam ab aqua quam vento mouendis, quae ex ſua natura plures rotas non vero virium multiplicationem requirunt. Hoc caſu ergo fit inertia potentiae ſollicitantis $P = 0$; atque cum nullum onus ſit mouendum praeter ipſas rotas erit et q et $Q = 0$; contritio enim granorum ſub frictione comprehendi poteſt. Vt igitur mola velociſſime molat neceſſe eſt vt ſit $klm = \frac{\sqrt{(B+C)l^2m^2 + (D+E)m^2 + F}}{A}$. Accepta igitur maxima ratione inter radium maiorem et minorem primae rotae, quae immediate vel a dente vel aqua agitatur, l et m ita accipi debent, vt fiat $Ak^2l^2m^2 = (B+C)l^2m^2 + (D+E)m^2 + F$ ſeu ob $F = 0$, quia nullum adeſt onus erit $Ak^2l^2 - (B+C)l^2 = D + E$, ideoque $l = \frac{\sqrt{(D+E)}}{\sqrt{(Ak^2 - B - C)}}$; vnde vtiliſſima ſtructura molarum, ex tribus rotis conſtantium conſequitur. His autem obſeruatis erit celeritas qua lapis molaris in gyrum agetur directe vt potentia ſollicitans et reciproce vt diameter vltimae rotae: vltimam ergo rotam molae connexam minimam fieri conueniet. Reliquarum machinarum examen, ne nimis ſim prolixus, in aliud tempus differam.

Ioh.

Ioh. Bernoulli

COMPENDIVM ANALYSEOS PRO INVENTIONE VIS CENTRALIS IN ORBIBVS MOBILIBVS PLANETARVM.

Vid. Newton. Principia Mathem. Philos. Natur. Prop. 43. et 44. Lib. I. Confer. Phoron. Herm. pag. 95.

Supponitur hic orbitam datam quamcunque eſſe ABE, eamque moueri ea lege, vt vbi venerit in quemlibet ſitum *abe*, mobile vi centrali attractum perueniat ad locum *b* ad aequalem diſtantiam a centro virium C, ad quam perueniſſet eodem tempore, ſi orbita ABE maneret immobilis. Supponitur praeterea a Newtono motum orbitae ita attemperari, vt angulus *b*CA ad angulum BCA ſemper obſeruet rationem conſtantem, puta vt *n* ad 1. Vnde ſtatim ſequitur curuam veram AN*bg* ex motu duplici combinato reſultantem eam debere habere naturam, vt ſit vbique $gm.dm::n.1$;

Sit nunc $BD = ds$, $DM = dm = dy$, $BC = bC = x$, $BM = bm = dx$, $bg = dS$, radius euolutae in $B = v$, radius euolutae in $b = R$. Erit $v = \frac{xdx}{d(xdy:ds)}$, $R = \frac{xdx}{d(nxdy.dS)}$. Tempusculum per bg = temp. per BD = areolae $BCD = xdy$, vnde velocitas in B (ſi orbita eſſet immobilis) $= \frac{ds}{xdy}$, velocitas in *b* (in curua vera A*bg*) $= \frac{dS}{xdy}$. Vis normalis ad quamlibet curuam habetur, qua nempe vi mobile in curua retinetur, diuidendo quadratum velocitatis per radium euolutae; adeoque vis nor-

malis in B $= \frac{ds^2 d(xdy:ds)}{x^3 dy^2 dx}$. Quia autem vis centralis eſt ad vim normalem, quae ex illa reſultat, vt ds ad dy, oportet vt vis centralis in B ſit $= \frac{ds^3 d(xdy:ds)}{x^3 dy^3 dx}$ quae dicatur $= f$. Simili ratione vis normalis in b in curua vera $= \frac{dS^2 d(nxdy:dS)}{x^3 dy^2 dx}$ adeoque vis centralis, ex qua illa generari debet (nam et heic areae circumcentrales temporibus ſunt proportionales), vis, inquam, centralis $= \frac{dS^3 d(nxdy:dS)}{nx^3 dy^3 dx} = \frac{\frac{nn}{dx} \times d(nxdy:dS)}{n^3 x^3 dy^3 : dS^3} = \frac{-nn}{2dx} \times d \left(\frac{1}{nnxxdy^2 : dS^2} \right) = \frac{-nn}{2dx} \times d \left(\frac{dS^2}{nnxxdy^2} \right)$ quae dicatur $=$ F. Pari artificio transformatur f ſeu $\frac{ds^3 d(xdy:ds)}{x^3 dy^3 dx}$ in $\frac{-1}{2dx} \times d\left(\frac{ds^2}{xxdy^2}\right)$ ſeu in $\frac{-1}{2dx} \times d\left(\frac{nnds^2}{nnxxdy^2}\right)$. Habetur itaque $F - f = \frac{-nn}{2dx} \times d\left(\frac{dS^2}{nnxxdy^2}\right) + \frac{1}{2dx} \times d\left(\frac{nnds^2}{nnxxdy^2}\right) = (dS^2 = nndy^2 + dx^2$, ob $nnds^2 = nndx^2 + nndy^2) \frac{-nn}{2dx} \times d\left(\frac{nndy^2 + dx^2}{nnxxdy^2}\right) + \frac{1}{2dx} \times d\left(\frac{nndy^2 + nndx^2}{nnxxdy^2}\right) = \frac{-nn}{2dx} \times d \left(\frac{1}{xx} + \frac{dx^2}{nnxxdy^2}\right) + \frac{1}{2dx} \times d\left(\frac{1}{xx} + \frac{nndx^2}{nnxxdy^2}\right) =$ (differentiando actu ipſum $\frac{1}{xx}$) $\frac{nn}{x^3} - \frac{nn}{2dx} \times d\left(\frac{dx^2}{nnxxdy^2}\right) - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{2dx} \times d\left(\frac{nndx^2}{nnxxdy^2}\right) = \frac{nn-1}{x^3} - \frac{nn}{2dx} \times d\left(\frac{dx^2}{nnxxdy^2}\right) + \frac{1}{2dx} \times d\left(\frac{nndx^2}{nnxxdy^2}\right) =$ (quia ob conſtantem n duo poſtremi termini ſe mutuo deſtruunt) $\frac{nn-1}{x^3}$.

Corollarium I.

Eſt itaque exiſtente n inuariabili, virium centralium differentia in orbita mobili et immobili reciproce vt cubus communis altitudinis x, ſicuti habet Newtonus in propoſ. 44. operoſe et obſcure demonſtrata; ſed et inſuper hoc patet, quod Newtonus non docet, ſi duae ſint orbitae mobiles, quarum velocitates angulares ſint vt n ad N, et vtraque ad velocitatem angularem in orbita immobili habeat conſtantem rationem, fore differentiam illam virium in vna ad differentiam virium in altera vt $nn-1$ ad NN-1.

Co-

Corollarium 2.

Si manente n inuariabili, x ſit infinita, h. e. ſi directiones virium ſint parallelae, erit $\frac{nn-1}{x^3} = \frac{nn-1}{\infty^3} = 0$, adeoque $F - f = 0$, id eſt, in orbita mobili et immobili eadem vis ad infinitum tendens requiritur, quia illarum differentia eſt nulla.

Proceſſus Analyſeos

pro hypotheſi generali velocitatis angularis qualiscunque.

Sit iam n ad 1 in ratione quacunque etiam variabili: vidimus pro orbita immobili vim normalem in B eſſe $= \frac{ds^2 d(xdy:ds)}{x^3 dy^2 dx}$, ex qua deducta eſt vis centralis $f = \frac{-1}{2dx} \times d(\frac{ds^2}{xxdy^2})$, quae monſtrata eſt $= \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2dx} \times d(\frac{dx^2}{xxdy^2})$. Porro vis normalis in b etiamnum eſt $= \frac{dS^2 d(nxdy:dS)}{x^3 dy^2 dx}$. Sed quia, exiſtente n variabili, C non amplius eſt centrum virium pro deſcribenda curua vera A N b, nam area ACb cum non habeat rationem conſtantem ad aream ACB, erit illa ACb non amplius proportionalis tempori per arcum ANb; Ad habendam ergo vim in b, quae ad C deriuatur, non recte procederetur dicendo vis normalis in b eſt ad vim centralem verſus C vt ndy ad dS, ſed ad hanc vim determinandam opus eſt vt in conſiderationem trahatur vis tangentialis in b, quae prius inuenienda eſt hoc modo: vocatur haec vis tang. $= g$, patet ex lege accelerationis (quia dS eſt ſpatiolum percurrendum tempusculo $\frac{dS}{xdy}$) fore $g \times dS : \frac{dS}{xdy}$, hoc eſt, $gxdy = -d(\frac{dS}{xdy})$ vnde $g = \frac{-1}{xdy} d(dS:xdy)$. Nunc vtraque vis tam normalis quam tangentialis per decompoſitionem deriuanda eſt ope triangulorum ſimilium ad directionem rectae bC, quod ſic

 fit:

fit : Vt dS ad ndy ita vis normalis in b ſeu $\frac{dS^2 d(nxdy:dS)}{x^3 dy^2 dx}$ ad vim quae ex normali deriuatur a b verſus C, et quae proin erit $= \frac{ndSd(nxdy:dS)}{x^3 dy dx}$, cui addenda eſt vis deriuanda ex tangentiali, et quae inuenitur dicendo vt dS ad dx, ita vis tang. in b ſeu $\frac{-1}{xdy}\, d(dS:xdy)$ ad quaeſitam, quae proin erit $= \frac{-dx}{xdydS}\, d(dS:xdy)$, et ſic tota vis in b verſus C habetur $= \frac{ndSd(nxdy:dS)}{x^3 dy dx} - \frac{dx}{xdydS}\, d(dS:xdy) =$ (quia generaliter $dz = -zzd(1:z)$ nominando hic $\frac{1}{z} = dS:xdy$) $\frac{ndSd(nxdy:dS)}{x^3dydx} + \frac{dSdxd(xdy:dS)}{x^3dy^3} = \frac{n^4dy^2}{dS^2dx} \times \frac{d(nxdy:dS)}{n^3x^3d^3:dS^3} + \frac{dx}{dS^2} \times \frac{d(xdy:dS)}{x^3dy^3:dS^3} = \frac{-n^4dy^2}{2dS^2dx}\, d\left(\frac{dS^2}{nnxxdy^2}\right) - \frac{dx}{2dS^2}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) =$ [Quia $d\left(\frac{dS^2}{nnxxdy^2}\right) = \frac{1}{nn}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) + \frac{dS^2}{xxdy^2}\, d\left(\frac{1}{nn}\right)$], $\frac{-nndy^2}{2dS^2dx}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) - \frac{n^4}{2xxdx}\, d\left(\frac{1}{nn}\right) - \frac{dx}{2dS^2}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) =$ [addendo actu primum et tertium], $-\frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) - \frac{n^4}{2xxdx}\, d\left(\frac{1}{nn}\right) = -\frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dS^2}{xxdy^2}\right) + \frac{ndn}{xxdx} = -\frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{nndy^2+dx^2}{xxdy^2}\right) + \frac{ndn}{xxdx} = -\frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{nn}{xx}\right) - \frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dx^2}{xxdy^2}\right) + \frac{ndn}{xxdx} =$ [differentiando primum terminum actu], $\frac{nn}{x^3} + \left(\frac{n}{xx} - \frac{n}{xx}\right)\frac{dn}{dx} - \frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dx^2}{xxdy^2}\right) =$ [ob deſtructionem medii], $\frac{nn}{x_3} - \frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dx^2}{xxdy^2}\right) = F$; Inuenimus autem $f = \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2dx}\, d\left(\frac{dx^2}{xxdy^2}\right)$, Hinc ergo $F - f = \frac{nn-1}{x^3}$. Atque ita per hanc operationem prodit eadem formula, quae per priorem pro hypotheſi, particulari, vbi n ſuppoſita fuit inuariabilis, quae proin tamquam caſus particularis in generali includitur.

Corollarium 1.

Igitur vniuerſaliter verum eſt, quod in Coroll. 1. praecedentis oſtendi tantum de duobus numeris conſtantibus n et N; ſi nimium orbita ABE iam primo hac lege mo-

moueatur, vt angulus ACb ad angulum ACB habeat rationem quamcunque etiamſi variabilem n ad 1, deinde eadem ABE moueatur alia lege, vt illi duo anguli rationem habeant etiam vtcunque variabilem N ad 1: Erit in aequalibus a centro virium C diſtantiis differentia virium in vna ad differentiam virium in altera vt $nn-1$ ad $NN-1$; Hinc poſito $N > 1$, erit differentia differentiarum virium $= \frac{(NN-1)-(nn-1)}{x^3} = \frac{NN-nn}{x^3}$.

Corollarium 2.

Centro virium exiſtente in diſtanti infinita, adeoque earum directione parallela: erit etiam hic, qualiscunque ſit ratio variabilis inter n et 1, differentia virium nulla, nam $\frac{nn-1}{x^3} = \frac{nn-1}{\infty^3} = 0$. Vnde ſequitur, quacunque vi mobile ſolicitetur ſecundum directiones parallelas ad deſcribendam aliquam traiectoriam, vim illam non mutari, ſiue quieſcat traiectoria, ſiue moueatur ſecundum lineam rectam quamcunque, vniformiter ſeu non vniformiter: Theorema elegans et a nemine hactenus demonſtratum.

Corollarium 3.

Si n eſt variabilis, euidens eſt $\frac{nn-1}{x^3}$ non eſſe proportionalem ipſi $\frac{1}{x^3}$ in diuerſis locis. Hoc ergo in caſu liquet, demonſtrationem in Phoron. p. 97. datam eſſe paralogiſticam, vtpote in qua non fit attentio ad variabilitatem aut inuariabilitatem ipſius n, ſiquidem Auctoris ratiocinium ad vtrumque aequali iure applicari poſſet.

Corollarium 4.

Si orbita mobilis habeat motum angularem vniformem, ſicuti obſeruatur in orbitis planetarum, quarum

apſides vniformiter progrediantur, in quo caſu determinationem ipſius $F-f$ intactam praeteriit Newtonus, licet ipſi rei naturae conuenientem, erit (nominando $CA=a$, et aſſumta arbitraria $=b$) $n=\frac{ab+xx}{ab}$. Atque inuenietur ex noſtro theoremate $F-f=\frac{nn-1}{x^3}=\frac{2}{abx}+\frac{x}{aabb}$; Si praeterea $ab=1$, habebitur $F-f=\frac{2}{x}+x$. Quod ſi vero ponatur $ab=\frac{1}{2}$, prodibit $F-f=\frac{4}{x}+4x$.

Corollarium 5.

Si $ab=\infty$, ita vt n euadat $=1$, per conſequens motus angularis nullus ſeu infinite lentus, quo caſu $F-f$ $\frac{2}{abx}+\frac{x}{aabb}=0$, vt fieri debet. Reuera tunc valor ipſius F fit $\frac{1}{x^3}-\frac{1}{2dx}d\left(\frac{dx^2}{xxdy^2}\right)$, qui eſt etiam valor ipſius f, fieri vt par eſt.

Corollarium 6.

Si lubeat efficere, vt vis centralis in orbita mobili ſuperet vim centralem in orbita immobili dato exceſſu conſtante, hoc eſt, vt $F-f=\frac{1}{a^3}$, faciendum tantum eſt $\frac{nn-1}{x^3}=\frac{1}{a^3}$, vnde oritur $n=\sqrt{\left(\frac{a^3+x^3}{a^3}\right)}$; Quare $(n-)dy$ $=-dy+dy\sqrt{\left(\frac{a^3+x^3}{a^3}\right)}$, quod diuiſum per x, dat $\frac{n-1}{x}$ dy ſeu angulum $bCg=-\frac{dy}{x}+\frac{dy}{x}\sqrt{\left(\frac{a^3+x^3}{a^3}\right)}$, qui porro diuiſus per tempuſculum xdy, dabit velocitatem motus angularis $=-\frac{1}{xx}+\frac{1}{xx}\sqrt{\left(\frac{a^3+x^3}{a^3}\right)}$.

Scholion.

Falſitas ratiocinii Hermanniani ex hoc quoque elucet, quod ex eo (etiamſi n ſit conſtans) ſequeretur eſſe $F-f=$ $\frac{nn-2n+1}{x^3}$, quod licet daret differentiam virium centralium reci-

reciproce vt cubum diſtantiae, tamen cum noſtra $\frac{nn-1}{x^3}$ non conueniret reſpectu intenſitatis virium, etenim $nn-2n+1$ non poteſt eſſe aequale ipſi $nn-1$, niſi in ſolo caſu vbi $n=1$, hoc eſt, vbi orbita ABE circulatur motu infinite paruo ſeu nullo. Erroris origo in hoc conſiſtit, quod vim centralem in curua vera ANbg progenitam, quae vtique in elemento quolibet bg dependet a ſola eius curuedine et corporis velocitate, eam tamen vim decomponat in collaterales ſecundum bm et mg, et quidem ita vt mg non tanquam rectam ſed tanquam arculum cuius centrum C conſideret; quis autem vnquam docuit ita decomponere vires? Quando corpus peruenit ad b, vim ſuam generatam iam habet, adeo vt mg vel md non magis pro centro haberet punctum C quam aliud quoduis in recta bC pro lubitu aſſumtum. Sed ſi dicendum quod res eſt, vis centrifuga, quam corpus habet dum acquiſita ſua velocitate percurrit particulam curuam bg, eſt vnica et ſimplex, quae quatenus exiſtit in corpore, a nulla alia circumſtantia dependet, atque ſi eam in mente noſtra, quod licet, decomponere velimus in bm et mg, vtraque harum conſiderari debet vt recta ſecundum quas vires componentes agere poſſe concipiuntur, vt inde tertia reſultet ſecundum directionem bg, etiamſi actu ipſo componentes non exiſtant, nedum habeant directiones ſuas (aut ſaltem alterutram) in arcum formatas, quod abſonum eſſet et a vero claroque concipiendi modo alieniſſimum.

DE ATTRACTIONE CORPORVM SPHAEROIDICO-ELLIPTICORVM.

AVCTORE
L. Eulero.

Problema I.

Tab. XI. Fig. 1.

Sit in plano horizontali ſeu plano chartae ellipſis, cuius ſingulae particulae vniformiter attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum; Ellipſis vero huius axes ſint AB, EF centrumque C, atque in recta verticali per C ducta CO, poſitum ſit punctum O; de quo quaeritur quanta vi id ab ellipſi attrahatur.

Solutio.

Primo perſpicuum eſt, quia ſingulae ellipſis particulae aequali vi attractiua praeditae ponuntur, et punctum O, quippe in verticali CO poſitum, centro ellipſis imminet, id ab omnibus viribus coniunctim ad centrum C tractum iri. Quamobrem vires quibus ad ſingulas ellipſis particulas attrahitur, reſoluendae ſunt in laterales, quarum alterae in OC incidant, alterae directiones habeant horizontales, quae poſteriores negligi poſſunt, cum omnes ſe mutuo deſtruant, ita vt ad problema ſoluendum ſufficiat, vires eas conſiderare, quarum directiones in verticalem OC cadant.

Ponatur iam ſemiaxis $AC = a$; ſemiaxis $CF = b$; et diſtantia $CO = c$. Axi EF ducatur ordinata parallela MM,

MM, eique proxima mm; eodemque interuallo ex altera parte ordinatae NN et nn vt habeantur ellipſis elementa $MmmM$, $NnnN$, ad quae quanta vi punctum O in directione OC trahatur, inueſtigemus. Sit igitur $CP = CQ = x$; $Pp = dx$; erit ex natura ellipſis $PM = QN = \frac{b}{a}\sqrt{(aa - xx)}$. In elemento $MmmM$ conſideretur quaeuis particula Xz exiſtente $PX = z$ et $Xx = dz$; eritque ipſa particula $Xz = dxdz$; cuius a puncto O diſtantia eſt $\sqrt{(c^2 + x^2 + z^2)}$. Vis igitur qua punctum O ad hanc particulam trahetur erit vt $\frac{dxdz}{c^2 + x^2 + z^2}$; ex qua obtinebitur vis lateralis, qua O in directione OC trahitur ſi fiat vt $\sqrt{(cc + xx + zz)}$ ad c ita vis $\frac{dxdz}{c^2 + x^2 + z^2}$ ad quaeſitum quae ergo erit $= \frac{cdxdz}{(cc + xx + zz)^{\frac{3}{2}}}$; quae integrata poſito x conſtante dabit vim in directione OC, qua O ab elemento $PpZX$ trahitur, integrale vero eſt $\frac{czdx}{(cc + xx)\sqrt{(c^2 + x^2 + z^2)}}$. Ponatur $z = PM = \frac{b}{a}\sqrt{(a^2 - x^2)}$ habebitur vis, qua O ab elemento $PpmM$ ad C vrgetur, eritque $= \frac{bcdx\sqrt{(aa - xx)}}{(cc + xx)\sqrt{(aacc + aabb + aaxx - bbxx)}}$. Vis ergo, qua punctum O ad C vrgebitur, ab vtroque elemento $MmmM$ et $NnnN$ coniunctim, erit $= \frac{4bcdx\sqrt{(a^2 - x^2)}}{(cc + xx)\sqrt{(aa(bb + cc) + (aa - bb)xx)}}$. Huius ergo integrale ita ſumtum vt euaneſcat poſito $x = o$, dabit vim qua punctum O ad C attrahitur ab elipſis portione MENNFM. Atque ſi tum ponatur $x = a$, prodibit vis attractiua ex tota ellipſi orta, quae poſtulatur.

Formula autem propoſita differentialis ita eſt comparata, vt ad rationalitatem reduci et proinde integrari nequeat, niſi ſit $a = b$, quo quidem caſu, ſcilicet quando ellipſis abit in circulum, formula differentialis ſatis manet

per-

perplexa, vt difficulter inde attractio, quae alias facile conſiderandis elementis circularibus ipſi C concentricis eruitur, inueniri queat. Ingens autem in hoc negotio ſubſidium adhiberi poſſe obſeruaui, ſi non integrale indefinitum formulae propoſitae, ſed ſtatim id integrale poſito $x = a$ inueſtigetur. Quod quo commode perfici queat, ſequentes integrationes ſunt praemittendae, quae ad hypotheſin $x = a$ ſunt accommodatae; vbi $\pi : 1$ denotat rationem peripheriae ad diametrum

$$\int dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{\pi a^2}{4}$$

$$\int x^2 dx\sqrt{(a^2-x^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi a^4}{4}$$

$$\int x^4 dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1.\ 3}{4.\ 6}\cdot\frac{\pi a^6}{4}$$

$$\int x^6 dx\sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1.\ 3.\ 5}{4.\ 6.\ 8}\cdot\frac{\pi a^8}{4}$$

Inventio harum expreſſionum hoc nititur fundamento, quod ſit

$$\int x^{m+2} dx\sqrt{(aa-xx)} = \frac{-x^{m+1}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}}{m+4} + \frac{(m+1)a^2}{m+4}\int x^m dx$$

$\sqrt{(aa-xx)}$ generaliter quidem, vti differentialia ſumenti patebit. Caſu ergo quo $x = a$ erit $\int x^{m+2} dx \sqrt{(aa-xx)} = \frac{(m+1)a^2}{m+4}\int x^m dx\sqrt{(aa-xx)}$. Vt nunc formulas has adhibere queamus, reſoluendus eſt factor ipſius $dx\sqrt{(aa-xx)}$ in ſeriem, cuius termini teneant poteſtates ipſius x parium exponentium. Atque primo quidem eſt $\frac{4bc}{cc-xx} = \frac{4b}{c} - \frac{4bxx}{c^3} + \frac{4bx^4}{c^5} - \frac{4bx^6}{c^7} + \frac{4bx^8}{c^9} -$ etc. atque $\frac{1}{\sqrt{(aa(bb+cc)+(aa-bb)xx)}} = \frac{1}{a\sqrt{(bb+cc)}} - \frac{1(aa-bb)xx}{2a^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1.3(aa-bb)^2x^4}{2.4a^5(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}$ - etc. His ſeriebus in ſe ductis prodibit $\frac{4bcdx\sqrt{(aa-xx)}}{(cc+xx)\sqrt{(aa(bb+cc)+(aa-bb)xx)}} =$

4*bdx*

$$4bdx\sqrt{(aa-xx)}\left\{\begin{array}{l}
\frac{1}{ac\sqrt{(bb+cc)}}-\frac{xx}{ac^3\sqrt{(bb+cc)}}+\frac{x^4}{ac^5\sqrt{(bb+cc)}}-\frac{x^6}{ac^7\sqrt{(bb+cc)}}+\text{etc.}\\
\qquad-\frac{1(aa-bb)xx}{2a^3c(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1(aa-bb)x^4}{2a^3c^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1\ (aa-bb\ x^6}{2a^3c^5(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}+\text{etc.}\\
\qquad\qquad+\frac{1.3(aa-bb)^2x^4}{2.4.a^5c(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1.3.(aa-bb)^2x^6}{2.4a^5c^3(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}\text{etc.}\\
\qquad\qquad\qquad-\frac{1.3.5(aa-bb)^3x^6}{2.4.6a^7c(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}\text{etc.}
\end{array}\right.$$

Siue ſequente forma ſuccinctiori adhibita, habebitur

$$4bdx\sqrt{(aa-xx)}\left\{\begin{array}{l}
+\frac{1}{ac\sqrt{(bb+cc)}}\left(1-\frac{xx}{cc}+\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-\text{ect.}\right)\\
+\frac{1(aa-bb)c}{2a^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}\left(-\frac{xx}{cc}+\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-\text{etc.}\right)\\
+\frac{1.3(aa-bb)^2c^3}{2.4.a^5(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}\left(+\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-\text{etc.}\right)\\
+\frac{1.3.5(aa-bb)^3c^5}{2.4.6a^7(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}\left(-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-\text{etc.}\right)\\
+\frac{1.3.5.7.(aa-bb)^4c^7}{2.4.6.8a^9(bb+cc)^{\frac{9}{2}}}\left(+\frac{x^8}{c^8}-\frac{x^{10}}{c^{10}}+\text{etc.}\right)\\
+\frac{1.3.5.7.9(aa-bb)^5c^9}{2.4.6.8.10a^{11}(bb+cc)^{\frac{11}{2}}}\left(-\frac{x^{10}}{c^{10}}+\text{etc.}\right.
\end{array}\right.$$

Si nunc huius expreſſionis ſinguli termini ſeorſim integrentur per formulas datas pro hypotheſi $x=a$, attractio quaeſita habebitur; at commode hic accidit, vt poſt integrationem ſingulae ſeries ſummationem admittant; quod quo melius pateat conſideremus cuiusque ſeriei integrale ſeorſim, eritque integrale huius $4bdx\sqrt{(aa-xx)}\left(1-\frac{xx}{cc}+\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\frac{x^8}{c^8}-\text{etc.}\right)$ quod reperietur $=\pi\left(a^2b-\frac{1}{4}\frac{a^4b}{cc}+\frac{1.3}{4.6}.\frac{a^6b}{c^4}-\frac{1.3.5a^8b}{4.6.8c^6}+\frac{1.3.5.7a^{10}b}{4.6.8.10c^8}-\text{etc.}\right)$ Simili modo erit $\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}.\ \left(-\frac{xx}{cc}+\frac{x^4}{c^4}-\frac{x^6}{c^6}+\text{etc.}\right)$

$= \pi(-\frac{1a^4b}{4c^2} + \frac{1.3.a^6b}{4.6.c^4} - \frac{1.3.5a^7b}{4.6.8c^6} +$ etc.) atque $\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}.$ $(\frac{x^4}{c^4} - \frac{x^6}{c^6} + \frac{x^8}{c^8} -$ etc.) $= \pi(\frac{1.3a^6b}{4.cc^4} - \frac{1.3.5a^7b}{4.6.8.c^6} +$ etc.), etc. Vnde intelligitur ſi vnica ſerierum harum ſit ſummabilis etiam omnium ſummas exhiberi poſſe. Conſidero igitur primam, cui hanc do formam $\pi bcc(\frac{aa}{cc} - \frac{1a^4}{4c^4} + \frac{1.3a^6}{4.6c^6} - \frac{1.3.5a^8}{4.6.8c^8} +$ etc.) poſitoque $\frac{a}{c} = r$, pono $r^2 - \frac{1}{4}r^4 + \frac{1.3}{4.6}r^6 - \frac{1.3.5}{4.6.8}r^8 +$ etc. $= s$. hinc erit differentiando $\frac{ds}{dr} = 2r - 1r^3 + \frac{1.3}{4}r^5 - \frac{1.3.5}{4.6.}r^7 +$ etc. atque $\frac{ds}{r^3} = \frac{2dr}{r^2} - 1dr + \frac{1.3}{4}r^2dr - \frac{1.3.5}{4.6}r^4dr +$ etc. et integrando $\int\frac{ds}{r^3} = -\frac{2}{r} - r + \frac{1}{4}r^3 - \frac{1.3}{4.6}r^5 +$ etc. $= -\frac{2}{r} - \frac{s}{r}$ Ex aequatione ergo $\int\frac{ds}{r^3} + \frac{2+s}{r} = 0$ oritur $\frac{ds}{r} + rds - 2dr - sdr = 0$ ſeu $ds - \frac{srdr}{1+rr} = \frac{2rdr}{1+rr}$, quae per $\sqrt{(1+rr)}$ diuidendo abit in $\frac{ds}{\sqrt{(1+rr)}} - \frac{srdr}{(1+rr)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2rdr}{(1+rr)^{\frac{3}{2}}}$, cuius integrale eſt $\frac{s}{\sqrt{(1+rr)}} = C - \frac{2}{\sqrt{(1+rr)}}$ $= 2 - \frac{2}{\sqrt{(1+rr)}}$) quia facto $r = 0$ fit $s = 0$. Erit igitur $s = 2\sqrt{(1+rr)} - 2 = \frac{2\sqrt{(aa+cc)}-2c}{c} = \frac{aa}{cc} - \frac{1a^4}{4c^4} + \frac{1.3a^6}{4.6c^6} -$ etc. Conſequenter habebitur $\pi(aab - \frac{1a^4b}{4c^2} + \frac{1.3a^6b}{4.6c^4} - \frac{1.3.5a^8b}{4.6.8c^6} +$ etc.) $= 2\pi bc(\sqrt{(aa+cc)} - c)$. Quocirca ſuperiores integrationes erunt

$\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}.\ (1 - \frac{xx}{cc} + \frac{x^4}{c^4} -$ etc.) $= \pi(2bc\sqrt{(aa+cc)} - 2bcc)$

$\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}.(-\frac{xx}{cc} + \frac{x^4}{c^4} -$ etc.) $= \pi(2bc\sqrt{(aa+cc)} - 2bcc - aab)$

$\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}\ (\frac{x^4}{c^4} - \frac{x^6}{c^6} +$ etc.) $= \pi(2bc\sqrt{(aa+cc)} - 2bcc - aab + \frac{1a^4b}{4cc})$

$\int 4bdx\sqrt{(aa-xx)}\ (-\frac{x^6}{c^6} + \frac{x^8}{c^8} -$ etc.) $= \pi(2bc\sqrt{(aa+cc)} - 2bcc - aab + \frac{1a^4b}{4cc} - \frac{1.3a^6b}{4.6c^4})$

etc.

Pro ſingularum ergo ſerierum ſuperioris formulae differentialis integralibus nacti ſumus expreſſiones finitas. Tantum igitur ſuper eſt, vt eas ſubſtituamus, quo facto pro integrali

grali formula $\frac{4bcdx\sqrt{(aa-xx)}}{(cc+xx)\sqrt{(aa(bb+cc)+(aa-bb)xx)}}$ atque ideo pro quantitate attractionis quaeſitae puncti O ad centrum ellipſis AEBFA ſequens orietur valor. $\pi\Big(\frac{2b\sqrt{(aa+cc)}}{a\sqrt{(bb+cc)}}-\frac{2bc}{a\sqrt{(bb+cc)}}+\frac{bcc(aa-bb)\sqrt{(aa+cc)}}{a^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}-\frac{bc^3(aa-bb)}{a^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}-\frac{b(aa-bb)}{2a(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}+$ etc.

Vel cum ad applicationem ad computum expediat ipſas ſeries retinere, quo ſingulorum terminorum integralia algebraice exhiberi queant, praecipue caſibus quibus a et b non multum a ſe inuicem differunt, pono $\sqrt{(aa+cc)}=\sqrt{(bb+cc+aa-bb)}$ eritque $\sqrt{(aa+cc)}=\sqrt{(bb+cc)}+\frac{1(aa-bb)}{2\sqrt{(bb+cc)}}-\frac{1.1(aa-bb)^2}{2.4(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1.1.3(aa-bb)^3}{2.4.6(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}$ &c. Quo ſubſtituto prodibit atractio quaeſita $=$

$$\pi\left\{\begin{array}{l}
\frac{2b}{a}+\frac{b(aa-bb)}{a(bb+cc)}-\frac{1b(aa-bb)^2}{4a(bb+cc)^2}+\frac{1.3b(aa-bb)^3}{4.6a(bb+cc)^3}\\[2ex]
-\frac{2bc}{a\sqrt{(bb+cc)}}+\frac{bcc(aa-bb)}{a^3(bb+cc)}+\frac{1bc^2(aa-bb)^2}{2a^3(bb+cc)^2}-\frac{1.1bc^2(aa-bb)^3}{2.4a^3(bb+cc)^3}\\[2ex]
\qquad-\frac{bc^3(aa-bb)}{a^3(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3bc^4(aa-bb)^2}{4a^5(bb+cc)^2}+\frac{1.3bc^4(aa-bb)^3}{2.4a^5(bb+cc)^3}\\[2ex]
\qquad-\frac{b(aa-bb)}{2a(bb+cc)^{\frac{3}{2}}}-\frac{3bc^5(aa-bb)^2}{4a^5(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}+\frac{3.5bc^6(aa-bb)^3}{4.6a^7(bb+cc)^3}\\[2ex]
\qquad\qquad-\frac{1.3bc^3(aa-bb)^2}{2.4a^3(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}-\frac{3.5bc^7(aa-bb)^3}{4.6a^7(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}\\[2ex]
\qquad\qquad+\frac{1.1.3bc(aa-bb)^2}{4.2.4a(bb+cc)^{\frac{5}{2}}}-\frac{1.3.5bc^5(aa-bb)^3}{2.4.6a^5(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}\\[2ex]
\qquad\qquad\qquad+\frac{1.1.3.5bc^3(aa-bb)^3}{4.2.4.6a^3(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}\\[2ex]
\qquad\qquad\qquad-\frac{1.3.1.3.5bc(aa-bb)^3}{4.6.2.4.6a(bb+cc)^{\frac{7}{2}}}
\end{array}\right.$$

 Huius

Huius progreſſionis altera terminorum pars eſt rationalis altera irrationalis, et quemadmodum ſinguli progrediantur exceptis vnciis facile patet. Vnciae autem rationalium ita formantur quaeque ex ſuperiore, vt factor ad dextram reiiciatur, et ad ſiniſtram praecedens apponatur, ſic ex $\frac{1.3}{4.6}$ reiiciendo $\frac{3}{6}$ fit $\frac{1}{4}$ et praecedens, qui prodit minuendo tam numeratorem quam denominatorem binario, et eſt $\frac{-1}{2}$ appoſitus dat $\frac{-1.1}{2.4}$ vnciam ſequentem. Vnciae vero irrationalium ex ſuperioribus formantur ſola appoſitione ad ſiniſtram. Qua lege obſeruata, quousque libuerit hanc expreſſionem continuare licebit; termini autem, quos hic appoſuimus abunde ſufficiunt, ſi differentia inter axes ſit ſatis exigua, ſeu ellipſis circulo propinqua; pro quibus caſibus potiſſimum hoc problemate vtemur. Q. E. I.

Corollarium

Caſu ergo, quo ellipſis abit in circulum, cuius ſemidiameter eſt $= b$, ſeu quo fit $a = b$, ob omnes terminos praeter primos euaneſcentes, attractio puncti O ad centrum circuli C erit $= \pi\left(2 - \frac{2c}{\sqrt{(bb+cc)}}\right)$, prorſus vt altero modo, quo elementa circularia conſiderantur, facilius reperitur.

Problema II.

Fig. 2. Si ſphaeroides generetur conuerſione ellipſis AEBF circa ſuum axem minorem EF eiusque particulae omnes aequali vi attractiua praeditae fuerint, quae diſtantiarum quadratis reciproce ſit proportionalis, inuenire vim attractiuam corporis in polo E ſiti, verſus centrum ſphaeroidis.

So-

Solutio.

Poſito ſemiaxe minore $CE = n$, maiore $AC = m$; et abſciſſa $EP = x$, erit $PM = \frac{m}{n} \surd (2nx - xx)$. Concipiatur ſectio huius ſphaeroidis ad axem EP normalis et per P tranſiens, erit ea circulus cuius radius erit $PM = \frac{m}{n} \surd (2nx - xx)$, a quo corpuſculum in E diſtat interuallo $EP = x$. Facta ergo coroll. praec. applicatione erit ob $c = x$ et $b = \frac{m}{n} \surd (2nx - xx)$, attractio corporis in E ad hunc circulum $= \pi \left(2 - \frac{2nx}{\surd (2mmnx + nnxx - mmxx)}\right)$. Atque ad diſcum rotundum elemento $PpmM$ genitum $= 2\pi \left(dx - \frac{nxdx}{\surd (2mmnx - (mm - nn)xx)}\right)$, cuius integrale dabit attractionem portionis ſphaeroidis *ab* EPM genitae; quod vt commode exprimatur pono $(2m^2nx - (mm - nn)xx)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{m\surd 2nx} + \frac{1(mm - nn)\surd x}{4m^3n\surd 2n} + \frac{1.3(m^2 - n^2)^2 x\surd x}{4.8 m^5 n^2 \surd 2n} + \frac{1.3.5(m^2 - n^2)^3 x^2 \surd x}{4.8.12 m^7 n^3 \surd 2n} -$ etc.

Vnde integrale erit $2\pi \left(x - \frac{2nx^{\frac{3}{2}}}{3m\surd 2n} - \frac{1(mm - nn)x^2 \surd 2nx}{4.5 m^3 n} - \frac{1.3(m^2 - n^2)^2 x^3 \surd 2nx}{4.8.7 m^5 n^2} - \text{etc.}\right)$ Hincque ponendo $x = 2n$ prodibit totalis attractio ad ſphaeroides $2\pi \left(2n - \frac{4nn}{3m} - \frac{1.(mm - nn)8n^2}{4.5m^3} - \frac{1.3(m^2 - n^2)^2 16n^2}{4.8.7m^5} - \frac{1.3.5(mm - nn)^3 32n^2}{4.8.12.9.m^7} - \text{etc.}\right) = 4\pi n - 8\pi nn \left(\frac{1}{3m} + \frac{1(mm - nn)}{2.5m^3} + \frac{1.3(mm - nn)^2}{2.4.7m^5} + \frac{1.3.5(mm - nn)^3}{2.4.6.9m^7} + \text{etc.}\right.$ quae ſeries vehementer conuergit et cito verum valorum exhibet niſi ſphaeroides multum a ſphaera diſcrepet. Q. E. I.

Corollarium 1.

Si ſphaeroides abeat in globum cuius radius $= n$, fiet $m = n$ atque attractio in quoque eius ſuperficiei puncto erit $= \frac{4\pi n}{3}$ euaneſcentibus reliquis terminis omnibus;

Attractiones ergo diuerſarum ſphaerarum homogenearum in ipſis ſuperficiebus ſunt vt diametri.

Corollarium 2.

Si ſphaeroides ſit admodum propinquum ſphaerae vt differentia $m-n$ ſit quaſi infinite parua, ponatur $m=n+dz$; erit attractio in polis huius ſphaeroidis $=4\pi(\frac{n}{3}+\frac{4dz}{15}-\frac{4dz^2}{42n}+\frac{199dz^3}{945n^2}-$ etc.). Qui termini abunde ſufficiunt, ſi dz reſpectu n fuerit valde paruum.

Problema III.

Fig. 3. In praecedente ſphaeroide, quae generatur conuerſione ellipſis AEBF circa axem EF, inuenire attractionem, qua corpus ſub aequatore in A ſitum ad centrum C vrgetur.

Solutio.

Maneat vt ante $AC=m$; $CE=n$ ſitque abſciſſa $AP=x$ erit $PM=\frac{n}{m}\sqrt{(2mx-xx)}$. Per P concipiatur ſectio facta ad AB normalis quae erit ellipſis, cuius alter ſemiaxis erit $=\frac{n}{m}\sqrt{(2mx-xx)}$ alter vero $=\sqrt{(2mx-xx)}$; ad hanc ergo ellipſin quanta vi corpus in A poſitum attrahatur, determinari oportet; id quod ſubſidio primi problematis efficietur. Erit autem facta applicatione $c=x$; $b=\sqrt{(2mx-xx)}$ et $a=\frac{n}{m}\sqrt{(2mx-xx)}$ atque $\sqrt{(bb+cc)}=\sqrt{2mx}$; et $aa-bb=-\frac{(mm-nn)(2mx-xx)}{mm}$, quibus valoribus ſubſtitutis ſequens prodibit expreſſio pro attractione quaeſita in A. a ſectione elliptica per M M facta. =

π

$$\pi\begin{cases}\frac{2m}{n}-\frac{\sqrt{2mx}}{n}-\frac{(mm-nn)}{mn}-\frac{(mm-nn)^2x}{2mmn^3}\\ +\frac{(mm-nn)}{4m^2n^3\sqrt{2m}}((2mm-nn)x\sqrt{x}+2mnn\sqrt{x})\\ +\frac{(mm-nn)^2}{16m^5n^5}((3m^4-2mmnn-n^4)x^2+4mn^2(m^2+n^2)x-4m^2n^4)\\ -\frac{3(mm-nn)^2}{128m^6n^5\sqrt{2m}}((8m^4-4mmnn-n^4)x^2\sqrt{x}+4mn^2(2m^2+n^2)x\sqrt{x}-\\ \qquad 4m^2n^4\sqrt{x})\text{ etc.}\end{cases}$$

Quae expreſſio multiplicata per dx dabit attractionem corpuſculi in A ſiti ad diſcum ellipticum craſſitiei dx. Huius ergo integrale ſi ponatur $x=2m$ dabit attractionem puncti A ad totam ſphaeroidem; quae attractio ſequentem habebit valorem

$$\pi\begin{cases}\frac{4mn}{n}-\frac{2(mm-nn)}{n}\\ \frac{-8mm}{3n}-\frac{(mm-nn)^2}{n^3}\\ \qquad +\frac{4(mm-nn)}{n^3}\left(\frac{1}{5}mm+\frac{1}{15}nn\right)\\ \qquad +\frac{(m^2-n^2)^2}{2m^2n^5}\left(m^4+\frac{1}{3}m^2n^2-\frac{1}{3}n^4\right)\\ \qquad -\frac{7(m^2-n^2)^2}{m^2n^5}\left(\frac{1}{7}m^4+\frac{1}{7\cdot5}m^2n^2-\frac{1}{7\cdot5\cdot3}n^4\right)\end{cases}$$

qui reductus in ſequentem formam abit

$$\pi\left(\frac{4mn}{3n}-\frac{(mm-nn)}{5n^3}(mm+\tfrac{11}{3}nn)+\frac{(mm-nn)^2}{14m^2n^5}(m^4+\tfrac{17}{15}m^2n^2-\tfrac{29}{15}n^4)\text{ etc.}\right)$$

Q. E. I.

Corollarium

Si differentia inter m et n ſit minima ita vt ſit $m=n+dz$ erit grauitas ſub aequatore in noſtra ſphaeroide $=4\pi(\frac{n}{3}+\frac{dz}{5}-\frac{3dz^2}{35n})$, cum contra grauitas ſub polo inuenta ſit $=4\pi(\frac{n}{3}+\frac{4dz}{15}-\frac{2dz^2}{21n})$, ita vt grauitas ſub polo maior ſit parte $4\pi(\frac{dz}{15}-\frac{dz^2}{105n})$. Si ſit $n:m=100:101$ fiet grauitas ſub polo ad grauitatem ſub aequatore vt 509 ad 508.

Proble-

Problema IV.

Si planeta conſtans ex materia vniformi, cuius ſingulae particulae attrahant in ratione reciproca duplicata diſtantiarum, habeat motum vertiginis circa axem, indeque grauitas vera ſub aequatore a vi centrifuga diminuatur parte ſua $\frac{1}{k}$; inuenire eius planetae rationem inter axes per polos et aequatorem ductos.

Solutio.

Ponamus decrementum grauitatis a vi centrifuga ortum tam eſſe exiguum ratione ipſius grauitatis, vt figura planetae non multum a ſphaera diſcrepet. Si enim nulla eſſet vis centrifuga dubium non eſt, quin planeta ipſam ſphaericam figuram induere debeat. Cum ergo figura planetae tantillum a ſphaerica diſcrepet, ea pro ſphaeroide elliptica tuto haberi poterit, cuius ellipſis generantis axes non multum a ſe inuicem diſcrepent. Erit vero planeta ſolidum rotundum circa axem per polos ductum; ita vt eius figura concipi queat, tanquam ſphaerois elliptica, cuius poli cum polis planetae congruant.
Fig. 4. Sit ergo planetae figura quam quaerimus ſphaerois elliptica genita conuerſione ellipſis APBQ circa axem PQ ita vt P et Q futuri ſunt poli planetae et PC ſemiaxis planetae; et AC ſemidiameter aequatoris. Ponatur $PC = n$ et $AC = m$; et quia differentia inter hos ſemiaxes eſt valde parua ſit $m = n + dz$. Sit grauitas ſub polo $P = g$, et ſub aequatore ſi nullum haberet motum vertiginis $= \gamma$, erit per coroll. praec. $g : \gamma = \frac{n}{3} + \frac{4dz}{15} - \frac{2dz^2}{21n} : \frac{n}{3} + \frac{dz}{5} - \frac{3dz^2}{35n} = n + \frac{4dz}{5} - \frac{2dz^2}{7n} : n + \frac{3dz}{5} - \frac{9dz^2}{35n}$. Figura autem planetae ita debet eſſe comparata, vt eam planeta conſer-

ſeruare poſſet, etiamſi totus fluidus foret; quod eueniet ſi omnes preſſiones verſus centrum tam ex vi grauitatis quam vi centrifuga ortae ſeſe in aequilibrio teneant. Si ergo concipiatur tubus reflexus ACP a polo per centrum ad aequatorem pertingens; atque aqua repletus, pondus aquae in tubo AC contentae aequale eſſe debebit ponderi aquae in tubo PC contentae, ſiquidem tubus vbique eandem habeat amplitudinem. Nam ſi preſſio aquae in altero crure praeualeret, tum aqua ex altero efflueret, figuramque planetae immutaret. Preſſio vero aquae in vtroque tubo contentae habebitur, ſi ſingularum particularum pondera colligantur; quo facto vtrobique eadem ſumma emergere debebit. Ad quod praeſtandum notari debet in eodem crure grauitates ſeu niſus ad centrum eſſe diſtantiis a centro proportionales, ſi quidem figura a ſphaerica non multum differat; et ſimili modo vim centrifugam eandem retinere rationem. Quamobrem aquae in canali AC vera preſſio obtinebitur ſi eius pondus a grauitate ortum, diminuatur ſui parte $\frac{1}{k}$. Ad vtramque ergo preſſionem inueniendam conſideretur in tubo AC aquae particula $Xx = dx$, poſita $CX = x$; cuius pondus ſi in A eſſet poſita foret γdx; quod ergo ſe habebit ad pondus eiusdem particulae in ſuo loco X verſantis vt CA (m) ad CX(x). ita vt pondus huius particulae futurum ſit $= \frac{\gamma x dx}{m}$; cuius integrale $\frac{\gamma xx}{2m}$ dabit pondus columnae CX et poſito $x = m$ habebitur pondus totius columnae $AC = \frac{\gamma m}{2}$ a ſola grauitate ortum. Simili modo pondus columnae PC erit $= \frac{gn}{2}$. At inuentum pondus columnae AC ob vim centrifugam minuendum eſt ſui parte $\frac{1}{k}$, ita vt vera preſſio columnae AC deorſum futura ſit $= \frac{\gamma m}{2} \left(\frac{k-1}{k}\right)$ quae aequalis eſſe de-

bet preſſioni columnae $PC = \frac{gn}{2}$; vnde ſequens obtinetur aequatio $\gamma mk - \gamma m = gnk$. Cum vero ſit $m = n + dz$; et $g : \gamma = n + \frac{4dz}{5} - \frac{2dz^2}{7n} : n + \frac{3dz}{5} - \frac{9dz^2}{35n}$ erit ſubſtituendo $nnk + \frac{4nkdz}{5} - \frac{2kdz^2}{7} = (n + dz)(k - 1)(n + \frac{3dz}{5} - \frac{9dz^2}{35n} = n^2k + \frac{8nkdz}{5} - \frac{12kdz^2}{35} - n^2 - \frac{8ndz}{5} + \frac{12dz^2}{35}$ vnde ſequens concinnatur aequatio $\frac{4nkdz}{5} - \frac{2kdz^2}{35} = n^2 - \frac{8ndz}{5} + \frac{12dz^2}{35}$ ex qua eruitur $dz = \frac{5n}{4(k+2)} + \frac{25n(k+6)}{8(k+2)(28k^2+107k+32)}$, qui poſterior terminus ob k valde magnum facile negligitur. Erit itaque $AB : PQ = 4k + 13 : 4k + 8$. Q. E. I.

Corollarium 1.

In terra ergo noſtra, vbi vis centrifuga ſub aequatore eſt pars $\frac{1}{289}$ ipſius grauitatis, fiet $K = 289$; ideoque per regulam inuentam erit diameter aequatoris ad axem terrae vt 1169 ad 1164 hoc eſt proxime vt 234 ad 233. pro qua ratione Newton inuenit ut 230 ad 229.

Corollarium 2.

In ſuperficie ſolis ponit Newton pondus corporis cuiusque $\frac{1000}{41}$ quod in terra eſſet 1. Deinde cum ſol vertatur circa axem ſuum diebus circiter 25. eiusque diameter ſit ad diametrum terrae 10000 ad 104 erit vis centrifuga ſub aequatore ſolis $= \frac{10000}{104} \cdot \frac{1}{625} \cdot \frac{1}{289}$ ideoque erit $K = \frac{10[illegible] \cdot 625 \cdot 289}{410} = 17666$. In ſole ergo erit diameter aequatoris ad eius axem vt 14136 ad 14135.

Co-

Corollarium 3.

In Ioue ponit Newton pondus corporis, quod in terra 1 eſſet $= \frac{167}{82}$. Deinde cum Iupiter conuertatur horis 9, 56′ eiusque diameter ſit ad diametrum terrae vt 1077 ad 104 erit vis centrifuga ſub aequatore Iouis $= \frac{1077}{104} \cdot \frac{29}{5} \cdot \frac{1}{289}$. Ergo pro Ioue fit $K = \frac{167 \cdot 104 \cdot 5 \cdot 289}{82 \cdot 29 \cdot 1077} = 9\frac{4}{5}$. Vnde inuenitur diameter aequatoris Iouis ad eius axem vt 261 ad 236 hoc eſt proxime vt 10 : 9.

In his autem ponuntur corpora ſolis et planetarum horum ex materia uniformi compoſita.

D. B.

COMMENTATIONES DE IMMVTATIONE ET EXTENSIONE PRINCIPII CONSERVATIONIS VIRIVM VIVARVM, QVAE PRO MOTV CORPORVM COELESTIVM REQVIRITVR.

§. 1.

In corporibus ſimplicibus, ſiue verticaliter ſiue ſub directione quacunque variata cadentibus, velocitates acquiſitas ex ſola lapſus altitudine verticali determinari res eſt notiſſima, iſtaque proprietas extendi poteſt ad ſyſtema corporum nexu quocunque a ſe inuicem pendentium, eo qui ab aliquo tempore omnibus pariter notus eſt, modo. Iſtae quidem leges dynamicae, quas nomine conſeruationis virium viuarum deſignant, conſideratae tantum fuerunt in corporibus prope ſuperficiem terrae cadentibus, vbi viae deſcriptae pro infinite paruis haberi poſſunt ratione diſtantiae a centro terrae tamquam centro virium, verſus quod corpora terreſtria grauitate ſollicitantur, ſed tamen incredibili rerum mechanicarum ſucceſſu et incremento fuerunt conſideratae; interim non difficile admodum eſt praefatas leges extendere, atque ad plura centra virium reuocare, ita vt ad motum corporum coeleſtium definiendum, non ſine calculorum aſtronomicorum compendio, vtiliter applicari poſſint. Quae hanc in rem animum ſubierunt, breuibus calamoque feſtinante exponam.

§. 2.

§. 2. Quamuis res per ſe ſit ſatis perſpicua, quomodo pro ſimplici centro virium ſimplicique puncto graui calculus ſit ponendus, quum acceſſus ad centrum virium rationem habet finitam ad diſtantiam eius initialem, nolo tamen caſum iſtum omittere; iuuat enim ordine procedere.

Fuerit itaque centrum virium in C (Fig. 1), fueritque corpus ſimplex quieſcens poſitum in A, indeque peruenerit in punctum D viam deſcribens qualemcunque, ſuamque velocitatem a ſola grauitatis actione verſus C mutans: Ducatur centro C arcus circuli DB ſecans rectam AC in B: dico velocitatem corporis in D non aliam fore atque foret in B, cum corpus A rectam deſcribit AB.

Demonſtrationem non addo, quia facilis eſt, et tanquam corollarium patebit ex iis, quae de pluribus centris virium, ceu paullo minus obuia, demonſtrabo.

§. 3. Igitur ſi fuerit diſtantia initialis $AC = a$; DC vel $BC = x$; grauitatio in D vel B (pono enim grauitatis vim a ſola pendere diſtantia inter corpus centrumque virium) $= \xi$; velocitas in D vel $B = v$, erit $\frac{1}{2} vv = \int - \xi dx$, vbi integratio ita erit inſtituenda, vt facta $x = a$, fiat $\int - \xi dx = 0$.

§. Haec motum corporum coeleſtium propius reſpicient, ſi ponatur $\xi = \frac{mm}{xx}$, intelligendo per mm quantitatem conſtantem, hocque modo fiet $vv = \frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a}$ ſiue $v = \sqrt{(\frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a})}$ iſtamque hypotheſin, qua ponimus grauitatis vim ſequi rationem inuerſam quadratorum diſtantiarum a centro virium, in ſequentibus retinebimus.

§. 5. Ponatur iam corpus a quiete primo rectam deſcribere $AE = b$ (Fig. 2.) deinde velocitate acquiſita

$\surd\left(\frac{2mm}{a-b}\right)-\frac{2mn}{a}$) ſeu $\surd\frac{2mmb}{aa-ab}$ ſub directione ad priorem perpendiculari deſcribere ſponte curuam EDFGE, erit velocitas in D adhuc $=\surd\left(\frac{2mm}{x}-\frac{2mn}{a}\right)$: Natura autem curuae EDFGE ex eo etiam deduci poſſet, quod ducta tangente DH et ad hanc perpendiculari CH, ſit, vt notum eſt, velocitas iſti CH reciproce proportionalis : Quia vero haec iamdiu a Newtono accuratiſſime definita fuerunt, ponemus cum eo pro hac curua ellipſin ſpecie datam cuius focus alter ſit in centro virium C et quae centrum habeat in L. Hoc poſito ſi conſideretur eſſe velocitatem in E ad velocitatem in F ſicut CF ad CE, habetur ex iſta analogia theorema concinnum *quod ſit* AE(b)=CF *et* AC(a)=EF; vnde cum fuerit $v=\surd\left(\frac{2mm}{x}-\frac{2mm}{a}\right)$ ſequitur, eſſe iam $v=\surd\left(\frac{2mm}{CD}-\frac{2mm}{EF}\right)$, ex qua formula velocitates expedite habentur.

§. 6. In orbitis fere circularibus, quales planetae deſcribunt, poteſt cenſeri CD=EL+p.LC, intelligendo per p rationem coſinus anguli ECD ad ſinum totum : ſicque fit $v=\surd\left(\frac{2mm}{EL+p.LC}-\frac{2mm}{EF}\right)=$(proxime) $\surd\left(\frac{mm}{EL}-\frac{2mm.p.LC}{EL^2}\right)=\frac{m}{\surd EL}-\frac{m.p.LC}{EL\surd EL}$. Ex qua formula conſequitur, ſi velocitas minima planetae in aphelio conſtituti dicatur A, atque ſinus verſus anguli heliocentrici ECD vocetur q, fore velocitatem planetae vbique $=A+q\frac{LC}{CF}A$. Eſt itaque in vna eademque orbita incrementum velocitatis proportionale ſinui verſo anguli quem facit linea apſidum cum linea a ſole ad planetam ducta. In diuerſis autem planetis ſunt incrementa velocitatum pro ſimili poſitione in ratione directa excentricitatum et reciproca temporum periodicorum.

rum. Haec ita in orbitis planetarum ceu tantum non circularibus.

§. 7. Si orbitae ſint fere parabolicae, quales cometae faciunt, euaneſcit in formula §. 5. terminus $\frac{2mm}{EF}$, fitque ſimpliciter $v = \sqrt{\frac{2mm}{CD}}$, ſic vt velocitates proxime ſequantur rationem ſubduplicatam diſtantiarum a ſole. Conuenit haec propoſitio cum iis, quae Newtonus habet in *phil. nat. princ. math. edit. 2. p. 445.* vbi dicit, *velocitas cometae omnis erit ſemper ad velocitatem planetae cuiusuis circa ſolem in circulo reuoluentis in ſubduplicata ratione duplae diſtantiae planetae a centro ſolis ad diſtantiam cometae a centro ſolis quam proxime.* Nam ſi diſtantia planetae circulum circa ſolem facientis ſit $= s$, erit ſecundum formulas noſtras §. 5. velocitas planetae exprimenda per $\sqrt{\frac{mm}{s}}$ atque ſic habebitur $\sqrt{\frac{mm}{CD}} : \sqrt{\frac{mm}{s}} = \sqrt{2s} : \sqrt{CD}$, quae analogia propoſitionem Newtoni demonſtrat.

§. 8. Docet theorema §. 2. expoſitum, quo ſenſu principium conſeruationis virium viuarum in corpore ſimplici ſit accipiendum, quando centrum virium non infinite diſtat: Nunc vero perpendamus, quemadmodum idem principium pro ſyſtemate corporum compoſito adhiberi ſolitum pro noſtro praeſenti negotio immutandum atque extendendum ſit.

Hunc in finem obſeruabimus non dari centrum grauitatis in corpore, cuius extenſio rationem finitam habet ad diſtantiam a centro virium, ſi per centrum grauitatis intelligatur punctum, ex quo corpus ſuſpenſum in omni ſitu ad aequilibrium compoſitum eſſe debeat. Nec datur punctum ex cuius acceſſu ad centrum virium liceat definire incrementum virium viuarum, quod punctum in cor-

corporibus finitae magnitudinis et a centro virium infinite diſtantibus eſt ipſum centrum grauitatis: Erit autem conſeruatio virium viuarum pro ea, quam hucusque commentati ſumus hypotheſi grauitationis, hunc in modum accipienda.

Si nempe ſyſtema corporum quocunque nexu a ſe inuicem pendentium ſola grauitatione motum acquiſiuerit a quiete, fiet vt in quouis ſitu ſumma ſingulorum corporum per quadratum ſuae velocitatis multiplicatorum ſit aequalis ſummae omnium quantitatum $M \times (\frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a})$, intelligendo per M corpus ſeu maſſam corporis cuiusuis ad ſyſtema pertinentis, per x diſtantiam eiusdem a centro virium pro dato ſitu et per a diſtantiam ſimilem pro ſitu initiali.

Si vero grauitatio in diſtantia x generaliter ponatur ξ, erit loco quantitatis $M \times (\frac{2mm}{x} - \frac{2mm}{a})$ vbique accipienda quantitas $M \times \int -2\xi dx$. *conf.* §. 3.

Denique quum corpora non a quiete moueri incipiunt, tunc a ſingulis velocitatum quadratis modo nominatis ſubtrahenda ſunt quadrata velocitatum initialium.

Ad normam huius principii ſequens tractabimus exemplum.

§. 9. *Problema.* Sit centrum virium in C (Fig. 3.) verſus quod omnia corpora trahantur in ratione reciproca quadrata diſtantiarum et directa maſſarum: concipiatur virga rigida AB grauitatis expers, mota circa punctum fixum D: His poſitis quaeruntur in quouis virgae ſitu velocitates corporum A et B virgae adhaerentium.

So-

Solutio. Conſideretur ſtatim virga in ſitu AB, quo corpora in directum poſita ſunt cum centro virium, ſitque maſſa corporis $A = M$; maſſa corporis $B = N$; velocitas corporis $A = f$, velocitas corporis $B = \frac{BD}{AD} f$: Deinde fingatur virga perueniſſe in ſitum $A' B'$, ponaturque velocitas in $A' = v$: velocitas in $B' = \frac{BD}{AD} v$: tum centro C ducantur arcus circulares $A' E$ et $B' F$, atque ſic habetur vi ſuperioris paragraphi,

$$M \times (vv - ff) + N \times \frac{BD^2}{AD^2} \times (vv - ff) = M \times \left(\frac{2mm}{CE} - \frac{2mm}{CA}\right) + N \times \left(\frac{2mm}{CF} - \frac{2mm}{CB}\right),$$

ex qua aequatione obtinetur haec altera:

$$vv = ff + \left[M \times \left(\frac{2mm}{CE} - \frac{2mm}{CA}\right) + N \times \left(\frac{2mm}{CF} - \frac{2mm}{CB}\right)\right] : \left[M + \frac{BD^2}{AD^2} N\right].$$

§. 10. *Corollarium* 1. Si punctum fixum D ſit in ipſo corporum *gravitatis centro* communiter ſic dicto (aptius autem hic dicitur centrum inertiae) id eſt, ſi ſit $BD = M : N$, fiet

$$vv = ff + \left[M \times \left(\frac{2mm}{CE} - \frac{2mm}{CA}\right) + N \times \left(\frac{2mm}{CF} - \frac{2mm}{CB}\right)\right] : \left[M + \frac{MM}{N}\right]$$

Ducatur iam $A' P$ perpendiculariter ad AB, ponaturque $AD = a$; $CD = A$; $DP = x$, reperietur ſubducto calculo $CE = \sqrt{(AA + 2Ax + aa)}$; $CA = A + a$; $CF = \sqrt{(AA - \frac{2M}{N} Ax + \frac{MM}{NN} aa)}$; $CB = A - \frac{M}{N} a$.

§. 11. *Corollarium* 2. Velocitas minima corporum non eſt in ſitu $A'' B''$ ad ſitum AB perpendiculari, ſed quod calculus docet in ſitu tali, in quo puncta E et F coincidunt; coincidunt autem, ſi ſumitur $x = -\left(\frac{N - M}{2N}\right) \times \frac{aa}{A}$. Cadit itaque tunc punctum P infra D, ſi corpus A minus ſit corpore B, et ſit angulus ADA' recto maior.

§. 12. *Corollarium* 3. Aequatio paragraphi decimi non quidem eſt admodum prolixa; poteſt tamen ſine ſenſibili errore contrahi in caſu quo valor A admodum excedit valores a et x: caute tamen procedendum eſt, vt omnes valores inter ſe comparabiles retineantur: atque hoc modo cenſendum erit

$$\frac{1}{CE} = \frac{1}{A} - \frac{x}{AA} + \frac{3xx - aa}{2A^3},$$

$$\frac{1}{CA} = \frac{1}{A} - \frac{a}{AA} + \frac{aa}{A^3},$$

$$\frac{1}{CF} = \frac{1}{A} + \frac{Mxx}{NAA} + \frac{3MMxx - MMaa}{2NNA^3},$$

$$\frac{1}{CB} = \frac{1}{A} + \frac{Maa}{NAA} + \frac{MMaa}{NNA^3}.$$

His ſubſtitutis valoribus in aequatione paragraphi decimi, deſignatoque ſinu toto per vnitatem, ſinu anguli ADA′ per z, prodit formula praeter ſpem ſimpliciſſima

$$vv = ff - \frac{3mm}{A} \times \frac{aa}{AA} \times zz.$$

§. 13. *Coroll.* 4. Vt calculus abſolui poſſit omnibus modis, requiritur vt ambo termini in quantitatibus homogeneis definiantur; propetereaque valor ff, qui quadratum velocitatis in A exprimit, alio modo eſt deſignandus. Sumatur igitur in linea CA prolongata $DM = DC = A$ puteturque corpus verſus centrum virium C ſolicitatum delabi a quiete per altitudinem MD; ſic erit velocitas corporis in $D = \frac{m}{\sqrt{A}}$ (per §. 4.) hacque velocitate vi §. 5. circulum deſcribere poterit corpus circa centrum C. Sit nunc iſta, quam diximus, corporis velocitas ad velocitatem f vt n ad 1, eritque $nf = \frac{m}{\sqrt{A}}$ et $ff = \frac{mm}{nnA}$.

Notabimus hic, quando haec ad ſyſtema lunae applicare animus ſit, ſi C ſit centrum ſolis, B centrum terrae, A centrum lunae, poſſe tunc velocitatem $\frac{m}{\sqrt{A}}$, quam nempe

nempe corpus libere a quiete cadendo per altitudinem MD acquirit, haberi pro velocitate, quacum terra circa ſolem reuoluitur: Si vero ſtatuatur $\frac{AD}{CD} = \frac{60}{22000}$; tempus periodicum lunae 27 dierum, 7 hor, 43 min. tempus periodicum terrae 365 dier. 6 hor. 9 min. colligi inde poteſt, eſſe velocitatem terrae, circa ſolem ad velocitatem lunae circa terram vt 274 ad 10. Eſt igitur $\frac{m}{\sqrt{A}} : f = 274 : 10$; poterit igitur cenſeri $ff = \frac{100mm}{75076A}$; vnde ſi velocitas f deſignetur per 10000, erit $ff = 100000000$ et $\frac{mm}{A} = 7507600000$, ſicque fiet pro hoc inſtituto

$$vv = 100000000 - 225228000000 \times \frac{aa}{AA} \times zz,$$

Cumque ſit $\frac{a}{A}$ ſeu $\frac{AD}{CD} = \frac{60}{22000}$ atque $\frac{aa}{AA} = \frac{9}{1210000}$, fiet tandem

$$vv = 100000000 - 1675249zz,$$ ac proxime

$$v = 10000 - 84zz.$$

§. 14. *Scholium.* Haec nunc propius ad inaequalitates motuum lunarium, quatenus a diuerſis lunae cum ſole aſpectibus pendent, definiendos applicabimus. Dico itaque

I°. Decrementa velocitatum a ſtatu plenilunii ſumta proportionem ſequi quadratam ſinuum angulorum horariorum ADA′.

II°. Velocitatem lunae in ſyzygiis eſſe ad eiusdem velocitatem in quadraturis vt 10000 ad 9916: poſito enim $z = 1$ in aequatione vltima ſuperioris paragraphi, fit $v = 9916$.

Haec autem poſtquam iamiam calculo ſubieceram, animaduerti demum Newtoni prop. 26. lib. 3. qua gratum fuit intelligere, eodem plane modo vſum fuiſſe virum incomparabilem ad praefatas motuum inaequalitates

calculo ſubiiciendas, haecque noſtra ex longe diuerſiſſimis principiis, imo ab aliquibus Anglis neſcio quo fato etiamnum iniuſte obiurgatis, accuratiſſime inter ſe conuenire. Sed ex §. §. 11. et 12. ſequitur vlterius.

III°. Velocitatem minimam non eſſe exactiſſime in quadraturis, ſed paullo proprius ad nouilunium quam ad plenilunium: angulum autem horarium inter quadraturas et ſtatum minimae velocitatis eſſe fere 5′.

IV°. Velocitates non eſſe exactiſſime aequales in ſyzygiis, ſed eſſe paullo maiorem in nouilunio quam in plenilunio. Sequitur hoc ex paragrapho decimo.

§. 15. Haec omnia ita forent, ſi terra et luna circulos perfectos circa centrum commune grauitatis, et id quidem immotum, deſcriberent; hic itaque conſideramus tantum illas inaequalitates, quae a diuerſis lunae poſitionibus, oriuntur, et ad reliquas inaequalitates non attendimus, quae ab aliis oriuntur cauſis et fontibus: Et cum hae reliquae inaequalitates parum aut nihil impediunt, quo minus areae, quas luna radiis ad terram ductis temporibus aequalibus facit, ſint perpetuo aequales, Newtonus non ſine ratione loco velocitatum a me conſideratarum atque definitarum, definit areas modo memoratas, vtpote quae a reliquis cauſis vix alterantur. Reuera autem vtroque modo res eodem recidit. Magis haec illuſtrabuntur ex ſequentibus, poſtquam theorema indicauero pro conſeruatione virium viuarum aeſtimanda, quum plus quam vnum adeſt centrum virium. Iſta vero proxime.

THE-

THEOREMATVM QVORVMDAM ARITHMETICORVM DEMONSTRATIONES.

AVCTORE
L. Eulero.

Theoremata arithmetica, cuiusmodi Fermatius aliique plurima detexerunt, eo maiore attentione ſunt digna, quo magis eorum veritas eſt abſcondita, et demonſtratu difficilis. Fermatius quidem ſatis magnam talium theorematum copiam reliquit, nusquam autem demonſtrationes expoſuit, etiamſi firmiter aſſerat, ſibi de eorum veritate certiſſime conſtare. Maxime igitur dolendum eſt eius ſcripta adeo periiſſe, vt etiamnum omnes demonſtrationes ignorentur. Similis quoque eſt ratio propoſitionum in vulgus notarum, quibus neque ſummam neque differentiam duorum biquadratorum quadratum conſtituere poſſe aſſeritur; quamuis enim de earum veritate nemo dubitet, tamen nusquam extat demonſtratio, quantum mihi quidem conſtat, rigida, praeter libellum quemdam a Freniclio olim editum, cuius Titulus eſt *Traité des triangles rectangles en nombres.* Demonſtrat autem hic Autor inter alia in nullo triangulo rectangulo, cuius latera rationalibus exprimuntur numeris, aream poſſe eſſe quadratum, vnde facile veritas memoratarum propoſitionum de ſumma et differentia duorum biquadratorum deducitur. Sed iſta demonſtratio tantopere proprietatibus triangulorum eſt inuoluta,

vt niſi ſumma attentio adhibeatur, vix perſpicue intelligi poſſit. Hanc ob rem operae pretium fore arbitror, ſi harum propoſitionum demonſtrationes a triangulis rectangulis abſtraxero, easque analytice et clare propoſuero. Eo maiorem autem hoc meum inſtitutum afferet vtilitatem, quo plura alia theoremata multo difficiliora ex iis elici poſſunt. Huc ſcilicet pertinet Theorema illud celebre Fermatii, quo ſtatuit, nullum numerum trigonalem eſſe poſſe biquadratum praeter vnitatem, cuius demonſtrationem ex illis formare mihi contigit. Eo difficilior autem iſta demonſtratio videtur, cum propoſitio exceptioni ſit obnoxia, atque tantum ad numeros integros pertineat; numeris enim fractis infinitis modis effici poteſt, vt $\frac{x(x+1)}{2}$ fiat biquadratum. Ad hoc igitur aliaque nonnulla theoremata demonſtranda neceſſe erit lemmata quaedam praemittere, quibus ſequentes demonſtrationes innituntur. ante autem monuiſſe oportet, perpetuo omnes litteras mihi numeros integros deſignare.

Lemma 1.

Factum ex duobus pluribusue numeris inter ſe primis nec quadratum nec cubus nec vlla alia poteſtas eſſe poteſt, niſi ſinguli factores ſint quadrata vel cubi vel eiusmodi aliae poteſtates.

Demonſtratio huius Lemmatis facilis eſt atque ab Euclide iam eſt tradita, ita vt ſuperfluum foret eam hic exponere.

Lemma 2.

Si a^2+b^2 fuerit quadratum, atque a et b ſint numeri inter ſe primi, erit $a = pp-qq$; et $b = 2pq$, exiſtentibus p et q numeris inter ſe primis altero pari altero impari.

De-

Demonſtratio.

Quia eſt a^2+b^2 quadratum, ponatur eius radix $= a+\frac{bq}{p}$, vbi fractionem $\frac{q}{p}$ in minimis terminis pono expreſſam ita vt p et q ſint numeri inter ſe primi. Facta autem aequatione erit $a^2+b^2=a^2+\frac{2abq}{p}+\frac{bbqq}{pp}$. Vnde fit $a:b = pp-qq:2pq$. Numeri autem $pp-qq$ et $2pq$ inter ſe vel primi ſunt, vel communem habent diuiſorem 2. Illo igitur caſu, quo $pp-qq$ et $2pq$ ſunt numeri inter ſe primi, quod accidit, ſi numerorum p et q alter fuerit par alter impar, neceſſe eſt vt ſit a $= pp-qq$ et $b = 2pq$: quia a et b numeri ponuntur inter ſe primi. Caſu autem quo numeri $pp-qq$ et $2pq$ communem diuiſorem habent 2; quod erit, ſi numerorum p et q vterque fuerit impar; (vterque enim par eſſe nequit, quia inter ſe ponuntur primi), erit $a = \frac{pp-qq}{2}$ et $b = qq$. Ponatur autem $p+q = 2r$ et $p-q = 2s$, erunt r et s numeri inter ſe primi, eorumque alter par alter impar. vnde fit $a = 2rs$ et $b = rr-ss$; quae expreſſio, quia cum priore congruit, indicat ſi $aa+bb$ fuerit quadratum, et numeri a et b ſint inter ſe primi, alterum eorum eſſe differentiam duorum quadratorum inter ſe primorum, quorum alter par eſt alter impar, alterum vero numerum aequari duplici facto ex radicibus iſtorum quadratorum. Hoc eſt eſſe $a = pp-qq$ et $a = 2pq$, exiſtentibus p et q numeris inter ſe primis altero pari altero impari. Q. E. D.

Coroll. 1. Si ergo ſumma duorum quadratorum inter ſe primorum fuerit quadratum, alterum quadratum par ſit neceſſe eſt, alterum vero impar: ex quo ſequitur ſummam duorum quadratorum imparium non poſſe eſſe quadratum.

Co-

Coroll. 2. Si ergo $aa+bb$ eſt quadratum numerorum a et b, alter puta a erit impar alter b vero par. Impar vero a erit $= pp-qq$, et par $b=2pq$.

Coroll. 3. Quia porro numerorum p et q alter eſt par alter impar, erit b numerus pariter par ſeu per 4 diuiſibilis. Deinde ſi nec p nec q fuerit per 3 diuiſibilis, neceſſe eſt vt vel $p-q$ vel $p+q$ diuiſionem per 3 admittat. Vnde ſequitur alterum numerorum a et b, quorum quadratorum ſumma facit quadratum, eſſe per 3 diuiſibilem.

Coroll. 4. Cum ſit $a=pp-qq$ et $b=2pq$ ſi $aa+bb$ conſtituat quadratum, facile intelligitur numeros p et q minores eſſe quam a et b. Quoniam enim eſt $a=(p+q)(p-q)$ erit $a>p+q$ niſi $p-q$ ſit $=1$; atque ob $b=2pq$ erit b maior, quam p vel q. Potiore ergo ratione numeri a et b maiores erunt quam numeri p et q. Fieret quidem $a=0$ ſi foret $p=q$, ſed hic caſus locum non habet, quia p et q ponuntur numeri inter ſe primi, eorumque alter par alter impar.

Scholion.

In demonſtratione huius lemmatis ex analogia $a:b=pp-qq:2pq$ ideo ſequitur eſſe $a=pp-qq$ et $b=2pq$, quia a et b ſunt numeri inter ſe primi, pariter que numeri $pp-qq$ et $2pq$. Si enim fuerit $a:b=c:d$, atque tam numeri a et b quam numeri c et d ſint primi inter ſe, neceſſe eſt vt ſit $a=c$ et $b=d$; prout facile ex natura proportionum conſtat.

Lem-

Lemma 3.

Si ſuerit $aa-bb$ quadratum, exiſtentibus a et b numeris inter ſe primis; erit $a=pp+qq$ et vel $b=pp-qq$ vel $b=2pq$, vbi numeri p et q ſunt inter ſe primi, eorumque alter par alter impar.

Demonſtratio.

Quia $aa-bb$ eſt quadratum, ponatur $a^2-b^2=c^2$, eritque $a^2=b^2+c^2$, atque b et c numeri inter ſe primi. Cum igitur per coroll. 1 lemmatis praecedentis numerorum b et c alter par ſit alter impar, neceſſe eſt vt a ſit numerus impar; b vero vel par erit vel impar.

Sit primo b impar et c par; erit per lemma praecedens $b=pp-qq$ et $c=2pq$, exiſtentibus p et q numeris inter ſe primis altero pari altero impari. Hinc autem fit $a=pp+qq$. At ſi b fuerit par et c impar; erit $b=2pq$ et $c=pp-qq$, vnde denuo fit $a=pp+qq$. Quocirca ſi $aa-bb$ fuerit quadratum, erit $a=pp+qq$, atque vel $b=pp-qq$ vel $b=2pq$ Q. E. D.

Coroll. 1. Si ergo differentia duorum quadratorum eſt numerus quadratus, maius quadratum debet eſſe numerus impar, ſi quidem illa quadrata inter ſe fuerint numeri primi.

Coroll. 2. ſimili porro modo intelligitur numeros p et q minores eſſe quam numeros a et b, cum ſit $a=pp+qq$ atque b vel $=pp-qq$ vel $=2pq$.

Coroll. 3. ſi fuerit $aa-bb=cc$, vnus numerorum a, b, c ſemper per 5 diuiſibilis exiſtit. Nam cum ſit $a=pp+qq$, $b=pp-qq$ et $c=2pq$; vel alter numerorum p et q per 5 diuiſibilis eſt vel neuter; illo autem caſu fit

c diuiſibile per 5. Hoc vero caſu erunt pp et qq numeri eiusmodi formae $5n \pm 1$. ergo vel $pp-qq$ vel $pp+qq$ per 5 diuiſibile erit.

Theorema I.

Summa duorum biquadratorum vt a^4+b^4 non poteſt eſſe quadratum, niſi alterum biquadratum euaneſcat.

Demonſtratio.

In theoremate hoc demonſtrando ita verſabor, vt oſtendam ſi vno caſu fuerit a^4+b^4 quadratum, quantumuis etiam magni fuerint numeri a et b, tum continuo minores numeros loco a et b aſſignari poſſe, atque tandem ad minimos numeros integros perueniri oportere. Cum autem in minimis numeris tales non dentur, quorum biquadratorum ſumma quadratum conſtitueret, concludendum erit nec inter maximos numeros tales extare. Ponamus ergo a^4+b^4 eſſe quadratum, atque a et b inter ſe eſſe numeros primos; niſi enim primi forent, per diuiſionem ad primos reduci poſſent. Sit a numers impar, b vero par, quia neceſſario alter par alter impar eſſe debet. Erit ergo $aa = pp-qq$ et $bb = 2pq$, numerique p et q inter ſe erunt primi, eorumque alter par alter impar. Cum autem ſit $aa = pp-qq$, neceſſe eſt vt p ſit numerus impar, quia alias $pp-qq$ quadratum eſſe non poſſet. Erit ergo p numerus impar et q numerus par. Quia porro $2pq$ quadratum eſſe debet, neceſſe eſt, vt tam p quam $2q$ ſit quadratum, quia p et $2q$ ſunt numeri inter ſe primi. Vt vero $pp-qq$ ſit quadratum, neceſſe eſt, vt ſit $p = mm+nn$ et $q = 2mn$; exiſtentibus iterum m et n numeris inter ſe primis eorumque altero pari altero impari. Sed quoniam

2q

$2q$ quadratum eſt, erit $4mn$ ſeu mn quadratum; vnde tam m quam n quadrata erunt. Poſito ergo $m=xx$ et $n=yy$, erit $p=m^2+n^2=x^4+y^4$. quod quadratum pariter eſſe deberet. Hinc ergo ſequitur ſi a^4+b^4 foret quadratum, tum quoque x^4+y^4 fore quadratum, manifeſtum autem eſt numeros x et y longe minores fore quam a et b. Pari igitur via ex biquadratis x^4+y^4 denuo minora orientur, quorum ſumma eſſet quadratum, atque pergendo ad minima tandem biquadrata in integris perueniretur. Cum ergo non dentur minima biquadrata, quorum ſumma efficeret quadratum, palam eſt nec in maximis numeris talia dari. Si autem in vno biquadratorum pari alterum ſit$=0$, in omnibus reliquis paribus alterum euaneſcet, ita vt hinc nulli noui caſus oriantur. Q. E. D.

Coroll. 1. Cum igitur ſumma duorum biquadratorum non poſſet eſſe quadratum, multo minus duo biquadrata coniuncta biquadratum efficere poterunt.

Coroll. 2. Quamquam demonſtratio haec tantum ad numeros integros pertinet, tamen etiam per eam conficitur, ne in fractis quidem duo biquadrata exhiberi poſſe, quorum ſumma eſſet quadratum. Nam ſi $\frac{a^4}{m^4}+\frac{b^4}{n^4}$ foret quadratum, tum quoque in integris eſſet $a^4n^4+b^4m^4$ quadratum, quod fieri nequit, per ipſam demonſtrationem.

Coroll. 3. Ex eadem demonſtratione colligere licet, non dari eiusmodi numeros p et q, vt p, $2q$ et $pp-qq$ ſint quadrata, ſi enim tales exiſterent, tum haberentur valores pro a et b, qui redderent a^4+b^4 quadratum, foret namque $a=\sqrt{(pp-qq)}$ et $b=\sqrt{2pq}$.

Coroll. 4. Poſitis ergo $p=xx$ et $2q=4yy$ erit $pp-qq=x^4-4y^4$. Fieri ergo omnino nequit, vt x^4-4y^4 ſit

quadratum. Neque igitur $4x^4 - y^4$ quadratum eſſe poterit, ſoret enim quadratum $16x^4 - 4y^4$, qui caſus ob $16x^4$ biquadratum ad priorem recidit.

Coroll. 5. Sequitur hinc etiam $ab(a^2 + b^2)$ quadratum nunquam eſſe poſſe. Ob factores enim a, b, $a^2 + b^2$ inter ſe primos, ſingulos quadrata eſſe oporteret, quod fieri nequit.

Coroll. 6. Similiter tales etiam numeri inter ſe primi a et b non dabuntur, qui producerent $2ab(aa - bb)$ quadratum. Sequitur hoc ex coroll. 3. vbi monſtratum eſt non dari numeros p, et q, vt eſſent p, $2q$, $pp - qq$ quadrata. Haec omnia autem quoque valent pro numeris inter ſe non primis atque adeo fractis, per coroll. 2.

Theorema 2.

Differentia duorum biquadratorum vt $a^4 - b^4$ non poteſt eſſe quadratum, niſi ſit vel $b = 0$ vel $b = a$.

Demonſtratio.

Theorema hoc pari modo demonſtrabo quo praecedens. Sint igitur biquadrata iam ad minimos terminos reducta, atque ponamus $a^4 - b^4$ eſſe quadratum: erit a numerus impar, b vero vel par erit vel impar.

Caſus I. Sit primo b numerus par, erit $a^2 = pp + qq$ et $b^2 = 2pq$, exiſtentibus p et q inter ſe primis, eorumque altero p pari altero q impari. Ob $b^2 = 2pq$ debebunt ergo $2p$ et q eſſe quadrata. Quia porro $pp + qq$ ipſi a^2 aequatur, erit $q = mm - nn$ et $p = 2mn$, exiſtentibus m et n numeris inter ſe primis. Cum autem $2p$ ſit quadratum, erit $4mn$ hoc eſt mn quadratum; adeoque m

et

et n ſigillatim quadrata. Factis ergo $m=x^2$ et $n=y^2$ fiet $q=x^4-y^4$, vbi cum numerorum m et n alter ſit par alter impar, erit quoque numerorum x et y alter par alter impar. At ob q quadratum, quadratum erit x^4-y^4, vbi x erit numerus impar, y vero par. Quo circa ſi fuerit a^4-b^4 quadratum, quadratum quoque erit x^4-y^4, exiſtentibus x et y longe minoribus quam a et b. Cum ergo in minimis numeris non dentur duo biquadrata, differentiam quadratam habentia, nec in maximis dabuntur, ſaltem caſu quo minus biquadratum eſt numerus par Q. E. Vnum.

Caſus II. ſit nunc b numerus impar, eritque $a^2=pp+qq$ et $bb=pp-qq$; exiſtentibus p et q numeris inter ſe primis, eorumque altero pari altero impari. Quia vero $pp-qq$ eſt quadratum, erit p numerus impar, et propterea q par. Ductis autem a^2 et b^2 in ſe inuicem, prodibit $a^2b^2=p^4-q^4$, quae expreſſio per caſum primum quadratum eſſe ideoque ipſi a^2b^2 aequari non poteſt. Differentia ergo duorum biquadratorum nullo modo eſſe poteſt quadratum, niſi vel ambo ſint aequalia, vel minus $=0$. Q. E. Alterum Dem.

Coroll. 1. Cum ſit $a^2=pp+qq$ et $b^2=2pq$ itemque $q=mm-nn$ et $p=2mn$; atque porro $m=x^2$ et $n=y^2$; erit $a^2=(x^4+y^4)^2$ et $b^2=4x^2y^2(x^4-y^4)$. Ex quo habebitur $a=x^4+y^4$ et $b=2xy\sqrt{}(x^4-y^4.)$

Coroll. 2. Si ergo in numeris exiguis x et y darentur tales, quorum biquadratorum differentia conſtitueret quadratum; tum ex iis ſtatim multo maiores numeri eadem proprietate gaudentes a et b inueniri poſſent.

Coroll. 3. Hinc clarius perſpicitur ex caſu quo biquadrata vel ſunt aequalia, vel alterum $=0$, nouos caſus non praebere, facto enim vel $x=y$ vel $y=0$, fit ſimul $b=0$, vnde vis demonſtrationis eo magis percipitur.

Coroll. 4. Ex demonſtratione porro ſequitur non dari numeros p et q eius indolis, vt eſſent $2p$, q et $pp+qq$ quadrata. Poſito ergo $2p=4xx$ et $q=yy$, non poterit eſſe quadratum iſta forma $4x^4+y^4$.

Coroll. 5. Ex his formulis quoque ſequitur, nec $ab(aa-bb)$ nec $2ab(aa+bb)$ vnquam fieri poſſe quadrata, id quod non ſolum valet, ſi a et b ſint numeri inter ſe primi, ſed etiam ſi compoſiti atque adeo fracti. Fractiones enim eiusmodi facile ad integros, atque integri ad numeros inter ſe primos reducuntur.

Coroll. 6. In his igitur duabus propoſitionibus euictum eſt, ſequentes nouem expreſſiones nunquam fieri poſſe quadrata

I.	$a^4 + b^4$	VI.	$a^4 - b^4$
II.	$a^4 - 4b^4$	VII.	$4a^4 + b^4$
III.	$4a^4 - b^4$	VIII.	$ab(aa - bb)$
IV.	$ab(aa+bb)$	IX.	$2ab(aa+bb)$
V.	$2ab(aa-bb)$	X.	$2a^4 \pm 2b^4$

decimam expreſſionem ideo adieci, quia eius veritas mox demonſtrabitur.

Theorema 3.

Summa duorum biquadratorum bis ſumta, vt $2a^4+2b^4$ quadratum eſſe nequit, niſi ſit $a=b$.

De-

Demonſtratio.

Pono primo a et b numeros eſſe inter ſe primos, nam niſi tales eſſent, formula per diuiſionem eo reduci poſſet. Facile autem perſpicitur, vtrumque numerum a et b eſſe debere imparem, ſi enim alter par eſſet, tum fieret $2a^4+2b^4$ numerus impariter par, qui quadratum eſſe nequit. Porro haec forma congruit cum iſta $(aa+bb)^2+(aa-bb)^2$, quam ideo demonſtrari oportet quadratum eſſe non poſſe, niſi ſit $a=b$. At ob a et b numeros impares, erunt a^2+b^2 et a^2-b^2 numeri pares, ille quidem impariter, hic vero pariter par. Peruentum ergo eſt ad hanc formam $\left(\frac{aa+bb}{2}\right)^2+\left(\frac{aa-bb}{2}\right)^2$, in qua $\frac{aa+bb}{2}$ et $\frac{aa-bb}{2}$ ſint numeri inter ſe primi, ille impar, iſte vero par; quamobrem ſi forma propoſita eſſet quadratum, foret $\frac{aa+bb}{2}=pp-qq$ et $\frac{aa-bb}{2}=2pq$, vnde reperitur $a^2=pp+2pq-qq$ et $b^2=p^2-2pq-qq$. quarum expreſſionum differentia eſt $4pq=aa-bb$; ideoque erit $a+b=\frac{2mp}{n}$ et $a-b=\frac{2nq}{m}$; vnde $a=\frac{mp}{n}+\frac{nq}{m}$ et $b=\frac{mp}{n}-\frac{nq}{m}$. Facta autem hac ſubſtitutione erit $\frac{mm}{nn}pp+\frac{nn}{mm}qq=pp-qq$ atque $\frac{pp}{qq}=\frac{nn(mm+nn)}{mm(nn-mm)}=\frac{nn(n^4-m^4)}{mm(nn-mm)^2}$. Oporteret ergo eſſe quadratum n^4-m^4, quod per praecedens theorema fieri nequit Q. E. D.

Coroll. 1. Si ergo a et b fuerint numeri impares, etiam $2ab(aa+bb)$ nequit eſſe quadratum; deberent enim a, b et $2aa+2bb$ eſſe quadrata, quod per hoc theorema fieri nequit.

Coroll. 2. Demonſtratio ergo etiam formari potuiſſet ex formula nona $2ab(aa+bb)$, ſed ibi numerorum a et b alter-

alter poſitus erat par, alter impar, quod etiam ſi nihil impediret, tamen praeſtabat peculiarem dare demonſtrationem.

Coroll. 3. Hac igitur demonſtratione ipſa formulae nonae veritas magis confirmatur, cum hinc iam conſtet $2ab(aa+bb)$ quadratum eſſe non poſſe, etiam ſi numeri a et b ambo ſint impares.

Coroll. 4. Breuius vero etiam veritas huius theorematis oſtendi poteſt, ex forma $(a^2+b^2)^2+(a^2-b^2)^2$; quae ideo quadratum eſſe nequit, quia $(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2$ eſt quadratum. Fieri autem nequit, vt ſumma duorum quadratorum ſit quadratum, ſi eorundem quadratorum differentia fuerit quadratum. Si enim tam $pp+qq$, quam $pp-qq$ foret quadratum, quadratum eſſet p^4-q^4, quod fieri nequit.

Coroll. 5. Simili modo $a^4-6aabb+b^4$ quadratum eſſe nequit. Eſt enim $a^4-6aabb+b^4=(aa-bb)^2-4aabb$, quae eſt differentia eiusmodi quadratorum, quorum ſumma facit quadratum.

Coroll. 6. Atque pari modo $a^4+6a^2b^2+b^4$ quadratum eſſe nequit, quia eſt $=(a^2+b^2)^2+4aabb$, quorum quadratorum ſumma quadratum eſſe nequit, quia eorundem differentia $(a^2+b^2)^2-4aabb$ eſt quadratum.

Theorema 4.

Duplum differentiae duorum biquadratorum, vt $2a^4-2b^4$ quadratum eſſe nequit, niſi ſit $a=b$.

De-

Demonſtratio.

Ponamus a et b numeros inter ſe primos et $2a^4 - 2b^4$ eſſe quadratum, erunt a et b numeri impares. Foret ergo $2(a-b)(a+b)(aa+bb)$ quadratum, ideoque etiam eius pars decima ſexta, ſeu $(\frac{a-b}{2})(\frac{a+b}{2})(\frac{aa+bb}{2})$; qui factores cum ſint inter ſe primi, ſinguli eſſe deberent quadrata. Sit ergo $\frac{a-b}{2} = pp$ et $\frac{a+b}{2} = qq$, erit $a = pp+qq$ et $b = qq-pp$. vnde fit $\frac{aa+bb}{2} = p^4+q^4$. cum igitur q^4+q^4 quadratum eſſe nequeant, etiam $\frac{aa+bb}{2}$, ideoque $2a^4-2b^4$ quadratum eſſe nequit. Q. E. D.

Theorema 5.

Neque $ma^4-m^3b^4$ neque $2ma^4-2m^3b^4$ poteſt eſſe quadratum.

Demonſtratio.

Ponamus a et b eſſe numeros inter ſe primos, atque m numerum eſſe nec quadratum nec per quadratum diuiſibilem: ſi enim m eſſet diuiſibilis per quadratum, tum factor quadratus per diuiſionem tolli poſſet. Ponatur porro m eſſe numerum tam ad a quam b primum, erunt ob $ma^4-m^3b^4 = m(aa-mbb)(aa+mbb)$ toti factores inter ſe primi, ideoque ſinguli eſſe deberent quadrata. Facto ergo $m = pp$, deberet $(aa-ppbb)(aa+ppbb)$ eſſe quadratum, quod fieri nequit. Simili modo ob $2ma^4-2m^3b^4 = 2m(aa-mbb)(aa+mbb)$, atque factores inter ſe vel primos vel binarium pro communi menſura habentes, erit vel $2m$ vel m quadratum; priori vero caſu facto $2m = 4pp$, oporteret eſſe $a^4-4p^4b^4$ quadratum, quod

pariter fieri nequit. Sin autem $m=pp$, tum foret $2a^4-2p^4b^4$ quadratum, quod per theorema praecedens fieri nequit. At ſi m non fuerit primus reſpectu ipſius a; ponamus $m=rs$ atque $a=rc$, vbi notandum eſt r et s numeros eſſe inter ſe primos, quia m nullum factorem quadratum habere ponitur. Quadrata ergo eſſe deberent iſtae formae $r^5sc^4-r^3s^3b^4$ et $2r^5sc^4-2r^3s^3b^4$ ſeu $r^3sc^4-rs^3b^4$ et $2r^3sc^4-2rs^3b^4$.

Ob factores autem harum formularum inter ſe primos vel rs vel $2rs$ deberent eſſe quadrata, adeoque r et s vel $2s$ ſingulatim, vnde formulae orirentur, quas quadrata eſſe non poſſe iam eſt oſtenſum. Q. E. D.

Coroll. 1. Huiusmodi igitur formae $mn(m^2a^4-n^2b^4)$ et $2mn(m^2a^4-n^2b^4)$ quadrata eſſe non poſſunt, quicunque etiam numeri loco m, n, a et b accipiantur.

Coroll. 2. Si igitur $maa+nbb$ fuerit quadratum, nec $m^2naa-mn^2bb$ nec $2m^2naa-2mn^2bb$ quadrata eſſe poterunt. Atque ſi $maa-nbb$ fuerit quadratum, nec $m^2naa+mn^2bb$ nec $2m^2naa-2mn^2bb$ quadrata eſſe poterunt.

Coroll. 3. Ponamus $maa+nbb=cc$; erit $m=\frac{cc-nbb}{aa}$, quadratum ergo eſſe neque $n(cc-nbb)(cc-2nbb)$ neque $2n(cc-nbb)(cc-2nbb)$ poterit. Atque ſi fuerit $m=\frac{cc+nbb}{aa}$; tum neutra iſtarum formularum $n(cc+nbb)(cc+2nbb)$ et $2n(cc+nbb)(cc+2nbb)$ poterit eſſe quadratum.

Coroll. 4. Si ponatur $c=\pm pp+nqq$ et $b=2pq$, ſequentes obtinebuntur formulae $n(p^6\pm 6nppqq+n^2q^4)$ et $2n(p^6\pm 6nppqq+n^2q^4)$, quae nullo modo quadrata effici poterunt.

Theo-

Theorema 6.

Neque $ma^4+m^3b^4$ neque $2ma^4+2m^3b^4$ poteſt eſſe quadratum.

Demonſtratio.

Dico primo, ſi fuerit $mp^2\mp mq^2$ quadratum, tum nec mp^2+mq^2 nec $2mp^2+2mqq$ quadratum vllo modo eſſe poſſe: fieret enim vel $m^2(p^4-q^4)$ vel $2m^2(p^4-q^4)$ quadratum contra iam demonſtrata. Faciamus autem mp^2-mq^2 quadratum ponendo radicem eius $=\frac{(p-q)a}{b}$, erit $mp+mq=\frac{a^2p-a^2q}{bb}$, vnde reperitur $q=\frac{p(aa-mbb)}{a^2+mbb}$. Sit igitur $p=a^2+mb^2$, erit $q=aa-mb^2$, adeoque $p^2+q^2=2a^4+2m^2b4$. Quadratum ergo eſſe non poterit primo $mp^2+mq^2=2ma^4+2m^3b^4$; deinde $2mp^2+2mq^2=4ma^4+4m^3b^4$. Ex his colligitur neque $ma^4+m^3b^4$ neque $2ma^4+2m^3b^4$ quadratum eſſe poſſe. Q. E. D.

Coroll. In his igitur duobus theorematis euictum eſt, nullos numeros in iſtis formis $ma^4+m^3b^4$ et $2ma^4+2m^3b^4$ poſſe eſſe quadratos. In his autem formulis praecedentes omnes continentur.

Theorema 7.

FERMATIANUM.

Nullus numerus trigonalis in integris poteſt eſſe biquadratum praeter vnitatem.

Demonſtratio.

Omnis numerus trigonalis hac forma $\frac{x(x+1)}{2}$ continetur. Demonſtrandum ergo hanc formulam $\frac{x(x+1)}{2}$ nunquam eſſe poſſe biquadratum: ſiquidem loco x numeri integri ſubſtituantur, excepto caſu $x=1$. Notandum au-

tem eſt vel x eſſe numerum parem vel imparem; priori igitur caſu $\frac{x}{2}(x+1)$, poſteriori vero $x\frac{(x+1)}{2})$ eſſe debere biquadratum; in quorum factorum vtroque bini factores ſunt inter ſe primi, ideoque vterque eſſe deberet biquadratum. Sit igitur priori caſu $\frac{x}{2}=m^4$ ſeu $x=2m^4$, debebitque $x+1=2m^4+1$ eſſe biquadratum. Poſteriori vero caſu ſit $\frac{x+1}{2}=m^4$, vt ſit $x=2m^4-1$, quod itidem oportet, eſt biquadratum. Hanc ob rem biquadratum eſſe deberet $2m^4\pm 1$. Ponatur $2m^4\pm 1=n^4$, erit $4m^4=2n^4\mp 2$, deberet ergo $2n^4\mp 2$ eſſe $4m^4$ hoc eſt quadratum. Supra autem demonſtratum eſt $2a^4\pm 2b^4$, adeoque etiam $2n^4\pm 2$ nunquam quadratum eſſe poſſe praeter caſum $n=1$. Poſito autem $n=1$ fit m vel $=0$ vel $=1$; atque x vel $=0$ vel $=1$. Nullus igitur numerus integer datur, qui loco x ſubſtitutus redderet $\frac{x(x+1)}{2}$ biquadratum, praeter caſus $x=0$ et $x=1$. Quamobrem in integris nullus extat numerus trigonalis, qui eſſet biquadratus praeter vnitatem et cyphram Q. E. D.

Coroll. 1. Si ponatur $\frac{xx+x}{2}=y^4$, erit $4xx+4x+1=8y^4+1=(2x+1)^2$. Ex quo ſequitur numeris integris loco y ſubſtituendis hanc formam $8y^4+1$ nunquam eſſe poſſe quadratum, praeter caſus $y=0$ et $y=1$.

Coroll. 2. Si ponatur $8y^4+1=z^2$, fiet $16y^4=2z^2-2$. Quocirca $2z^2-2$ nunquam eſſe poteſt biquadratum; quicunque numerus integer loco z ſubſtituatur, praeter caſus $z=1$ et $z=3$.

Theorema 8.

Summa trium biquadratorum, quorum duo ſunt aequalia inter ſe, ſeu iſtiusmodi forma a^4+2b^4 quadratum eſſe nequit, niſi ſit $b=0$.

Demon-

Demonſtratio.

Ponamus a^4+2b^4 eſſe quadratum, eiusque radicem $a^2+\frac{m}{n}b^2$; vbi tam a et b quam m et n numeri erunt inter ſe primi. Facta autem aequatione erit $2n^2b^2 = 2mna^2+m^2b^2$, atque $\frac{b^2}{a^2} = \frac{2mn}{2n^2m^2}$; quae fractio vel ſimpliciſſimam iam habet, vel diuiſione per 2 ad ſimpliciſſimam erit reducibilis. Ponamus primo $2mn$ et $2n^2-m^2$ numeros eſſe inter ſe primos, quod euenit, ſi m ſit numerus impar; eritque $b^2=2mn$ et $a^2=2n^2-m^2$; hic duo euoluendi ſunt caſus, quorum alter eſt ſi n eſt numerus impar, alter ſi n eſt par; illo caſu, quo n eſt impar, manifeſtum eſt ob m etiam imparem $2mn$ fieri non poſſe quadratum. hoc vero caſu, quo n eſt numerus par, fieri nequit $a^2=2n^2-m^2$ ſeu $a^2+m^2=2n^2$, ob a et m numeros imparer, et $2n^2$ numerum pariter parem. Habeant igitur $2mn$ et $2n^2-m^2$ communem diuiſorem 2, quod accidit ſi m ſit numerus par, puta $m=2k$, eritque n numerus impar; habebitur ergo $\frac{b^2}{a^2} = \frac{4kn}{2nn-4kk} = \frac{2kn}{nn-2kk}$, vbi $2kn$ et $nn-2kk$ numeri erunt inter ſe primi. Hinc igitur ob b^2 et a^2 pariter inter ſe primos erit $b^2=2kn$ et $a^2=n^2-2kk$. At hic $2kn$ fieri nequit quadratum, niſi ſit k numerus par. Sit ergo k numerus par, atque tam n quam $2k$ debebunt eſſe quadrata; Fiat igitur $n=cc$ et $2k=4dd$, vbi erit c numerus impar, hocque facto habebitur $a^2=c^4-8d^4$. Quo igitur inueſtigemus an c^4-8d^4 poſſit eſſe quadratum, ponamus eius radicem eſſe $c^2-\frac{2p}{q}dd$. eritque $2q^2d^2=pqc^2-ppd^2$; ſeu $\frac{dd}{cc} = \frac{pq}{pp+2qq}$; vbi iterum tam c et d quam p et q ſunt numeri inter ſe primi. Hic denuo duo caſus ſunt notandi, ſiue p ſit numerus impar

ſiue par. Sit ergo primo p numerus impar; habebitur ob pq et $pp+2qq$ numeros inter ſe primos, $dd=pq$ et $cc=pp+2qq$; Neceſſe ergo eſt vt tam p quam q ſit quadratum. quamobrem pono $p=x^2$ et $q=y^2$, prodibitque $cc=x^4+2y^4$; quare ſi a^4+2b^4 eſſet quadratum, tum quoque foret x^4+2y^4 quadratum, numerique x et y vehementer erunt minores, quam a et b; ex iisque denuo minores inueniri poſſent, quod in integris fieri nequit. Pro ſecundo caſu, quo p eſt numerus par, ponamus $p=2r$, eritque $\frac{dd}{cc}=\frac{2qr}{2rr+2qq}=\frac{qr}{2rr+qq}$; et ob q imparem erunt qr et $2rr+qq$ numeri inter ſe primi. Erit ergo $dd=qr$ et $cc=2rr+qq$, quare numerorum q et r vterque debet eſſe quadratus; poſitis itaque $q=xx$ et $r=yy$, fiet $cc=2y^4+x^4$; vnde patet, ſi a^4+2b^4 eſſet quadratum, tum quoque in numeris longe minoribus fore ſimilem formam x^4+2y^4 quadratum. Quo circa a^4+2b^4 quadratum eſſe nequit, niſi ſit $b=0$. Q. E. D.

Coroll. 1. Quoniam inuenimus $\frac{b^2}{a^2}=\frac{2mn}{2n^2-m^2}$ poſito a^4+2b^4 quadrato, ſequitur $2mn(2n^2-m^2)$ quadratum eſſe non poſſe; quicunque etiam numeri loco m et n ſubſtituantur.

Coroll. 2. Factis ergo $m=x^2$ et $n=y^2$, quadratum non erit haec forma $4y^4-2x^4$. Simili modo poſito $2m=4x^2$ et $n=yy$, quadratum non erit haec forma $2y^4-4x^4$. Atque facto $m=x^2$ et $2n=4y^4$, haec formula $8y^4-x^4$ quadratum eſſe nequit.

Coroll. 3. Si generaliter fiat $m=\alpha x^2$, et $n=\beta y^2$, prodibit haec formula $2\alpha\beta(2\beta^2y^4-\alpha^2x^4)$ ſeu $4\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$, quae nullo modo quadratum eſſe poterit.

The-

Theorema 9.

Si haec forma $a^4 + kb^4$ quadratum eſſe non poteſt, tum etiam haec forma $2k\alpha\beta^3 4^4 - 2\alpha^3\beta x^4$ nullo pacto quadratum effici poterit.

Demonſtratio.

Ponamus formam propoſitam $a^4 + kb^4$ eſſe quadratum, eiusque radicem $= a^2 + \frac{m}{n}b^2$ erit $kn^2b^2 = 2mna^2 + m^2b^2$ atque $\frac{b^2}{a^2} = \frac{2mn}{kn^2 - m^2}$. Quia ergo $a^4 + kb^4$ quadratum eſſe nequit, tum etiam $\frac{2mn}{kn^2 - m^2}$ ſeu $2mn(kn^2 - m^2)$ quadratum eſſe non poterit. Fiat $m = \alpha x^2$ et $n = \beta y^2$, prodibit $2\alpha\beta(k\beta^2 y^4 - \alpha^2 x^4)$ ſeu $2k\alpha\beta^3 y^4 - 2\alpha^3\beta x^4$. quae formula propterea quadratum eſſe non poteſt; quicunque numeri ſiue affirmatiui ſiue negatiui loco α et β ſubſtituantur. Q. E. D.

Coroll. 1. Fiat ſiue α ſiue β negatiuum vt, prodeat haec forma $2\alpha^3\beta x^4 - 2k\alpha\beta^3 y^4$, atque ponatur $2\alpha^3\beta = p^2$, erit $\beta = \frac{p^2}{2\alpha^2}$, vnde illa forma tranſit in hanc $p^2x^4 - \frac{kp^6}{4\alpha^8}y^4$. Quadratum ergo eſſe nequit haec formula $x^4 - 4ky^4$ poſito $4y^4$ pro $\frac{p^4}{4\alpha^8}y^4$. Ex hac ergo formula vlterius ſequitur hanc expreſſionem $2\alpha^3\beta x^4 + 8K\alpha\beta^3 y^4$ quadratum fieri non poſſe.

Coroll. 2. Ponatur in formula inuenta $2k\alpha\beta^3 y^4 - 2\alpha^3\beta x^4$, $2k\alpha\beta^3 = pp$, vt ſit $\alpha = \frac{pp}{2k\beta^3}$: transibit illa in hanc $p^2y^4 - \frac{p^6}{4k^3\beta^8}x^4$, ex qua ſequitur $a^4 - 4kb^4$ quadratum eſſe non poſſe; vnde vt ante $2\alpha^3\beta x^4 + 8k\alpha\beta^3 y^4$ quadratum eſſe non poterit.

Coroll. 3.

Coroll. 3. Si ergo a^4+kb^4 quadratum eſſe nequit, tum nec haec formula $2k\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$ nec haec $\alpha^3\beta x^4+k\alpha\beta^3y^4$ quadratum eſſe poterit: quae poſterior ex corollariis praecedentibus ſequitur ſcribendo 2α loco α.

Coroll. 4. Cum igitur a^4+b^4 non poſſit eſſe quadratum, ſequentes binae formulae $\alpha^3\beta x^4+\alpha\beta^3y^4$ et $2\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$ quadrata eſſe omnino non poterunt.

Coroll. 5. Atque quia a^4-b^4 quadratum eſſe non poteſt, orientur hae duae nouae formulae $\alpha^3\beta x^4-\alpha\beta^3y^4$ et $2\alpha^3\beta x^4+2\alpha\beta^3y^4$, quae nullo modo quadrata reddi poſſunt.

Coroll. 6. Quoniam denique a^4+2b^4 quadratum eſſe nequit, iſtae quoque formulae $\alpha^3\beta x^4+2ab^3y^4$ et $4\alpha\beta^3y^4-2\alpha^3\beta x^4$ non poterunt effici quadrata.

Scholion.

Ex iis igitur, quae hactenus demonſtraui, prodierunt ſex ſequentes formulae generaliores, quae nullo modo in quadrata transmutari poſſunt.

I.	$\alpha^3\beta x^4+\alpha\beta^3y^4$	IV.	$2\alpha^3\beta x^4-2\alpha\beta^3y^4$
II.	$\alpha^3\beta x^4-\alpha\beta^3y^4$	V.	$2\alpha^3\beta x^4+2\alpha\beta^3y^4$
III.	$\alpha^3\beta x^4+2\alpha\beta^3y^4$	VI.	$2\alpha^3\beta x^4-4\alpha\beta^3y^4$

Atque in his ſex formulis omnes continentur, quas in praecendentibus formulis tractauimus. Ex his autem formulis poſſent, vt iam ante feci, formulae trinomiales elici, quas aeque certum eſſet, quadrata neutiquam reddi poſſe; ſed iis exhibendis ſuperſedeo, ad alia nonnulla theoremata progreſſurus, quae circa cubos verſantur, atque ex iſtis formulis expediri nequeunt.

Theo-

Theorema 10.

Nullus Cubus, ne quidem numeris fractis exceptis, vnitate auctus quadratum efficere poteſt, praeter vnicum caſum, quo cubus eſt 8.

Demonſtratio.

Propoſitio ergo huc redit, vt $\frac{a^3}{b^3}+1$ nunquam eſſe poſſit quadratum, praeter caſum quo $\frac{a}{b}=2$. Quocirca demonſtrandum erit hanc formulam a^3b+b^4 nunquam fieri poſſe quadratum, niſi ſit $a=2b$.

Haec autem expreſſio reſoluitur in iſtos tres factores $b(a+b)\ (aa-ab+bb)$ qui primo quadratum conſtituere poſſunt ſi eſſe poſſet $b(a+b)=a^2-ab+bb$, vnde prodit $a=2b$, qui erit caſus, quem excepimus. Pono autem, vt vlterius pergam, $a+b=c$, ſeu $a=c-b$, qua facta ſubſtitutione habebitur $bc(cc-3bc+3bb)$, quam demonſtrandum eſt quadratum eſſe non poſſe, niſi ſit $c=3b$; ſunt autem b et c numeri inter ſe primi. Hic autem duo occurrunt caſus conſiderandi prout c vel multiplum eſt ternarii vel ſecus: illo enim caſu factores c et $cc-3bc+3bb$ communem diuiſorem habebunt 3, hoc vero omnes tres inter ſe erunt primi. Sit primo c non diuiſibile per 3, neceſſe erit, vt ſinguli illi tres factores ſint quadrata, ſcilicet, b, et c, et $cc-3bc+3bb$ ſeorſim. Fiat ergo $cc-3bc+3bb=(\frac{m}{n}b-c)^2$, erit $\frac{b}{c}=\frac{3nn-2mn}{3nn-mm}$ vel $\frac{b}{c}=\frac{2mn-3nn}{mm-3nn}$, cuius fractionis termini erunt primi inter ſe, niſi m ſit multiplum ternarii; ſit ergo m per 3 non diuiſibile, erit vel $c=3nn-mm$ vel $c=mm-3nn$; et vel $b=3nn-2mn$, vel $b=2mn-3nn$. At cum $3nn-mm$ quadratum eſſe nequeat, ponatur $c=mm-3nn$, quod quadratum fiat radicis

$m-\frac{p}{q}n$. hincque oritur $\frac{m}{n}=\frac{3qq+pp}{2pq}$, atque $\frac{b}{nn}=\frac{2m}{n}-3=\frac{3qq-3pq+pp}{pq}$. Quadratum ergo eſſet haec formula $pq(3qq-3pq+pp)$, quae omnino ſimilis eſt propoſitae $bc(3bb-3bc+cc)$ et ex multo minoribus numeris conſtat. At ſit m multiplum ternarii, puta $m=3k$, erit $\frac{b}{c}=\frac{nn-2kn}{nn-3kk}$; vnde erit vel $c=nn-3kk$ vel $c=3kk-nn$; quia autem $3kk-nn$ quadratum eſſe nequit, ponatur $c=nn-3kk$, eiusque radix $n-\frac{p}{q}k$, vnde fiet $\frac{n}{k}=\frac{3qq+pp}{2pq}$; ſeu $\frac{k}{n}=\frac{2pq}{3qq+pp}$; atque $\frac{b}{nn}=1-\frac{2k}{n}=\frac{pp+3qq-4pq}{3qq+pp}$. Quadratum ergo eſſe deberet $(pp+3qq)(p-q)(p-3q)$. ponatur $p-q=t$ et $p-3q=u$, erit $q=\frac{t-u}{2}$ et $p=\frac{3t-u}{2}$, illaque formula abit in hanc $tu(3tt-3tu+uu)$ quae iterum ſimilis eſt priori $bc(3bb-3bc+cc)$. Reſtat ergo poſterior caſus, quo eſt c multiplum ternarii, puta $c=3d$; atque quadratum eſſe debet $bd(bb-3bd+3dd)$, quae cum iterum ſimilis ſit priori, manifeſtum eſt vtroque caſu euenire non poſſe, vt formula propoſita ſit quadratum. Quamobrem praeter cubum 8, alius ne in fractis quidem datur, qui cum vnitate faciat quadratum. Q. E. D.

Coll. 1. Simili modo demonſtrari poteſt nullum cubum vnitate minutum eſſe poſſe quadratum; hocque ne quidem in fractis.

Coroll. 2. Hinc ſequitur nec x^6+y^6 nec x^6-y^6 eſſe poſſe quadrata: atque nullum numerum trigonalem eſſe cubum praeter vnitatem.

COM-

COMMENTATIONES DE STATV AEQVILIBRII CORPORVM HVMIDO INSIDENTIVM.

A. Daniele Bernoulli.

§. 1.

Duplicis ſunt generis quaeſtiones, quarum examen Cel. Eulerus noſter de hocce argumento mihi etiam atque etiam commendauit, commendatumque pro amicitia noſtra ſimul ac iuſtiſſima mea in Academiam obſeruantia lubens ſuſcepi: alterae ſtatum aequilibrii concernunt, alterae motus oſcillatorios, quum corpora ſibi relicta ſemel ſtatum aequilibrii amiſerunt: Hac vero praeſenti diſſertatiuncula genus primum complectar, alterumque in proximam reſeruabo occaſionem.

§. 2. Corpus fluido immerſum vrgetur duabus potentiarum claſſibus ſibi inuicem contrariis; claſſis prima oritur a grauitate ſingularum corporis partium, poteſtque ſumma potentiarum conſiderari tanquam vnita in corporis centro grauitatis ibidemque corpus verticaliter deorſum premens; claſſis altera oritur ab actione fluidi, poteſtque ſumma potentiarum conſiderari in centro grauitatis partis ſubmerſae vnita, ſi haec pars ſubmerſa eſſet homogenea. (huiusmodi centrum grauitatis, cuius ſaepe erit mentio facienda, deinceps vocabo *centrum grauitatis homogeneae*) Haec claſſis poſterior priori aequalis eſt ſed contraria et corpus verticaliter ſurſum vrget.

§. 3. Si corpus ita fluido inſideat, vt ambo praefata centra grauitatis ſint in vna eademque linea verticali, tunc patet corpus in aequilibrio poſitum fore: verum huiusmodi aequilibrii ſtatus non ſunt eiusdem indolis: datur aequilibrium firmum et ſtabile, et datur aequilibrium, vt ita dicam, labile, non ſecus atque ſi conus rectus homogeneus baſi ſua tabulae horizontali inſiſtat, aequilibrium adeſt firmum, ſi vero vertice ſuo tabulae ita inſiſtat, vt axem habeat verticalem, aequilibrium ipſius dici poteſt labile. Situs aequilibrii firmi pro ratione corporis eſt modo vnus modo plures; pro altero autem aequilibrio ſunt plerumque ſitus infiniti; ſed vis minima tunc corpus ex ſitu ſuo deiicit, nec corpus ceſſante vi illa in ſitum priſtinum redit, quo ambo aequilibrii ſitus ab inuicem diſtinguuntur; minima quidem vis quaeuis corpora etiamſi in aequilibrio firmo poſita aliquantillum nutare facit, ſublata autem vi corpus rurſus ad ſitum naturalem tendit, niſi nutatio certos quosdam terminos transgreſſa fuerit. Iſta vero omnia pro aequilibrio firmo accuratius perpendere atque geometrice definire conſtitui.

§. 4. Notabimus itaque ante omnia, quoties corpus fluido inſidens a ſitu ſuo aequilibrii vel minimum perturbatum, eundem repetit, partis ſubmerſae centrum grauitatis homogeneae continue locum mutare, quod cum ita ſit, ne in ipſo limine obſcurior fiam, nutationem corporis per omnes gradus intermedios primo ponam fieri in plano vno eodemque, quod tranſeat per centrum grauitatis totius corporis et per partis ſubmerſae centrum grauitatis homogeneae, vbi in ſitu aequilibrii fuit; vel potius loco corporum prius tantum plana vtcunque grauia humido verticaliter

ticaliter inſidentia conſiderabimus, planumque inclinationis conſtanter eſſe in ipſo plano graui ponemus: Tum etiam totius plani centrum grauitatis ſitum mutat, dum modo eleuatur modo deprimitur; motum vero horizontalem nullum habere poteſt, quia planum ſola grauitate fluidi atque ſolidi, quae vbique verticaliter agit, deprimi aut eleuari quidem poteſt, potentiae autem horizontales in omnes plagas ſe deſtruunt; niſi enim ſe deſtruerent, planum perpetuo in eadem directione progrederetur. Iam vero incipiam exponere, quomodo firmitas aequilibrii dignoſcenda ſit.

§. 5. Sit ſuperficies fluidi MQ, cui inſideat planum graue EFG (fig. 1. et 2.) huiusque centrum grauitatis ſit in A, partis vero ſubmerſae centrum grauitatis homogeneae ſit in B; ſitque recta AB verticalis. Putetur nunc planum relinquere ſitum hunc aequilibrii, atque inclinari ſiue verſus partem M, vt in figura prima, ſiue ad partem oppoſitam Q, vt in figura ſecunda, aſſumto ſitu *efg*: ſintque pro hoc altero ſitu centra grauitatis praefata in *a* et *b*: His ita conſtitutis, apparet ex §. 2. potentiam concipiendam eſſe applicatam in puncto *a*, planum verticaliter deorſum trahentem et ponderi plani aequalem, aliamque potentiam in *b* priori aequalem et planum verticaliter ſurſum trahentem: Manifeſtum autem eſt pro vtraque figura a concurſu harum potentiarum fore, vt planum ad priſtinum ſitum EFG tendat, atque in hoc conſiſtit natura aequilibrii firmi.

Si vero poſt plani ſitum mutatum, partis ſubmerſae centrum grauitatis homogeneae perueniſſet ad alterum latus lineae AB, (quod fieri poteſt, quando punctum A altius poſitum eſt quam punctum B) tunc planum non tendit

 ad

ad priſtinum ſitum, quin magis ab eo recedere conatur, hocque ſi ita fuerit, poſita nutatione plani minima, tunc aequilibrium ſitus EFG firmum dici non poteſt.

§. 6. Ex dato ſitu *efg* determinari facile poteſt, vbi et quaenam ſint potentiae applicandae, vt planum in iſto ſitu violento detineatur: ſumantur nempe in plano *efg* duo puncta ad libitum, veluti *a* et *r*, quibus potentiae applicatae ſint, nempe ponduſcula *p*, P mediantibus trochleis T, S funiculisque *r*T*p*, *a*SP haeque potentiae planum inſitu *efg* detineant: His poſitis quaeritur natura potentiarum: Statim vero liquet 1° directiones *r*T, *a*S fore in plano *efg*; 2° conſtituendas eſſe horizontales, ne planum magis minusue immergatur: 3° ponendas eſſe ſub directione contraria aequales, quia alias, vt iam monui, planum vt nauis a vento perpetuo propelleretur.

Sunt igitur nunc plano oblique poſito quatuor potentiae applicatae in diuerſis punctis: ponatur vero potentia in *a* aut *r* applicata $= x$; maſſa ſiue pondus plani $=$ M; et fingatur punctum quodcunque, circa quod quatuor iſtae potentiae planum rotare conentur; quia enim potentiae in aequilibrio ſunt, oportet vt vbicunque punctum rotationis eſſe putes, ſint ſemper ratione illius puncti potentiae in aequilibrio poſitae: ponatur compendii cauſa punctum rotationis in *a* ſiue in centro grauitatis plani et reperietur per notiſſimas ſtaticae leges, ducta prius horizontali *bc*,

$$x = \frac{bc}{AR} \times M$$

pono AR pro *ar*, quas angulum infinite paruum facere intelligendum eſt, quaſi diſtantia RT eſſet infinita; atque eadem expreſſio oritur, vbicunque potentiae *p*, P applicatae putentur et vbicunque punctum rotationis eſſe fingatur:

tur: Valet igitur talis analogia: vt diſtantia verticalis punctorum, quibus potentiae planum declinantes applicantur, ad lineam bc, ita pondus plani ad potentiam altervtram horizontalem planum in ſitu violento detinentem.

§. 7. Quum potentiae P, P ad datam inuariatam diſtantiam applicantur verticalem, erunt potentiae datum planum vtcunque inclinantes ſimpliciter proportionales lineis $b\,c$, id eſt, diſtantiis horizontalibus centrorum grauitatis homogeneae in parte ſubmerſa a verticali A B. Igitur cum fuerit pro minima inclinatione lineola bc negatiua, aequilibrium non reſtituetur, indicio non fuiſſe firmum: ſi bc fit affirmatiua, firmum eſt aequilibrium; et tum eo firmius eſt dicendum, quo maior eſt $b\,c$ pro eodem inclinationis angulo.

Apparet etiam, cum planum continue magis inclinatur auctis potentiis P, P alicubi lineam $b\,c$ maximam fore, tuncque adeſſe vltimum inclinationis gradum poſſibilem, planumque alium aequilibrii firmi ſitum eſſe petiturum, niſi potentia planum declinans diminuatur.

§. 8. Quum itaque rei totius cardo vertatur in hoc vt pro quouis plani ſitu centrum grauitatis homogeneae in parte ſubmerſa determinetur, huc animum applicabimus, duosque formabimus caſus? *primus* erit, cum angulus nutationis eſt admodum paruus, qui nobis pro oſcillationibus minimis definiendis deinceps inſeruiet; *ſecundus* cum angulus inclinationis eſt qualiscunque magnitudinis datae: prior pro omnibus planis determinationem admittit, alter vero pro quouis plano ſpeciali calculo eſt definiendus, niſi ad quantitates differentiales ſignaque ſummatoria recurrere velimus. Incipiam a primo, cuius duplicem ſolutionem dabo vel potius ſolutionis methodum indicabo.

§. 9.

§. 9. Poſtquam planum ex ſitu EFG peruenit in ſitum *e f g* ; hanc mutationem motu duplici factam fuiſſe conſiderari poteſt ; altero verticali parallelo (quo ſingulae partes eleuatae fuerint per altitudinem aequalem altitudini A *a* et ratione cuius motus pars plani ſic emergatur, quae ſit $=$ F G × A *a*) altero rotatorio , quo totum planum circa centrum grauitatis gyretur ; et ambo motus hanc mutuam inter ſe relationem habere debent , vt in vtroque plani ſitu EFG et *efg* pars aequalis extra aquam emineat : Reſpectu motus rotatorii circa centrum grauitatis notandum eſt , ab eo fieri , vt ſpatiolum minimum triangulare , quod extra aquam ante rotationem eminuit , ſubmergatur , aliudque prius ſubmerſum emergatur : differentia adeoque horum triangulorum facienda eſt aequalis praefato ſpatiolo FG×A*a*. Tum ex momentis horum triangulorum (quorum alterum generatum alterum deſtructum fuit) ſupputanda eſt mutatio loci , quam partis ſubmerſae centrum grauitatis homogeneae ſubiit, poſteaque inquirendum, quantam viam idem punctum B horizontaliter deſcribat, dum planum circa centrum grauitatis A vel *a* rotatur : Ex hisce et ex dato minimo angulo inclinationis plani poterunt definiri lineolae A *a*, B *c* atque *b c*, quae omnes pro rei diuerſitate modo affirmatiuae modo negatiuae eſſe poſſunt.

Idem aliter et quidem breuius hunc in modum erui poteſt. Quoniam pars plani aequalis extra aquam eminere debet in omni plani ſitu , biſecabimus lineam F G in puncto H , circa quod rotationem minimam fieri intelligemus : hoc equidem modo obtinetur , vt ante et poſt rotationem aequale ſpatium extra aquam emineat , ſed centrum grauitatis A ſic lineam verticalem AB relinquit: igitur

igitur poſt rotationem totum planum cenſendum eſt moveri motu parallelo horizontali donec punctum A redierit in lineam verticalem AB; tumque rurſus inquirendum, quamnam mutationem ex motu vtroque punctum B ſubeat immediate et quamnam ſimul patiatur a momento vtriusque trianguli.

Vtroque modo calculum feci, nec diuerſi prodierunt valores; inueni nempe poſito ſinu toto $= 1$, atque ſinu anguli minimi inclinationis $= \alpha$, fore

$$A\,a = HN \times \alpha$$
$$B\,c = HN \times \alpha$$
$$b\,c = \left(AB + \tfrac{FG^3}{12M}\right)\alpha.$$

§. 10. Ex formulis praecedentis paragraphi ſequentia corollaria deduxiſſe e re noſtra erit.

Primo. Quia $Aa = Bc$, erit $AB = ac$, ſiue differentiale altitudinis $AB = 0$; ergo in ſitu aequilibrii comparato cum ſitu alio plani quocunque, eſt diſtantia inter ambo grauitatis centra ſemper maxima vel minima, et quidem maxima in ſitu aequilibrii firmi, minima in ſitu aequalibrii labilis, vti mox demonſtrabo.

Secundo. Si planum ex ſitu violento *e f g* ſibi relictum in ſitum naturalem iterum peruenit, vis viua generata fuit, quae eſt $= M \times a\,A - M \times c\,B$ (namque centrum grauitatis plani, cuius maſſa $= M$, deſcendit per altitudinem *a* A ſimulque conſiderandum eſt partes fluidi homogenei, cuius maſſa rurſus $= M$, ita locum mutaſſe vt centrum grauitatis earum aſcenderit per altitudinem B *c*) Poſſet igitur ex eo, quod $M \times aA - M \times cB = 0$, colligi vim viuam poſt libere recuperatum ſitum plani nullam fuiſſe ortam, quod ſi foret, tempus reſtitutionis infinitum requireretur. Verum hic probe notandum eſt, in disqui-

 ſitione

ſitione aſcenſuum verticalium A*a* et B*c*, neglectas fuiſſe quantitates prae aliis infinite paruas, quod tunc fieri poterat; quando vero agitur de differentia horum minimorum aſcenſuum, illae quantitates amplius negligi non debent; et tunc inuenitur, ſi recte omnia perficiantur,

$$Aa = HN \times \alpha + (AN + \tfrac{FG^3}{12M}) \tfrac{1}{2}\alpha\alpha,$$
$$Bc = HN \times \alpha + BN \times \tfrac{1}{2}\alpha\alpha.$$

Ergo iam vis viva plani a reſtitutione ſua in ſitum naturalem EFG acquiſita fit $= (\frac{FG^3}{12} + AB \times M) \frac{1}{2}\alpha\alpha$: atque hunc eundem vis viuae valorem alio modo longe, imo plane, diuerſo obtinui, ita vt haec omnia rectiſſime ſibi reſpondeant: Demonſtrationem ampliorem huius rei non addo, nimis fere a lineolarum exiguitate perplexam et intelligentibus attentisque facile ex praemiſſis deducendam; ipſam tamen propoſitionem apponere volui, quia motum oſcillatorium, de quo proxima vice agere conſtitui, illuſtrat. Caeterum quia ſic oritur $Aa - Bc = (AN - BN + \frac{FG^3}{12M}) \frac{1}{2}\alpha\alpha$ $= (AB + \frac{FG^{3\prime}}{12M}) \frac{1}{2}\alpha\alpha =$ (per §. 9.) $bc \times \frac{1}{2}\alpha$, erit A*a*—B*c* affirmatiua, ſi fuerit *bc* affirmatiua ratione ipſius α quod fit in aequilibrio firmo, ſed ſi fuerit *bc* negatiua ratione ipſius α, quod fit in aequilibrio labili, erit A*a*—B*c* negatiua. Id indicat, decreſcere altitudinem AB (quamuis quantitate infinite parua ſecundi ordinis) ſi ex ſitu aquilibrii firmi paululum deturbetur, atque creſcere ſi planum fuerit in ſitu aequilibrii labilis poſitum: ergo altitudo AB in priori caſu maxima eſt, minima in altero, cuius rei demonſtrationem ſupra promiſeram.

§. 11. Redeamus nunc vnde digreſſi ſumus. Vidimus §. 6. potentiam alterutram planum in ſitu violento detinentem eſſe $= \frac{bc}{AR} \times M$: ſit nunc arbitraria AR = ſinui

toti

toti $=1$, erit ſubſtituto pro bc valore §. 9. inuento, quaevis potentia planum horizontaliter trahens $=$

$$(AB \times M + \tfrac{1}{12} FG^3)\alpha.$$

§. 12. Igitur quamdiu AB eſt affirmatiua, quum nempe plani centrum grauitatis humilius poſitum eſt, quam partis ſubmerſae centrum grauitatis homogeneae, aequilibrium ſemper eſt firmum; ſed ſequitur porro, poſſe aequilibrium firmum eſſe, etiamſi AB ſit, negatiua, quando nempe quantitas AB×M minor eſt quam $\frac{1}{12}$ FG^3.

§. 13. Apparet etiam tria eſſe, quae conferant ad ſitum aequilibrii firmiorem reddendum: 1° altitudo partis ſubmerſae centri grauitatis homogeneae ſupra centrum grauitatis plani; 2do pondus totius plani ſiue magnitudo partis ſubmerſae 3° potiſſimum plani latitudo, quae a ſuperficie aquae terminatur: Singula tria in triremibus praeſertim, quarum ſubuerſio lateralis magis quam praegrauium nauium bellicarum timenda erat, egregie obſeruantur, imprimis ratione requiſiti tertii, cum latera triremis inſigniter protuberare et foras exſurgere incipiunt, vbi ſuperficiei maris proxima ſunt. Quod vero hactenus experientia circiter praeſtantiſſimum indicauit, id nunc vera inuenta theoria etiamnum magis perfici poſſe, non dubito, quamuis ſimul perſpiciam, praecepta accuratiſſima pro architectura nautica ſiue nauium conſtructione dari non poſſe, quia nimia nimisque diuerſa ſunt requiſita.

§. 14. Deſcendamus nunc ad exempla particulariora. Sit primo bacillus rectus, cuius craſſities ratione longitudinis pro nullis haberi poſſint, quae autem inter ſe comparatae ſint vna cum denſitatibus materiae vtcunque inaequales.

In hoc exemplo eſt FG $=0$ (niſi bacillus ſit praeciſe horizontaliter poſitus) ſitque potentia baculum inclinans (§. 11.) $= AB \times M \times \alpha$. Duos tantum bacillus habet ſitus naturales ſiue aequilibrii firmi, verticalem ſi ſit punctum A infra B et horizontalem ſi ſecus fuerit.

§. 15. Habeatur planum quadratum aequaliter craſſum et vbique homogeneum idque in ſitu verticali poſitum, quod fieri intelligi poteſt mediantibus duobus parietibus verticalibus, parallelis et valde propinquis intra quos planum contineatur. Sint grauitates aquae et plani ſpecificae vt m ad n et ponatur quadratum ita aquae immerſum vt habeat duo latera verticalia totidemque horizontalia: quaeriter firmitas iſtius ſitus.

Sit latus quadrati $= 2a$; erit FG $= 2a$; AB $= \frac{na}{m} - a$; M $= \frac{4naa}{m}$; habeturque adeo firmitas iſtius ſitus $= (\frac{4nn}{mm} - \frac{4n}{m} + \frac{2}{3})a^3\alpha$; quae quantitas vel affirmatiua erit vel negatiua, adeoque aequilibrium vel firmum vel non tale pro ratione grauitatum ſpecificarum: atque ſi praefata quantitas ponatur $=0$, quaeraturque valor n, habebuntur limites pro aequilibrio firmo. Sit igitur $\frac{4nn}{mm} - \frac{4n}{m} + \frac{2}{3} = 0$, ſiue $n = \frac{m}{3 \pm \sqrt{3}}$; hoc indicat aequilibrium quadrati ſubmerſi firmum fore, quamdiu grauitas ſpecifica plani eſt extra terminos $\frac{m}{3+\sqrt{3}}$ et $\frac{m}{3-\sqrt{3}}$, at vero ſi ſit maior quam $\frac{m}{3+\sqrt{3}}$ et ſimul minor quam $\frac{m}{3-\sqrt{3}}$, aequilibrium non erit firmum.

Exemplum hoc afferre volui, quia id allegauit Cl. problematis Auctor in epiſtola ad patrem meum data. Equidem celebris iſte Geometra non tam de quadrato graui quam de cubo loquitur: verum in hoc caſu res eodem recidit, vt infra, cum de corporibus ſermo erit, oſtendam.

Si

Si pro dato fluido datoque quadrati latere ſumatur eius grauitas ſpecifica dimidia alterius, erit firmitas inter omnes negatiuas maxima, id eſt, tunc planum paululum inclinatum maximam vim requirit, vt ab vlteriori ſubuerſione coerceatur, quod idem dicendum, ſi pro inuariato plano ſumatur grauitas ſpecifica fluidi tripla alterius.

§. 16. Iam vt etiam paucis attingam caſum alterum, quo angulum inclinationis a ſitu naturali cuiuscunque magnitudinis finitae eſſe ponimus, eidem exemplo quadrati homogenei et aequaliter craſſi inſiſtam ſimulque breuitatis cauſa (nam calculi alias ſunt oppido prolixi) grauitates ſpecificas fluidi et ſolidi ponam vt 2 ad 1. ſic inito calculo reperietur potentia P, quadratum ad angulum inclinans, cuius ſinus $= \alpha$, $= \frac{2\alpha\alpha - 1}{3\alpha\alpha + 3} \times a^3\alpha$: haec autem potentia ſemper eſt negatiua, quia non poteſt ſumi α maior quam $\sqrt{\frac{1}{2}}$, quin alterutrum latus ſubito totum emergat ſicque lex continuitatis ſubuertatur. Sed haec allata potentia quae negatiua eſt ratione vnius ſitus aequilibrii fit affirmatiua reſpectu alterius ſitus, qui eſt pro aequilibrio firmo, quo nempe diagonalis quadrati eſt verticaliter poſita: ſi poſitio quadrati ad hunc alterum ſitum referatur, tunc per α intelligendus eſt ſinus complementi anguli inclinationis ad ſemirectum ſiue ſinus exceſſus anguli ſemirecti ſuper angulum inclinationis. Hoc autem ſenſu diagonalis ita inclinari poteſt, vt ad hanc inclinationem maxima vis requiratur: nempe cum ſit $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{57} - 7)}$ id eſt cum diagonalis verſus horizontem inclinatur ad angulum 23°, 17′, eſtque tunc potentia quadratum in iſto ſitu detinens cirrciter quadrageſimam octauam partem ponderis totius quadrati, ſi nempe applicata ſit potentia ad

diſtantiam verticalem a centro grauitatis aequalem ſemilateri quadrati.

§. 17. Haec de planis. Supereſt vt agamus de corporibus humido inſidentibus: Patet autem, ſi pro tali corpore ſumatur priſma rectum ſuper baſi EFG conſtitutum atque ex ſtratis ſimilibus compoſitum, fore tunc, vt omnia de corporibus valeant, quae hactenus de planis commentati ſumus. Quid autem erit de corporibus admodum irregularibus? ſtatus aequilibrii rurſus erit, cum corporis centrum grauitatis et partis ſubmerſae centrum grauitatis homogeneae ſunt in vna eademque linea verticali conſtituta: aequalibrium iſtud firmum eſſe poteſt ratione vnius plagae, minus firmum ratione alius plagae imo et labile: Igitur potentiae corpus declinantes in ſitum alium definiri non poſſunt, niſi ſitus iſte alius ſit ex omni parte datus atque definitus.

§. 18. Tum vero inſeruiet ad propoſitum tale lemma: „Si habeatur ſuperficies quaecunque plana ducaturque „linea quaecunque per ſuperficiei centrum grauitatis homo„geneae, erunt ſolida quae ab ambabus ſuperficiei partibus „circa lineam iſtam ſimul rotatis generantur inter ſe aequa„lia atque adeo etiam aequales inter ſe erunt cunei ſolidi „ſub angulis vtrinque aequalibus.

§. 19. Sit nunc corpus quodcunque, cuius pars fluido immerſa putetur FEGH (fig. 3.) ſitque in ſitu aequilibrii poſitum. Sit porro F*b*G*b* ſectio corporis in plano ſuperficiei aquae: huius ſectionis centrum grauitatis homogeneae ſit in O; ducaturque per O recta *bb* talis, vt in ſitu proximo corporis haec linea *bb* ſitum habeat parallelum; datur itaque poſitio lineae *bb*, quia datur corporis

ſitus

ſitus proximus, a quo definitur planum nutationis quod nempe ad lineam *bb* erit perpendiculare, ita vt ſectiones ſigulae corporis ad lineam *bb* perpendiculares (cuiusmodi eſt ſectio FEGLF, quam per corporis centrum grauitatis tranſire pono) maneant in eodem plano, poſt mutatum corporis ſitum.

His praenotatis apparet calculum nunc fere ponendum eſſe, vt in §. 9. et quidem parte poſteriori, vbi breuior fit, fecimus: Conſiderabimus nimirum corpus rotari ad angulum infinite paruum ſuper axe *bb* (hoc enim modo vi lemmatis §. 19. ſatisfit hypotheſi, quod pars ſolidi ſubmerſa in vtroque ſitu ſit eiusdem magnitudinis, quia cuneus poſt rotationem minimam emerſus aequalis eſt cuneo ſubmerſo. Deinde alteri hypotheſi (corporis ſcilicet centrum grauitatis durante ſitus mutatione in eadem manere linea verticali) ſatisfaciemus, ſi putemus corpus poſt minimam rotationem promoueri motu horizontali parallelo et ad axem *bb* perpendiculari, donec corporis centrum grauitatis in lineam verticalem AB, quam a rotatione paululum deſeruit, redierit. Tum ſi ponamus in ſitu aequilibrii centra grauitatis ſaepe nominata in A et B, indaganda erunt loca, in quae haec centra poſt vtrumque motum, rotatorium et paralellum, incidant. Tandemque etiam inquirendum eſt, quomodo mutetur locus centri grauitatis homogeneae in parte ſubmerſa a momentis cunei vtriusque immerſi et emerſi. Ex his omnibus reperietur punctum *b*, vbi partis ſubmerſae centrum grauitatis homogeneae poſt mutatum corporis ſitum ponimus. Ex puncto *b* ductam intelligemus rectam *bc* ad productam AB perpendicularem. Sit nunc ſinus totus rurſus $=1$, ſinus anguli inclinationis corporis (qui eſt ipſe angulus minimus rotationis quam fieri intelleximus ſuper axe *bb*)

$=a$:

$= \alpha$: ponamus etiam in hac rotatione partes a latere FbbF immergi et in latere oppoſito GbbG emergi: Sit HN in ſectione plani verticalis FEGL per centrum grauitatis A tranſeuntis et plani horizontalis FbGb, producaturque verticalis AB vsque in N. ſic inuenietur (vt in fine §. 9.) $Aa = HN \times \alpha$, ſimulque $Bc = HN \times \alpha$: Verum lineola bc ſic determinabitur. Ponamus centrum grauitatis homogeneae cunei FbbF in π cuneique oppoſiti in γ, deinde ducamus $\pi\Phi$ parallelam lineae bb et $\gamma\Phi$ perpendicularem ad $\pi\Phi$: tumque vocemus maſſam corporis totius ſiue magnitudinem partis ſubmerſae M; magnitudinem alterutrius cunei μ; dico fore $bc = AN \times \alpha - BN \times \alpha + \frac{\mu}{M} \times \Phi\gamma = AB \times \alpha + \frac{\mu}{M} \times \Phi\gamma$. Vt vero valor iſte aliter exprimatur, ſumatur in axe bb punctum quoduis r, per quod deinde ducatur pq perpendicularis ad bb: ponatur $br = x$; $rp = y$; $rq = z$: ſic facto calculo inuenietur $\mu = \frac{1}{2}\alpha \int yy\,dx$, ſiue etiam, quia bb tranſire ponitur per ſuperficiei FbGb centrum grauitatis homogeneae, erit $\mu = \frac{1}{2}\alpha \int zz\,dx$: Ita quoque reperietur $\Phi\gamma = \Phi\lambda + \lambda\gamma = \frac{2\int y^3 dx + 2\int z^3 dx}{3\int yy\,dx}$: eſt igitur $\mu \times \Phi\gamma = \frac{1}{3}\alpha \int y^3 dx + \frac{1}{3}\alpha \int z^3 dx$. Iſtoque valore ſubſtituto, inuenietur

$$bc = \left(AB + \frac{\int y^3 dx + \int z^3 dx}{3M}\right) \times \alpha.$$

§. 19. Atque ſic demum cognoſcitur ſitus puncti b in plano FEGL verticali et per centrum grauitatis A tranſeunte. Si nunc concipiamus duas potentias in directione plani FEGL horizontales, aequales et contrarias, alteram applicatam vt antea §. 11. in centro grauitatis, alteram in diſtantia verticali, quae ſit $= 1$, et ſi quaeramus quantae iſtae potentiae eſſe debeant, vt impediant corpus, ne in plano FEGL ſitum mutet priſtinumque ſitum aſſumat, erit vi §. §. 6. et 10. vnaquaeuis harum potentiarum $= (AB \times M + \frac{1}{3}\int y^3 dx + \frac{1}{3}\int z^3 dx)\alpha$. Cae-

Caeterum haec omnia ſupponunt, ſuperficiem aquae corpus ita ſecare, vt a minima ſitus mutatione, nullae oriantur in ſectione F*b*G*b* mutationes ſubitaneae atque finitae magnitudinis.

§. 20. Verum notetur nunc porro, poſt corporis ſitus mutationem in ſolo plano FEGL, partis ſubmerſae centrum grauitatis homogeneae in eodem hoc plano ſic quidem rectiſſime fuiſſe determinatum: fieri autem vt praefatum centrum ſimul planum FEGL deſerat perpendiculariter perueniatque ex puncto *b* in punctum ϐ, ita vt ſit *b*ϐ parallela lineae *bb* aut $\pi\Phi$: eritque $b\text{ϐ} = \frac{\mu}{M}\times\pi\Phi$. Propter hanc receſſionem *b*ϐ, fit vt aliis duabus potentiis horizontalibus itidem aequalibus et contrariis opus ſit ad corpus in ſitu hoc violento dato detinendum: atque hae potentiae poſitae eſſe debent in plano verticali ad planum FEGL perpendiculari, ſique diſtantia verticalis harum potentiarum rurſus fuerit aequalis ſinui toti 1, erit quaeuis potentia $= \mu\times\pi\Phi$.

§. 21. Cum animus ſit in ſequentibus motus oſcillatorios corporum humido inſidentium explicare atque definire, conueniet hic in anteceſſum monuiſſe, quod ſi omnes quatuor praefatae potentiae corpus in ſitu violento detinentes ſimul euaneſcant, duplices inde oſcillationes oriturae ſint, alterae in plano FEGL, alterae in plano perpendiculari, haeque oſcillationes in diuerſis planis minime futurae ſint tautochronae, ita vt motus inde compoſitus appariturus ſit admodum perturbatus nullique legi conſtanti ſubiectus; imo nec vnius eiusdemque claſſis oſcillationes inter ſe ſemper erunt iſochronae. Iſta omnia ſuo loco accurate trademus: nunc vero ea, quae de firmitate aequilibrii pro

corporibus qualibuscunque commentati ſumus, duobus illuſtrabimus exemplis.

§. 22. Habeatur cylindrus rectus homogeneus, cuius grauitas ſpecifica ſit ad grauitatem ſpecificam fluidi, vt n ad m: ſit altitudo cylindri $= a$; radius baſeos $= b$, ſitque axis cylindri fluido immerſi verticalis: quaeritur firmitas aequilibrii ſeu potius potentia corpus ad angulum minimum declinans. Ponatur ratio inter circumferentiam circuli et radium, vt c ad 1: erit hic ſectio $FbGb$ circulus, transibitque linea bb per centrum huius circuli, eritque adeo $\int y^3 dx = \int z^3 dx$; vnde potentia quaeſita (per §. 19.) eſt $= (AB \times M + \frac{2}{3}\int y^3 dx)\alpha$. Eſt autem porro nunc $AB = -\frac{1}{2}a + \frac{n}{2m}a$; $M = \frac{nc}{2m}abb$, ſitque $\int y^3 dx = \int (2bxdx - xxdx)\sqrt{}(2bx - xx) = \frac{3b^4c}{16}$, ſi poſt integrationem ponatur $x = 2b$: ſubſtitutis his valoribus fit potentia quaeſita $= (\frac{nnc}{4mm}aabb - \frac{nc}{4m} + \frac{b^4c}{8})\alpha$.

Ex hac formula inter plurima alia corollaria deduci hoc meretur, quod ſi altitudo cylindri maior ſit quam $\frac{mb}{\sqrt{(mn - 2nn)}}$, tunc cylindrus ſemper ſit ſitum verticalem relicturus, ſi minor, eundem ſitum ſit ſeruaturus, huius corollarii veritatem ob rei facilitatem experimento confirmaui.

§. 23. Proponatur nunc conus rectus homogeneus, cuius altitudo $= a$, radius baſeos $= b$, manentibus poſitionibus caeteris ſuperioris paragraphi: ſitque conus aquis ita immerſus vt baſis extra aquam emineat ſitque axis coni verticalis; quaeritur rurſus huius aequilibrii firmitas.

Hic eſt $AB = -\frac{3}{4}a + \frac{3}{4}a\sqrt[3]{\frac{n}{m}}$; $M = \frac{nc}{6m} \times abb$; $\int y^3 dx$ ſiue $\int z^3 dx = \frac{3nb^4c\sqrt[3]{n}}{16m\sqrt[3]{m}}$, hisque valoribus ſubſtitutis fit firmitas ſitus $= (\frac{nc}{8m}aabb\sqrt[3]{\frac{n}{m}} - \frac{nc}{8m}aabb + \frac{nb^4c}{8m}\sqrt[3]{\frac{n}{m}})\alpha$.

Ex-

Exinde ſequitur rurſus fore aequilibrium iſtud firmum, ſi fuerit altitudo coni minor, quam $\pm bV\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{m}-\sqrt[3]{n}}$; ſecus aequilibrium non ſubſtiturum: atque hunc etiam firmi aequilibrii terminum experimento confirmaui.

§. 24. Haec ſunt praecipua, quae de aequilibrii firmitate corporum humido inſidentium dicenda habui. Mentem quidem plurima alia ſubierunt; eſt enim argumentum, ſi quod aliud, fertiliſſimum geometrarumque attentione, ſi recte iudico, digniſſimum: Nunc vero plura addere non vacat: plura fortaſſe dabo, cum plus temporis a negotiis aliis vacabit: interim non vereor affirmare, methodum noſtram hisce paginis expoſitam recte perpenſam, paucis mutatis, nullibi eſſe defecturam noua de iſto argumento meditantem.

SOLVTIO PROBLEMATIS CVIVSDAM A CELEB. DAN. BERNOVLLIO PROPOSITI

A. L. Euler.

§. 1.

In poſtremis litteris, quas Cel. Daniel Bernoulli ad me dedit Baſilea d. 24 Maii huius anni, mentionem fecit alicuius problematis, in quod occaſione alicuius Problematis mechanici incidiſſet. Quaerebat autem inter omnes curuas iſoperimetricas iisdem terminis contentas eam in qua $\int r^m ds$ haberet maximum minimumue valorem; denotantibus s arcum curuae, r vero eius radium osculi. Nunciat vero Vir Celeb. ſimul, ſe duplicem ſolutionem eſſe nactum, ad quarum alteram ponendo elementum arcus ds, ad alteram autem ponendo elementum abſciſſae dx conſtans perueniſſet: at ambas haſce ſolutiones ita eſſe comparatas, vt inter ſe non conſpirare videantur. Caſu quidem quo $m = 1$ hanc mihi perſcripſit aequationem a ſe inuentam, $ds = \frac{2rdr}{\sqrt{(g+4nr-4rr)}}$ qua curuae natura exprimatur. Sin autem inter omnes omnino curuas quaereretur ea, in qua eſſet $\int rds$ minimum, ſe inueniſſe ſcribit, fore $r=0$, cum tamen ego iam ante Ipſi ſcripſiſſem cycloidem huic quaeſtioni ſatisfacere eamque ſolam. Hanc ob rem me rogauit, vt problema hoc pariter aggrederer, ſolutionemque quam fuero conſecutus, ſecum communicarem.

§. 2. Ac primo quidem intuitu iſtud problema in ampliſſimo problemate iſoperimetrico, cuius plures ſolutiones

tiones a Viris acutiſſimis Bernoulliis, Hermanno ac Tayloro ſunt traditae, contineri videtur: Sed qui ipſam huius problematis ſolutionem aggredietur, ex methodis iſtis, quas nominati Viri reliquerunt, vix quicquam vtilitatis aſſequetur; cuius rei ratio eſt, quod in formula $\int r^m ds$, quae minima eſſe debet, differentialia ſecundi gradus inſint, ob radium oſculi r; memoratae vero methodi ad alias formulas non ſint accommodatae, niſi quae ex differentialibus primi gradus reſpectu coordinatarum orthogonalium conſiſtant; omnem enim formulam, quae maxima minimaue eſſe debet, ante ad huiusmodi coordinatas orthogonales reduci oportet, quam reſolutio ſuſcipiatur. Mihi vero ſolutio huius problematis ſtatim non difficilis eſt viſa, cum ante biennium circiter nouam atque peculiarem methodum eſſem adeptus, omnia huius generis problemata reſoluendi, quae ad differentialia primi generis non erat adſtricta, ſed ad cuiuscunque gradus differentialia patebat. Quam methodum meam etiamſi iam protulerim, tamen non incongruum viſum eſt, eam ad problema hoc a Celeb. Bernoullio propoſitum accommodare, eiusque beneficio ſolutionem deſideratam eruere, cum vt Viri Clariſſimi deſiderato ſatisfacerem, tum etiam, vt methodi meae vis et praeſtantia euidentius perſpiciatur.

§. 3. Problema autem propoſitum in duas partes diſtribui conueniet, in quarum priore inter omnes omnino curuas iisdem terminis contentas eam inueſtigabo, in qua $\int r^m ds$ minimum omnium obtineat valorem: quae quaeſtio, etiamſi a Celeb. Bernoullio non videatur eſſe propoſita, tamen praecipue hic tractari meretur. Nam quae curua inter omnes prorſus curuas iisdem terminis contentas

 deſi-

deſiderata maximi minimiue proprietate gaudet, eadem etiam hac praedita erit proprietate inter omnes curuas aequelongas. In altera autem problematis parte infinitas curuas intra eosdem terminos ſitas contemplabor, quae omnes inter ſe longitudine ſint aequales, atque exhis ſolum curuis eam determinabo, in qua $\int r^m ds$ minimum valorem ſit habiturum, quae quidem quaeſtio cum propoſita penitus congruit. In priore igitur problemate inter datos terminos abſolute ea curua inueſtigatur, in qua ſit $\int r^m ds$ minmum, in poſteriore vero inter eosdem terminos curua datae longitudinis deſideratur, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis et iisdem terminis contentas hac gaudeat praerogatiua, vt $\int r^m ds$ minimam obtineat quantitatem. Ex quo perſpicuum eſt priori quaeſtioni vnicam ſatisfacere poſſe curuam, poſteriori vero innumerabiles, pro infinita longitudinis varietatae, quae curuae quaeſitae praeſcribi poteſt.

§. 4. Fundamentum, quo vtriusque problematis ſolutio nititur, ex methodo mea iam expoſita huc redit: Si poſitis abſciſſa $=x$; applicata $=y$, inter omnes curuas iisdem terminis comprehenſas ea requiratur, in qua formula quaecunque integralis maximum minimumue induere debeat valorem; tum, cuiuscunqne gradus differentialia in ea formula integrali inſint, dummodo integralia non implicantur, ponatur $dy=pdx$; $dp=qdx$; $dq=rdx$; $dr=sdx$; etc. Quo facto formula illa integralis ad eiusmodi formam reducetur $\int Zdx$, in qua Z erit functio quantitatum x; y; p; q; r; s etc. Deinde quantitas Z differentietur; ſitque $dZ=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq+Rdr+Sds+$ etc. Hinc formetur valor quidam V ſumendo $V=N-\frac{dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\frac{d^4S}{dx^4}-$ etc. poſito dx conſtante. Hoc denique pacto pro formula

formula integrali propoſita inuento eiusmodi valore V ponatur V $=$ o haecque aequatio praebebit naturam curuae quaeſitae. At ſi non inter omnes omnino curuas, ſed inter eas tantum, in quibus vna pluresue formulae integrales aequalem obtinent valorem ea deſideretur, in qua alia quaepiam formula integralis maximum minimumue habitura ſit valorem, tum ſingulae formulae integrales praeſcripto modo tractentur, atque vniuscuiusque valor respondens V eruatur, hocque facto ſinguli iſti valores V per quantitates conſtantes quascunque multiplicati coniungantur, nihiloque aequales ponantur: ex qua aequatione natura curuae quaeſitae elicietur.

§. 5. His praemiſſis quaeſtionem priorem, quam ex problemate propoſito formaui aggredior, atque inter omnes curuas iisdem terminis contentas eam definiam, in qua ſit $\int r^m ds$ minimum. In hanc finem ſumta recta quacunque pro axe, ſit abſciſſa $= x$, et applicata $= y$; erit $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, atque poſito dx conſtante habebitur $r = \frac{ds^3}{dx\,ddy}$. Cum autem fieri debeat $dy = pdx$; et $dp = qdx$; erit $ds = dx\sqrt{(1 + pp)}$ et $ddy = qdx^2$, vnde prodit $r = \frac{(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{q}$, ac formula integralis, quae minima eſſe debet, fiet $= \int \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}} dx}{q^m}$. Habebitur ergo $Z = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ hincque porro $dZ = \frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}} p\,dp}{q^m} - \frac{m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}} dq}{q^{m+1}}$, quae expreſſio cum ſuperiore vniuerſali comparata

parata dat $M=0$; $N=0$; $P=\frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}p}{q^m}$; $Q=\frac{-m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^{m+1}}$; $R=0$; $S=0$; etc. Quocirca habebitur $V=\frac{-dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}$; atque pro curua quaeſita prodibit iſta aequatio: $0=\frac{-dP}{dx}+\frac{ddQ}{dx^2}$; quae integrata dat $Adx=-Pdx+dQ$.

§. 6. Antequam autem loco P et Q debitos valores ſubſtituam, ſecundam integrationem perficere tentabo, in ſubſidium vocando aequationes $dp=qdx$ et $dZ=Pdp+Qdq$. Subſtituto vero $\frac{dp}{q}$ loco dx, aequatio inuenta tranſit in hanc $Adp=-Pdp+qdQ$, haecque denuo ob $Pdp=dZ-Qdq$ in iſtam: $Adp=-dZ+Qdq+qdQ$ cuius integralis eſt $Ap+B=-Z+Qq$. Nunc tandem ſubſtitutionibus vtar, obtineboque propter $Z=\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ et $Qq=\frac{-m(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ mutatis ſignis conſtantium A et B hanc aequationem $Ap+B=\frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$ quae ducta in dx ob $y=\int pdx$ et integrata ſuppeditabit iſtam aequationem $Ay+Bx=(m+1)\int\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}dx}{q^m}=(m+1)\int r^m ds$, ex qua perſpicitur eam curuam eſſe habituram $\int r^m ds$ minimum, in qua ſit $\int r^m ds=Ay+Bx$. Quoniam autem axe vtcunque mutato r et s non mutantur, ita axis accipiatur vt $Ay+Bx$ abeat vel in ſolam abſciſſam vel ſolam applicatam: quod cum fieri liceat ſine vlla reſtrictione vel A vel B

poni

poni poterit $=0$. Quamobrem pro curua quaeſita habebitur vel iſta aequatio $Ax=(m+1)\int r^m ds$ vel $Ay=(m+1)\int r^m ds$.

§. 7. Quo homogeneitas quantitatum obſeruetur ponam $A=a^m$, atque iſta vtar aequatione $a^m x=(m+1)\int r^m ds$, ex qua penitius in curuae naturam inquiram. Optime autem curuae ſatisfacientis indoles cognoſcetur ex aequatione inter duas variabiles tantum, cuiusmodi aequationem duplici modo exhiberi licet, altero inter variabiles r et s, per quam aequationem natura ipſius curuae ſine vllo ad quempiam axem reſpectu habito deſignatur; altero modo autem inter variabiles x et y aequatio indicabitur quae tum ad curuae conſtructionem tum ad cognitionem qualis ſit, eſt maxime accommodata. Priore modo aequatio inter r et s reperietur, dum x ex aequatione $a^m x=(m+1)\int r^m ds$ vel ex eius differentiali $a^m dx=(m+1)r^m ds$ eliminabitur; id quod hoc modo praeſtabitur; cum $\frac{dx}{ds}$ poſito ſinu toto $=1$ ſit ſinus arcus, cuius differentiale eſt $\frac{ds}{r}$, erit $\frac{dx}{ds}=$ ſin. arcus $\int\frac{ds}{r}$, quo valore ſubſtituto iſta habebitur aequatio a^m ſin. arcus $\int\frac{ds}{r}=(m+1)r^m$ ac loco $\frac{a^m}{m+1}$ ſcripto c^m, erit $\int\frac{ds}{r}=$ arcui cuius ſinus eſt $\frac{r^m}{c^m}=\int\frac{mr^{m-1}dr}{\sqrt{(c^{2m}-r^{2m})}}$. Sumtis ergo differentialibus erit $ds=\frac{mr^m dr}{\sqrt{(c^{2m}-r^{2m})}}$ atque capiendo integralia habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio $s=m\int\frac{r^m dr}{\sqrt{(c^{2m}-r^{2m})}}$ qua arcus ex dato radio oſculi determinatur.

§. 8. Ad aequationem autem inter coordinatas orthogonales x et y eliciendam adhibeo aequationem ſupra inuentam, in qua etiamnum p et q continentur, quae huc redit $A^m q^m = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}$. Haec autem porro reducitur ad hanc $Aq = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}$, quarum quidem vtraque ad curuam conſtruendam ſufficere poſſet, cum duae tantum inſint variabiles p et q. Quia autem eſt $qdx = dp$, habebitur $Adp = (1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}} dx$ ſeu $dx = \frac{adp}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$. Deinde ob $dy = pdx$, erit $dy = \frac{apdp}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$ vnde integrando obtinetur $y = \frac{-ma}{(m+1)(1+pp)^{\frac{m+1}{2m}}} + b$; hincque $\frac{ma}{(m+1)(b-y)} = (1+pp)^{\frac{m+1}{2m}}$. Fiat $\frac{ma}{m+1} = -c$, et ponatur $b = 0$, quia hoc pacto amplitudo aequationis nihil reſtringitur, habebiturque $\frac{c}{y} = (1+pp)^{\frac{m+1}{2m}}$, atque $1+pp = \frac{c^{\frac{2m}{m+1}}}{y^{\frac{2m}{m+1}}}$; ex quo fit $p = \frac{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}})}}{y^{\frac{m}{m+1}}}$. Cum nunc ſit $dx = \frac{dy}{p}$ orietur aequatio pro curua quaeſita inter coordinatas x et y iſta $x = \int \frac{y^{\frac{m}{m+1}} dy}{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}})}}$ atque in ea erit $\int r^m ds = \frac{(m+1)^m}{m^m} c^m x$.

Cur-

Curua igitur quaeſita erit algebraica, quoties fuerit vel $m = \frac{1}{2i}$ vel $m = \frac{-1}{2i+1}$, denotante i numerum integrum affirmatiuum quemcunque.

§. 9. Caſus hic nonnulli particulares ſeorſim conſiderari merentur, quorum primus eſto ſi $m = -1$, ſeu quo curua deſideratur, in qua $\int \frac{ds}{r}$ ſit maximum minimumue. Hoc autem caſu ob $m + 1 = 0$ in omnibus aequationibus inuentis accidit incommodum, vt iudicium difficile videatur. At attentius rem conſideranti patebit, hunc caſum ne quidem ad quaeſtionem de maximis et minimis pertinere, cum $\frac{ds}{r}$ integrationem admittat, exiſtente $\int \frac{ds}{r}$ arcu circuli cuius ſinus eſt $\frac{dx}{ds}$; adeo vt $\int \frac{ds}{r}$ non ad totam curuam pertineat, ſed ex poſitione extremi curuae elementi reſpectu axis aſſumti pendeat. Alter caſus eſt quo $m = 0$, ſeu quo curua quaeſita minima eſſe debet inter ſuos terminos. Hic facillime cognoſcetur ex aequatione $A^m q^m = (1 + pp)^{\frac{3m+1}{2}}$ quae poſito $m = 0$ praebet $p =$ conſt. vnde intelligitur huic caſui lineam rectam ſatisfacere. Denique attendamus ad caſum $m = 1$, quo curua quaeritur, quae inter omnes alias habeat $\int r\, ds$ minimum. Pro hac autem curuā reperitur iſta aequatio $x = \int \frac{dy \surd y}{\surd (c - y)} = \int \frac{y\, dy}{\surd (cy - yy)}$, ex qua manifeſtum eſt curuam ſatisfacientem eſſe cycloidem, cuius cuspis in altero termino dato collocatur; et baſis in ipſum axem incidit. Fiet autem $\int r\, ds = 2cx$; vnde intelligitur quaeſtioni maxime ſatisfieri, ſi eiusmodi cyclois eligatur, cuius binae cuspides in ambos terminos praescriptos incidant.

§. 10. Atque hactenus quidem minimi valoris tantum mentio eſt facta, qui expreſſioni $\int r^m ds$ ſit concilian-

 dus

dus, cum tamen methodus adhibita etiam maximum, ſi quod habetur, indicet. Si enim m, vti feci, tanquam numerus affirmatiuus conſideretur, $\int r^m ds$ maximum habebit valorem, ſi ſit $r = \infty$, lineaque quaeſita recta, qui caſus maximi cum ſponte innoteſcat illo inueniendo ſuperſedendum cenſui, etiamſi is quoque ex aequatione inuenta

$$Ap + B = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$$

fluat, faciendo A et B infinite magna; quo caſu fit $p =$ conſtanti. Contra vero accidit, ſi m fuerit numerus nihilo minor, huicque quaeſtioni recta ſemper ita ſatisfacit, vt ſit $\int r^m ds$ minimum, quippe $= 0$; curuae igitur, quas pro his caſibus aequationes inuentae ſuppeditant ita ſunt comparatae, ut in iis ſit $\int r^m ds$ maximum. Ita ſi ponatur $m = -2$ curua reperietur quae inter omnes iisdem terminis contentas ſit habitura $\int \frac{ds}{r^2}$ maximum non minimum. Curua autem iſta hac continebitur aequatione $x = \int \frac{y^2 dy}{\sqrt{(c^4 - y^4)}}$, ex qua intelligitur curuam ſatisfacientem eſſe elaſticam ad axem orthogonalem, ſeu cuius tangentes in punctis flexus contrarii ſint inter ſe parallelae, atque normales ad axem, in quo abſciſſae x capiuntur. Erit autem $\int \frac{ds}{r^2} = \frac{4x}{c^2}$.

§. 11. In his autem lineis curuis, quae problemati ſatisfacere ſunt inuentae, parodoxon euenit, quod in aliis huius generis problematis vſu venire non ſolet. Cum enim axis, in quo abſciſſae capiuntur, reſpectu duorum praeſcriptorum terminorum, per quos curua tranſire debet, poſitione aliter non determinetur, niſi quod per alterum terminum tranſire debeat; infinitis modis parameter curuae c accipi poterit, ita vt curua per alterum terminum tranſeat,

eat, id quod fiet axi debitam poſitionem tribuendo. Quamobrem ſolutio inuenta innumerabiles continet curuas problemati ſatisfacientes, cum tamen vnica ſatisfacere videatur; namque vel in his omnibus curuis $\int r^m ds$ eundem valorem obtinet, quod tamen non accidit, vel ſecus, quo caſu ea, in qua $\int r^m ds$ erit vel maximum vel minimum problemati ſola ſatisfacere cenſenda eſt. Ita caſu $m = 1$, pro quo cyclois eſt inuenta, cuius cuspis in altero termino ſit poſitus, parameter cycloidis ſeu magnitudo circuli generatoris non definitur, quaecunque enim cyclois aſſumatur, ea ita poterit conſtitui, vt quoque per alterum terminum tranſeat. At facile colligire licet, ex quo minore circulo cyclois generetur, eo minorem quoque fore $\int r ds$; ita vt huic quaeſtioni ſtricte acceptae ea cyclois maxime ſatisfaciat, quae a circulo minimo ſeu infinite paruo ſit nata; cuiusmodi curua, etſi a recta differre non videatur tamen maxime diſcrepat; eo quod longitudine eſt diuerſa, atque vbique radium osculi habet infinite paruum.

§. 12. Cum igitur ſolutio huius problematis, prout id quidem eſt propoſitum, innumeras praebeat curuas, concludendum eſt, ipſum problema non ſatis eſſe determinatum, eique inſuper vnam conditionem adiungi poſſe, qua etiam quantitas parametri ſeu quantitatis conſtantis c, quae in aequatione pro curua inuenta $x = \int \frac{y^{\frac{m}{m+1}} dy}{\sqrt{(c^{\frac{2m}{m+1}} - y^{\frac{2m}{m+1}})}}$ ineſt, determinetur. Eiusmodi autem conditio duplex adiungi poterit, quarum altera ex amplitudine curvae non incongrue deſumetur; aeſtimatur autem amplitudo curuae ex angulo, quem tangentes curuae in terminis praeſcriptis, per quos

 cur-

curua tranſire debet, inuicem conſtituunt. Ex quo ſolutio inuenta huic problemati ſatisfaciet, quo inter omnes curuas eiusdem amplitudinis per data duo puncta tranſeuntes, ea requiritur, quae habeat $\int r^m ds$ maximum minimumue. Vel loco amplitudinis curuae in problemate propoſito tertium quodpiam punctum praeſcribi poteſt, per quod curua quaeſita ſimul transeat; hac enim conditione adiecta pariter quantitas indefinita c determinabitur. Problema igitur ita proponatur, vt inter omnes curuas per tria data puncta tranſeuntes ea definiatur, in qua eſſet $\int r^m ds$ maximum vel minimum. Vtrouis autem modo problema proponatur, ex ſolutione vnica curua reperietur quae omnium maxime ſetisfaciet. Quemadmodum igitur, ſi in formula integrali, quae maxima minimaue eſſe debet, differentialia primi tantum gradus inſunt, duo tantum puncta praeſcribere licet, per quae curua quaeſita transeat, ita ſi formula illa integralis differentialia ſecundi gradus contineat, tria puncta, per quae curua quaeſita ducatur, dari oportet. Ex quo colligitur ſi differentialia tertii ordinis in illam formulam ingrediantur, tum problema non fore determinatum, niſi quatuor puncta ſint praeſcripta, per quae curua quaeſita transeat, et ita porro. Quo altiora enim differentialia in aequationem quampiam ingrediuntur, eo latius ea patet, pluresque reſtrictiones admittit, propter plures integrationes, quarum ſingulae nouam conſtantem indefinitam inducunt. Atque ex his natura huiusmodi problematum quibus curuae maxima minimaue quadam proprietate gaudentes requiruntur, clarius perſpicitur, quam ante ſolutionem actu transactam fieri potuiſſet.

§. 13.

§. 13. Haec autem attentius conſiderantibus planum fiet, numerum punctorum, quae ad curuam aequatione contentam determinandam requiruntur, pendere a gradu differentialium, quibus aequatio primitiua $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} - \frac{d^3R}{dx^3} +$ etc. erit affecta, eliminatis quantitatibus in ſubſidium vocatis, p, q, r, etc. vt tantum x et y cum ſuis differentialibus inſint. Ita ſi haec aequatio ſtatim fuerit algebraica, tvm dato axe initioque abſciſſarum, ne vnicum quidem punctum praeſcribi poteſt, per qnod curua quaſita tranſeat, ſed curua inuenta inter omnes omnino curuas ad eundem axem relatas nulla inſuper conditione adiuncta, praeſcriptam proprietatem maximi minimiue habebit. Sic ſi $\int(ay - xx)ydx$ maximum mimimumue eſſe debeat, reperietur curua hac aequatione expreſſa $2ay = xx$, quae quaeſito inter omnes omnino curuas ad eundem axem relatas maxime ſatisfacit. Aequatio autem generalis $0 = N - \frac{dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2} -$ etc. neque differentialis primi gradus vnquam fieri poteſt; neque tertii gradus differentialis, neque quinti, neque vllius gradus imparis. Quoties autem prodit aequatio differentialis ſecundi gradus, quod in omnibus fere problematis adhuc tractatis vſu venit, tum duo puncta pro lubitu aſſignari poſſunt, per quae curua quaeſita tranſeat. His igitur caſibus curua inuenitur, quae inter omnes alias per eadem duo puncta ductas praeſcripta maximi minimiue proprietate eſt praedita. Cum autem ad aequationem differentialem quarti ordinis peruenitur, tum curua inuenta quaeque habebit formulam $\int Z dx$ maximam minimamue non inter omnes omnino curuas, ſed inter omnes tantum, quae cum inuenta quatuor puncta habent communia. Simili modo aequatio differentialis ſexti gradus

dus ſex puncta data ad curuam determinandam requiret, et ita porro. Quod autem in noſtro caſu curuam tribus tantum punctis determinari dixi, cum tamen ea ex aequatione differentiali quarti gradus ſit orta, inde venit, quod datum curuae punctum in vno datorum punctorum collocauerim: quae conditio non neceſſaria ſi omittatur, tum aequatio inuenta ad definitam curuam reſtringetur, ſi quatuor puncta, per quae tranſeat, praeſcribantur. Ita cyclois per quatuor data puncta deſcripta prae omnibus aliis curuis per eadem puncta tranſeuntibus hanc habebit praerogatiuam, vt in ea $\int r\,ds$ minimum obtineat valorem.

§. 14. Miſſis autem his, quae ad generalem problematis Iſoperimetrici indolem potius, quam ad meum inſtitutum pertinet, ad alteram quaeſtionem ſoluendam progrediar, quae eſt ipſa a Cel. Bernoullio propoſita. Quaeritur autem in ea curua, quae inter omnes alias eiusdem longitudinis habeat $\int r^m ds$ maximum minimumue. Hic igitur habentur duae formulae integrales $\int ds$ et $\int r^m ds$, quarum vtrique valor ipſius V reſpondens eſt inueſtigandus; quippe quo facto duo iſti valores vel eorum multipli quique inuicem additi et $=0$ poſiti naturam curuae quaeſitae exhibebunt. Adhibitis autem ſubſtitutionibus $dy=pdx$; $dp=qdx$, formulae illae abibunt in has $\int dx\sqrt{(1+pp)}$ et $\int\frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}dx}{q^m}$; quarum illi respondet iſte valor ipſius V; $\frac{-dp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}dx}$ pro altera autem erit vt ante V =

—dP

$\frac{-dP}{dx} + \frac{ddQ}{dx^2}$ exiſtente $P = \frac{(3m+1)(1+pp)^{\frac{3m-1}{2}}}{q^m} p$ et $Q = \frac{-m(1+pp)^{3m+1}}{q^{m+1}}$. Quamobrem pro curua quaeſita orietur iſta aequatio $\frac{Adp}{(1+pp)^{\frac{3}{2}}} = dP - \frac{ddQ}{dx}$; quae integrata dat $\frac{Ap}{\surd(1+pp)} + B = P - \frac{dQ}{dx}$. Multiplicetur vtrinque per dp ſeu qdx, et prodibit $\frac{Apdp}{\surd(1+pp)} + Bdp = Pdp - qdQ = Pdp + Qdq - Qdq - qdQ$; quae denuo integrata dat $A\surd(1+pp) + Bp + C = Z - Qq$; exiſtente $Z = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$. Reſtitutis igitur loco Z et Q ſuis valoribus, orietur haec aequatio $A\surd(1+pp) + Bp + C = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{3m+1}{2}}}{q^m}$, quae per dx multiplicata, eliminatis p et q abit in hanc $Ads + Bdy + Cdx = (m+1)r^m ds$; in qua vt ſupra notaui, ſine vlla reſtrictione vel B vel C nihilo aequale poni poteſt.

§. 15. Ponam igitur $B = 0$, at primo quaeram aequationem inter r et s, ex hac aequatione $Ads + Cdx = (m+1)r^m ds$. Ex ſuperioribus autem patet eſſe $\frac{dx}{ds} =$ ſinui arcus $\int\frac{ds}{r}$, vnde loco dx ſuo ſubſtituto valore orietur $A + C$. ſin. Arcus $\int\frac{ds}{r} = (m+1)r^m$, vnde erit $\int\frac{ds}{r} =$ Arcui, cuius ſinus eſt $\frac{(m+1)r^m - A}{C}$ ſeu

cuius ſinus eſt $\frac{r^m \pm a^m}{c^m}$. Hinc ergo ſumtis differentialibus emerget haec aequatio $\frac{ds}{r} = \frac{mr^{m-1}dr}{\sqrt{(c^{2m}-(r^m \pm a^m)^2)}}$, ex hac que porro iſta $s = m\int\frac{r^m dr}{\sqrt{(c^{2m}-(r^m \pm a^m)^2)}}$. Caſu igitur quo inter omnes curuas eiusdem longitudinis per quatuor data puncta transeuntes quaeritur ea, in qua ſit $\int r ds$ minimum maximumue, habebitur pro curua quaeſita iſta aequatio $s = \int\frac{rdr}{\sqrt{(c^2 - r^2 \pm 2ar - aa)}}$, quae apprime convenit cum Bernoulliana mecum communicata iſta $ds = \frac{2rdr}{\sqrt{(g + 4nr - 4rr)}}$, eſt namque $\frac{g}{4} = c^2 - a^2$ et $n = \pm 2a$.

§. 16. Conſtructio autem curuae quaſitae commodiſſime ex aequatione $A\sqrt{(1+pp)} + Bp + C = \frac{(m+1)(1+pp)^{\frac{m+1}{2}}}{q^m}$ deducetur, quae poſito B=o, mutatisque conſtautibus abit in hanc: $q = \frac{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}{\sqrt[m]{(A\sqrt{(1+pp)}+C)}}$. Multiplicetur per dx, et ob $qdx = dp$ habebitur $dx = \frac{dp\sqrt[m]{(A\sqrt{(1+pp)}+C)}}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$ atque $dy = \frac{pdp\sqrt[m]{(A\sqrt{(1+pp)}+C)}}{(1+pp)^{\frac{3m+1}{2m}}}$; quae poſterior aeqnatio

facto

facto $\sqrt{(1+pp)} = u$ transmutatur in iſtam $dy = \frac{du\sqrt[m]{(Au+C)}}{u^{\frac{2m+1}{m}}}$ tractatu faciliorem. Ex his autem aequationibus curua per quadraturas facile conſtruitur. Aequatio vero differentialis primi gradus inter x et y ex iſtis aequationibus generalibus ob m numerum indefinitum formari nequit, at aequatio differentialis ſecundi gradus ob $dp = \frac{ddy}{dx}$; et $\sqrt{(1+pp)} = \frac{ds}{dx}$ obtinebitur iſta $ds^{\frac{3m+1}{m}} = dx\,ddy\sqrt[m]{(Ads+Cdx)}$ ad curuam cognoſcendam parum idonea. Interim tamen caſus eſt notandus, quo etiam fit $C = 0$; tum enim aequatio $Ads = (m+1)\,r^m ds$ praebet $r =$ conſt., quae eſt proprietas circuli. Circulus igitur inter omnes alias curuas eiusdem longitudinis, et per eadem quatuor puncta ductas habebit $\int r^m ds$ maximum minimumue.

§. 17. Conſiderabo autem praecipue caſum quo $m = 1$, in quo inter omnes curuas eiusdem longitudinis per quatuor data puncta tranſeuntes ea quaeritur, in qua ſit $\int r\,ds$ maximum minimumue. Iſto autem caſu aequatio ſuperior $dy = \frac{du\sqrt[m]{(Au+C)}}{u^{\frac{2m+1}{m}}}$ abit in hanc $dy = \frac{A\,du}{u^2} + \frac{C\,du}{u^3}$ cuius integralis eſt $y = a + \frac{2b}{u} + \frac{c}{uu}$ conſtantibus mutatis; vnde fit $u^2 = \frac{2bu+c}{y-a}$ atque $u = \sqrt{(1+pp)} = \frac{b \pm \sqrt{(bb-ac+cy)}}{y-a}$, ex qua elicitur

 $p =$

$p = \frac{\sqrt{(2bb - ac - aa + 2ay + cy - yy \pm 2b\sqrt{(bb - ac + cy)})}}{y - a} = \frac{dy}{dx}$. Fiat $a = 0$; quia applicatam y augere licet quacunque conſtante, ſine vlla reſtrictione, et habebitur $dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{(2bb + cy - yy \pm 2b\sqrt{(bb + cy)})}}$ pro aequatione qua curuae natura exprimitur. Signorum autem ambiguorum $\pm$ alterum dabit eam curuam, in qua $\int r\,ds$ eſt maximum, alterum in qua minimum. Perſpicuum autem eſt, ſi fiat $b = 0$, tum aequationem exhibituram eſſe cycloidem, quae iam ante eſt inuenta, et ſatisfacit ſola, quando conditio aequalitatis curuarum omittitur.

CLAS-

CLASSIS SECVNDA.

CONTINENS

PHYSICA.

DE
REFLEXIONE LVCIS,
IN TRANSITV PER MEDIVM DIAPHANVM ORIVNDA, EXPERIMENTA ET EXPLICATIONES.

AVTORE
Georgio Wolffg. Krafft.

Obſeruatum iam diu fuit a praeſtantiſſimis Phyſicis, quorum loca hic allegare ſuperfluum eſt, *fieri in acceſſu lucis ad corpus aliquod diaphanum non modo tranſitum lucis per hoc corpus, ſed repercuſſionem eius etiam aliquam, valde ſenſibilem, vti ex ſubſequentibus Experimentis conſtabit, et intenſitati lucis tranſeuntis noxiam*; quae praecipua cauſa eſt eius phaenomeni, quo Tubi Optici pluribus lentibus inſtructi obſcuritatem obiectis inducunt, dum nempe non omnes radios, qui ad lentes affluunt, transmittere poſſunt, ſed partem eorum non contemnendam retroagunt, atque reflectunt, non obſtante vitri maxima pelluciditate. Hanc reflexionem lucis in tranſitu per medium diaphanum oriundam, a quacunque demum cauſa ea exiſtat, an a retroactione particularum ſolidarum; an a vi repellente corpora ambiente, an vero ab vtraque ſimul, praeſenti ſcripto paulo accuratius, quamuis generaliter tantum, examinabo, cum praeter ſolam generaliſſimi phaenomeni enarrationem nihil adhuc in hac quaeſtione hucusque fuerit pertractatum. Poſtquam primo ad hoc argumentum acceſſi, ſtatim Tab. XIV. et XV.

tim deprehendi, in illo, ſi Geometrice abſolui debeat, perueniri ad calculos maxime prolixos et intricatos; quare caſus ſimpliciſſimos tantum, et praecipue eos, qui Experimentis inſtitutis confirmari poſſunt, ad examen revocabo, difficiliora forſan explicaturus alio tempore.

Problema I.

Tab. I. Fig. 1. Sit planum horizontale, cuius ſectio repraeſentetur recta LD, huic incumbat corpus diaphanum, cuius ſectio verticalis ſit Trapezium LKBD, rectis KL, BD, parallelis, et ad planum LD perpendicularibus, terminatum; atque ex puncto radiante A, in recta DB prolongata, vbicunque aſſumto, exeat radius quilibet AE, qui partim ex E reflectatur in Q, partim vero refringatur in F, atque ibi denuo reflectatur in G, et tandem noua refractione perueniat in H: quaeritur, quisnam futurus ſit ſinus anguli HGP, ductis nempe PGO, et MEN perpendicularibus ad KB.

Solutio.

Poſito ſinu toto $=1$, ſtatuantur anguli conſtantis KBI ſinus $=p$, coſinus $=q$; anguli Inclinationis AEM variabilis ſinus $=x$, coſinus $=y$; ſitque ſinus anguli Inclinationis AEM ad ſinum anguli refracti FEN, radii AE ex medio API in diaphanum KBD transeuntis, in ratione conſtanti $m:n$, ex regulis Dioptricis; quibus poſitis, erit ſin. AEM (x) : ſin. FEN$=m:n$, hoc eſt, ſin. FEN$=\frac{nx}{m}$, eiusque coſinus $=\frac{\sqrt{(m^2-n^2x^2)}}{m}$. Cum vero ſit ang. EFN$=END-$FEN, et productis rectis LD, KB, donec ſibi occurrant in C, triangula duo rectangula CEN et

et CDB ſint ſimilia, erit ang. END $=$ ang. ABE, cuius ſinus et coſinus ſunt dati; per regulas itaque Trigonometricas habebitur ſinus EFN $= \frac{p\surd(m^2-n^2x^2)-qnx}{m}$, qui ob naturam Reflexionis aequalis erit ſinui LFG, atque eiusdem huius anguli EFN coſinus inuenietur $= \frac{q\surd(m^2-n^2x^2)+pnx}{m}$. Cum itaque in hoc ſitu quem Figura repraeſentat, ſit angulus OGF $=$ LOG $-$ LFG, atque, ob MN, PO, parallelas, ſit LOG $=$ LNE $=$ ABC, cuius vltimi anguli ſinus p, coſinus $-q$, reperietur anguli OGF ſinus $\frac{pq\surd(m^2-n^2x^2)+p^2nx}{m} + \frac{pq\surd(m^2-n^2x^2)-q^2nx}{m} = \frac{2pq\surd(m^2-n^2x^2)+(pp-qq).nx}{m}$; cum autem denique ſit ſinus OGF : ſin. HGP $= n:m$; erit tandem ſin. HGP $= \frac{2pq\surd(m^2-n^2x^2)+(pp-qq)nx}{n}$.

Corollarium 1.

Cum difficulter inſtitui poſſint Experimenta, in quibus punctum A radians totam ſuperficiem KB illuſtret, quia ob languorem talis lucis vix diſtingui poterunt veſtigia radiorum FGH ab inferiore ſuperficie LD reflexorum: accommodabo ſolutionem Problematis ad eum ſolum caſum, quo radii omnes AE paralleli in ſuperficiem KB incidunt; vtpote quod ſuperficie KB a libero Sole illuminata effici poteſt. Sin igitur radii omnes paralleli incidant, erit angulus AEM conſtans, quare eius ſinus x pro conſtanti debet haberi; quo ſuppoſito euidens eſt, fore vt etiam angulus HGP, vel eius complementum KGH perpetuo ſit idem. In Sole itaque libero radii omnes GH, ab inferiore ſuperficie LD reflexi, inter ſe paralleli exibunt.

Corollarium 2.

Quoniam, poſitis radiis incidentibus parallelis ſinus anguli HGP eſt adhuc $\frac{2pq\sqrt{(m^2-n^2x^2)}+(pp-qq)nx}{n}$, ſed habita x pro conſtante; et, ducto ipſius E radio reflexo EQ, anguli MEQ, vtpote aequalis ipſi AEM per naturam Reflexionis, ſinus eſt x: euidens eſt, varios dari poſſe caſus, in quibus H modo eſt anterius, modo poſterius in reſpectu ad punctum Q habito, prout nempe angulus Incidentiae AEB, et angulus Trapezii diaphani ABE inter ſe ſunt diuerſi; vt ſinus HGP fiat negatiuus, quos caſus omnes cum non niſi prolixe admodum diſtinguere liceat: contentus ero ſolis formulis generalibus modo inuentis. Deprehendi autem conformia haec omnino eſſe Ex-
Experim. I. perientiae. *Nam cum accepiſſem vitrum politum, plana*
Fig. II. *ſuperficie vtrinque terminatum, craſſitiei apud E* = 25 *partibus milleſimis pedis Londinenſis, apud* F *vero* 24 *part. illudque impoſuiſſem tabulae horizontali CG, quae feneſtrae apertae ABCD admota erat, per quam in perfecta ſerenitate Sol liber admiſſus vitrum illuminabat; vidi,* 1) *in lacunari conclauis MN duas diſtinctas formari imagines lucidas vitri, HI nempe et* KL; 2) *hanc eſſe debiliorem, illam vero fortiorem;* 3) *in diſtantia aliqua HL inter ſe remotas.* 4) *euaneſcere imaginem debiliorem KL, ſi vitri pars* EOP, *cuius latitudo eſſet circiter* $\frac{3}{5}$ EQ, *panno nigro obtegatur.* 5) *inuariatas manere imagines, etiamſi vitro pannus niger ſupponatur, aut illud, manibus in äerem eleuatum, horizontaliter teneatur.* 6) *inverſo autem vitro, ita vt craſſitie maiori ſua feneſtram reſpiceret, inuerti etiam imagines KL et HI.* Vnde manifeſtum

nifeſtum eſt, imaginem fortiorem HI ortam fuiſſe a reflexione radiorum ſolarium in ſuperiori ſuperficie facta; debiliorem vero a reflexione in inferiore ſuperficie facta; et lucem etiam viuidiſſimam, qualis eſt ſolaris, tranſitu per vitrum non adeo craſſum, tamen ſenſibiliter debilitari.

Corollarium 3.

Si quaeratur qualis debeat eſſe angulus Inclinationis conſtans MEA, vt radii primo reflexus EQ, et ſecundo reflexus GH, ſint inter ſe paralleli: neceſſe tantum eſt, vt ponatur ſinus anguli MEQ $x =$ ſinui anguli HGP, qui eſt $\frac{2pq\sqrt{(m^2-n^2x^2)}+(pp-qq)nx}{n}$; ex qua aequatione, ſubſtituto $\sqrt{(1-pp)}$ pro q, vt tota aequatio conſtet ex incognitis p et x, deducitur $x=\frac{pm}{n}$; et $p=1$. vt itaque radii primo et ſecundo reflexi inter ſe paralleli exeant, requiritur, vt angulus MEA talis ſit, qui habeat ſinum $\frac{pm}{n}$, aut vero, vt angulus KBI ſit rectus, qui caſus poſtea examinabitur. Sed ducta ER horizontali, aut cum LDC parallela, erit angulus AER altitudo Solis ſupra horizontem. Cum vero ſit AER$=$AEB$-$REB, atque illius ſint ſinus et coſinus y et x, huius vero q et p, erit ſinus anguli AER$=py-qx=$ ſinui altitudinis Solis ſupra horizontem. Pro paralleliſmo autem radiorum reflexorum requiritur vt ſit $x=\frac{pm}{n}$, conſequenter, $y=\frac{\sqrt{(n^2-p^2n^2)}}{n}$, aut ſi ſtatuatur $m:n=3:2$, quod fit in tranſitu lucis ex äere in vitrum, debebit eſſe $x=\frac{3p}{2}$, et $y=\frac{\sqrt{(4-9p^2)}}{2}$, quibus ſubſtitutis, et poſito $\sqrt{(1-p^2)}$ pro q, habebitur, pro indicato paralleliſmo radiorum reflexorum, altitudinis Solis ſinus $=\frac{p\sqrt{(4-9p^2)}}{2}-\frac{3p\sqrt{(1-p^2)}}{2}=\frac{\sqrt{(4-9pp)}-\sqrt{(9-9pp)}}{2}p$; ſed per ſe Fig. I.

ſe patet, quod ſit $\sqrt{(4-9pp)} < (\sqrt{9-9pp})$; quare pro memorato parallelismo radiorum reflexorum ſemper requiritur, ſi tranſitus fiat ex äere in vitrum, aut ſi ſit $m > n$, altitudo Solis talis, cuius ſinus eſt negatiuus; quare caſus hic non poterit dari, cum in eo Sol ſuperficiem vitri KB illuminare non poſſit.

Scholion.

Suppoſui in hoc Problemate ſuperficies vitri politas eſſe inter ſe in dato angulo inclinatas; quamuis igitur novis inductis determinationibus ex allegatis iam iam deduci poſſent omnes caſus illorum diaphanorum, in quibus dictae ſuperficies ſunt inter ſe parallelae: conſultius tamen iudico fore, ſi hos peculiariter conſiderem.

Problema II.

Tab. II. Fig. 1. Incumbat plano horizontali corpus diaphanum, cuius ſectio verticalis ſit rectangulum BDKL; atque ex puncto radiante A, in recta DB prolongata vbicunque aſſumto, exeat radius quilibet AE, qui partim ex E reflectatur in Q, Reflexione prima, partim vero refringatur in F, atque ibi denuo reflectatur in G, Reflexione ſecunda; et tandem noua Refractione perueniat in H: quaeruntur proprietates huius ſecundae Reflexionis.

Solutio.

Statuantur $BA = a$, $BD = c$, $BK = e$, $BE = x$, ſinus anguli Inclinationis ad ſinum anguli refracti vti $m:n$; atque erit ſinus $MEA = \frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}$, deinde erit ſin. MEA $\left(\frac{x}{\sqrt{(a^2+x^2)}}\right)$: ſin. $FEN = m:n$, quare ipſius FEN ſinus $=$

nx

$\frac{nx}{m\sqrt{(a^2+x^2)}}$, et coſinus $=\frac{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}{m\sqrt{(a^2+x^2)}}$; vnde in Triangulo FEN fit analogia, ſin EFN $(\frac{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}{m\sqrt{(a^2+x^2)}})$ EN (c) = ſin. FEN $(\frac{nx}{m\sqrt{(a^2+x^2)}})$: FN; atque oritur FN= $\frac{ncx}{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}$; cum autem ob aequales angulos EFN et GFO, ex natura Reflexionis, Triangula GOF et ENF ſint aequalia et ſimilia, habetur GE=2FN= $\frac{2ncx}{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}$, ex quibus circumſtantiis reliquae omnes, quae huc pertinent, deduci poſſunt.

Corollarium I.

Cum ſit ſin. MEA : ſin. FEN $=m:n$; nec non, ſin. PGH : ſin. FGO $=m:n$; erit ſin. MEA : ſin. FEN = ſin. PGH : ſin. FGO; ſed FEN et FGO anguli ſunt aequales, quare etiam MEA et PGH ſunt anguli aequales; aut, quod eodem recidit, radius primo reflexus EQ, et ſecundo reflexus GH, inter ſe ſunt paralleli; ſed diſtant inter ſe quantitate GE $=\frac{2cnx}{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}$; atque hic parallelismus radiorum reflexorum obtinet, etiamſi ex puncto radiante A exeant radii AE. Euidens autem porro eſt, radium primo reflexum EQ ſemper eſſe anteriorem radio ſecundo reflexo GH, ſecus atque fieri vidimus in caſu praecedentis Problematis, vbi ſectio KBDL eſt Trapezium; vnde ſimul etiam deducere licet examen exactiſſimum vitri politi plano-plani, an nempe vna ſuperficies ad alteram perfecte ſit parallela; quale examen, huic fere ſimile, iam dedit *De la Hire*, in *Commentariis Acad. Scient. Pariſinae* 1699, pag. 89 Edit. Pariſ. exponatur enim tale vitrum Soli libero, et attendatur, an imagines a radiis reflexis vtriusque generis formatae eundem ſemper

inter ſe ſeruent ſitum et diſtantiam, quomodocunque vitrum conuertatur; quod ſi ita fuerit, iudicandum erit, vitri ſuperficies inter ſe eſſe parallelas; ſin autem mutato vitri ſitu mutetur etiam ſitus imaginum formatarum, ſtatuendum erit, vitri ſuperficies non eſſe inter ſe parallelas. In Experimento certe praecedenti I. in quo vitri latitudo maior minorem non niſi parte $\frac{1}{1000}$ pedis Londinenſis excedebat, differentia nihilominus imaginum formatarum valde magna, et admodum ſenſibilis dabatur.

Corollarium 2.

Euidens porro eſt, dari radium aliquem ſecundo reflexum, qui tranſeat per ipſum punctum K, atque vltimus ſit eorum qui in ſuperficie KB dari poſſunt; cuius radii vltimi vt ſitus cognoſcatur, poni debet tantum GK $=0$, hoc eſt, $KB-GE-EB=0$, aut vero $e-x-\frac{2ncx}{\sqrt{(m^2a^2+(mm-nn)x^2)}}=0$, vnde deducitur aequatio ſequens:

$$(mm-nn).x^4-(mm-nn).2ex^3+\left.\begin{matrix}m^2a^2\\+(mm-nn).e^2\\-4n^2c^2\end{matrix}\right\}x^2-2m^2a^2ex+m^2a^2e^2$$

$=0$, ex qua ſi deducantur valores ipſius x, denotabitur illis diſtantia BE talis, vt radius in terminum eius incidens, et ſecundo reflexus, per punctum K tranſeat. Dabitur vero hic terminus in loco aliquo inter B et K interiecto, exempli gratia in R; quare poterit ſpatium reliquum RK omne obtegi panno nigro, manente imagine a radiis ſecundo reflexis orta inuariata; vel, quod eodem recidit, ſi ſpatium BR totum obtegatur, manente ſpatio RK aperto, extinguetur, tota imago a radiis ſecundo reflexis orta; prout idem hoc Experientia confirmat, in Experimenti I. numero 4. etiamſi hic caſus, quo ſuperficies

ficies vitri exacte parallelae ſupponuntur, proprie ad illud Experimentum non referatur.

Corollarium 3.

Si radii incidentes omnes inter ſe fuerint paralleli, tunc angulus Incidentiae AEB erit conſtans, conſequenter radii primo et ſecundo reflexi omnes inter ſe erunt paralleli. Si vero iidem radii e puncto fixo A exeuntes incidant diuergentes, patet angulum AEB ſemper fieri minorem, quo maior accipiatur ipſa BE.

Corollarium 4.

Haec reflexio itaque, ſuperficiebus diaphanis debita, ratiocinio Geometrico et Experimentis adſtruitur; ex eadem hac cauſa accidit etiam, *vt in vitro plano, Soli libere expoſito, aſpicere liceat duas Solis imagines; qui aſpectus, vt oculis parcatur, trans vitrum planum, fumo leuiter obductum, fieri debet*; vna ſcilicet Solis imago reflexioni debetur ſuperioris ſuperficiei, altera inferioris. Exinde porro fluit etiam ratio ſequentis Experimenti: *Imponatur priſma vitreum plano horizontali ſic, vt acierum aliqua incumbat plano huic, hedra vero oppoſita priſmatis ſurſum ſpectet; quo facto vnica tantum conſpicietur Solis imago*; quia nempe ſuperficies inferior reflectens, ſuperiori parallela, hic deeſt.

Experim. II.

Experim. III.

Problema III.

Sit planum horizontale, cuius ſectio repraeſentetur recta CGH, huic inſiſtat dimidia Lens plano-conuexa ſphaerica; cuius ſectio verticalis ſit AMHG, et in cuius pla-

planitiem incidant perpendiculariter radii paralleli, quorum vnus ſit BP, qui, cum in M peruenerit, reflectatur in D, atque hic exeat in F, quaeritur longitudo rectae GF.

Solutio.

Ponamus radium conuexitatis $CM = r$, ſinum totum $= 1$, $GP = y$, $CG = a$, ſitque ex äere in vitrum ſinus anguli Inclinationis ad ſinum anguli refracti $= m:n$; atque erit ducta CI ad CG perpendiculari, ſinus $IMC = \frac{y}{r}$, coſinus $= \frac{\surd(r^2 - y^2)}{r}$; erit ergo ipſius PMD, qui prioris duplus eſt, ſinus $= \frac{2y\surd(rr-yy)}{rr}$, coſinus $= \frac{r^2-2y^2}{r^2}$, $IM = \surd(r^2-y^2)$, $PM = \surd(r^2-y^2)-a$, dabiturque analogia ſequens, ſin. $PDM\left(\frac{r^2-2y^2}{r^2}\right)$: ſin. tot. $(1) = PM(\surd(rr-yy)-a) : MD$ $\left(\frac{rr\surd(rr-yy)-arr}{rr-2yy}\right)$; nec non altera, ſin. tot. (1) : ſin. PMD $\left(\frac{2y\surd(rr-yy)}{r^2}\right) = MD\left(\frac{r^2\surd(rr-yy)-ar^2}{r^2-2y^2}\right) : PD\left(\frac{2y.(rr-yy)-2ay\surd(rr-yy)}{r^2-2y^2}\right)$ hinc oritur $DG = y - PD = \frac{2ay\surd(rr-yy)-r^2y}{r^2-2y^2}$. Sit denique NDO perpendicularis ad AG, atque habebitur ſin. MDN $=$ ſin. $PMD = \frac{2y\surd(rr-yy)}{r^2}$) : ſin. $ODF = n:m$, quoniam refractio fit ex vitro in äerem; ex quo producitur ſin. ODF $=$ ſin. DFG, $= \frac{2my\surd(rr-yy)}{nr^2}$, et coſinus $DFG = \frac{\surd(n^2r^4+4m^2y^4-4m^2r^2y^2)}{nr^2}$; tandem in Triangulo DFG, ob analogiam ſequentem, ſin. DFG : Coſ. $DFG = DG:FG$, reperitur $FG = \frac{(2a\surd(rr-yy)-rr)\surd(n^2r^4-4m^2y^2.(rr-yy))}{2m.(rr-2yy).\surd(rr-yy)}$.

Corollarium 1.

Concurret itaque radius reflexo-refractus DF cum axe in puncto F, allegatae diſtantiae, extra ſupreficiem planam AG. Dantur vero infinite multi radii, qui intra ſuperficiem planam AG, in puncto aliquo rectae GH,

axem

axem ſecant, et proinde ad conſtituendum focum extra vitrum inutiles ſunt. Hinc vt determinetur in recta AG locus, extra quem nulli radii amplius ad focum extra vitrum conſtituendum concurrunt, fiat FG=o, vnde elicitur $y = \frac{r\sqrt{(4aa-rr)}}{2a}$; ex qua formula facilis conſtructio ipſius y deducitur, ſub quo FG euaneſcit; nam centro C, radio CG, deſcribatur ſemicirculus TXG, in hunc ex puncto G applicetur recta GX= radio conuexitatis vitri CM, eritque ducta per punctum X recta XZ parallela axi TH, is ipſe radius, qui in punctum G reflectetur.

Corollarium 2.

Quoniam ſinus PDM generaliter eſt $\frac{r^2-2y^2}{r^2}$, inuenietur ſinus YGZ ſubſtituendo pro y valorem modo inuentum ipſius GY, qui ſinus adeoque erit $= \frac{r^2-2a^2}{2a^2}$. Vt vero radii reflexo-refracti cadant extra ſuperficiem planam, angulus PDM maior eſſe debet angulo YGZ, quare $\frac{r^2-2y^2}{r^2} > \frac{r^2-2a^2}{2a^2}$, aut $2a^2r^2-4a^2y^2 > r^4-2a^2r^2$, aut denique $\frac{r\sqrt{(4aa-rr)}}{2a} > y$, hoc eſt GY$>y$; vnde patet, omnes radios in ſuperficiem AY circumcirca incidentes non concurrere ad focum extra punctum G conſtituendum; conſequenter ſpatium latitudinis AY annulare in plana ſuperficie vitri obtegi poſſe plano radiis imperuio, manente nihilo minus foco in F inuariato.

Corollarium 3.

Ducto radio CA, erit AG$=\sqrt{(rr-aa)}$, quare AY$=\sqrt{(r^2-a^2)}$−GY; itaque vt ſpatium hoc AY, ad focum producendum inutile, euaneſcat, debet eſſe $\sqrt{(rr-aa)}=$

GY, hoc eſt, ſubducto calculo reliquo, $a = \frac{r}{\sqrt{2}}$; aut vero, poſita latitudine vitri $GH = b$, vt ſit $a = r - b$, neceſſe eſt vt fiat $b = \frac{r(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{2}} = \frac{207}{707} r$, quo caſu omnes radii in ſuperficiem planam incidentes ad focum conſtituendum extra vitrum concurrent, nec vlla pars vitri inutilis manebit. Quoniam vero ſinus anguli ſemirecti eſt $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, erit $\sqrt{2} = \frac{1}{\text{ſin. } 45^\circ}$; quo valore ſubſtituto, emergit pro hoc caſu,

$b = 1 - \text{ſin. } 45^\circ$, hoc eſt, latitudo vitri GH debet eſſe ſinus verſus anguli 45°; quare arcus vitri integri, $= 2AMH$, debet continere Quadrantem Circuli.

Corollarium 4.

Si ponatur $a = 0$, hoc eſt, ſi vitrum integrum conſtet ex dimidia ſphaera, erit per Solutionem Problematis huius $PD = \frac{2y.(rr - yy)}{r^2 - 2y^2}$; quae recta PD, ſi cum ipſa PG, aut y comparetur: inuenietur hoc caſu eſſe maior quam y; eſt enim $PD : PG = \frac{2y.(rr - yy)}{r^2 - 2y^2} : y = 2r^2 - 2y^2 : r^2 - 2y^2$; cum vero ſit $2r^2 > r^2$, erit etiam $2r^2 - 2y^2 > r^2 - 2y^2$, hoc eſt, $PD > PG$. Vt vero radii reflexi extra ſuperficiem planam cadant, requiritur vt ſit $PD < PG$, cuius cum hic contrarium obtineat, ſequitur in vitro plano-conuexo hemiſphaerico nullum radiorum in poſteriori ſuperficie reflexorum extra ſuperficiem planam egredi, ſed omnes intra vitrum abſcondi, quare in tali vitro hemiſphaerico nullus generabitur focus e reflexione ſecunda ortus.

Co-

Corollarium 5.

Q'ioniam denique ſinus anguli FDG generaliter eſt $\frac{\sqrt{(n^2r^4 \pm 4m^2y^2.(yy-rr))}}{nr^2}$, euidens eſt, decreſcente y, decreſcere etiam ſinum anguli FDG; cum itaque angulus FDG decreſcat quo propius punctum D ad G accedit: patet duos radios reflexo-refractos DF, infinite propinquos, extra vitrum diuergere inter ſe, et conſequenter productos in directum ſeſe intra vitrum decuſſare.

Corollarium 6.

Ex valore generali ipſius FG eluceſcit, illum fieri $= \frac{(2a-r.)n}{2m}$, ſi ponatur $y=0$; quare in hac diſtantia a puncto G incipiet focus radiorum reflexo-refractorum formari. Inſtitui Experimentum huius rei, et *capta Lente plano-con-* **Experim. IV.** *vexa, quae focum ordinarium ſuum habebat in diſtantia* 1750 *part. chordam conuexitatis ſuae* 220, *et craſſitiem* 13. *part. expoſui planam eius ſuperficiem Soli directe ita, vt radii perpendiculariter ſuperficiei planae inciderint; quo facto obtinui focum huius Lentis, Soli et vitro interpoſitum, in diſtantia* 273 *part a ſuperficie plana, acutum quidem, et diametri non magnae, ſed adeo debilem, vt ne fomitem quidem accenderet.* Eſt autem in applicatione huius Experimenti ad Theoriam, quoniam Lentes plano-conuexae focum ordinarium habent in diſtantia ſuae diametri, radius conuexitatis CA$=875=r$, GH $=13$, et conſequenter CG$=a=862$, quare inuenietur, poſita ratione $m:n=3:2$, FG$=\frac{(1724-875)2}{6} = \frac{849}{3} = 283$,

qui numerus ab inuento 273 non niſi $\frac{10}{1000}$ pedis Londinenſis differt.

Scholion I.

Si radii ſupponantur incidere paralleli cum axe Lentis in ſuperficiem conuexam, pro inuenienda diſtantia foci reflexo-refracti calculus oritur ita prolixus, vt abſolui fere
Experim. V. nequeat; quare ſufficiet indicaſſe, *me deprehendiſſe diſtantiam foci modo dicti a ſuperficie conuexa in Lente praecedentis Corollarii VI. 1650 part. neque vllius ſenſibilis caloris*; quare concludi poteſt, in vna eademque Lente conuexo-plana eſſe diſtantias horum focorum inter ſe vti circiter 612 ad 1650, vel 102 ad 275.

Scholion II.

Ex facto Schematiſmo Lentis plano-concauae leui attentione perſpicitur, radiis incidentibus cum axe parallelis nullum generari poſſe focum, a parte poſteriori oriundum, ſiue plana ſiue concaua ſuperficies Soli obuertatur. Sed experientia deprehendi tamen, dari focum anteriorem in
Experim. VI. Fig. III. tali Lente. *Nam cum Lentis plano-concauae ADBFE, in qua eſſet chorda AB*$=71$, *CD*$=5$, *et AE* $7\frac{1}{2}$ *part: concauitatem Soli directe obuerterem, inueni focum ſenſibilem anterius poſitum, et a puncto D 72 partibus remotum*; qui focus cum a reflexione partis poſticae oriri nequiuerit, ortus ſine dubio eſt a reflexione partis concauae facta, quod etiam ex ipſo Experimento fit manifeſtum. Nam ex datis chorda AB, et ſagitta CD, eruitur radius concauitatis $=128\frac{21}{40}$; cum vero ſpeculum concauum focum

cum ſuum habeat in diſtantia dimidii radii concauitatis: debebit focus hic dſtare a puncto D $64\frac{21}{80}$ part. qui numerus cum inuento per Experimentum, 72, ſatis bene congruit. *Obuerſa autem Soli parte plana dictae Lentis*, Exper. VII. *nullus generabatur focus, ſed debilis ſplendor latus, de* quo iterum manifeſtum eſt, eum generatum eſſe a reflexione in planitie Lentis orta.

Problema IV.

Pertranſeat corpus A medium AEP aequabiliter celeritate *m*, medium EFG vero celeritate *n*; quaeritur quam viam hoc corpus A ſequi debeat, vt ex A in H, rectam LC attingendo, perueniat tempore breuiſſimo. Fig. K.

Solutio.

Sit hoc via quaeſita AE, EF, FG, GH, et demiſſis ex A, H, et F perpendiculis in TKC rectam, quae ſint AS, HT, et FV, ponantur $TS=a$, $AS=b$, $HT=c$, $CS=e$, $CD:DB=1:p$ $ES=t$, $EV=u$, $VG=x$, eritque $GT=a-t-u-x$, $CV=e+t+u$, et $VF=pe+pt+pu$, ob Similia Triangula CDB et CVF; ex his eruitur:

$AE=\sqrt{(b^2+t^2)}$

$EF=\sqrt{(p^2e^2+2p^2et+p^2t^2+2p^2eu+2p^2tu+p^2u^2+u^2)}$

$FG=\sqrt{(p^2e^2+2p^2et+p^2t^2+2p^2eu+2p^2tu+p^2u^2+x^2)}$

$GH=\sqrt{(a^2-2at+t^2-2au-2ax+2tu+2tx+u^2+2ux+x^2+c^2)}$

conſequenter erit tempus per $AE=\frac{AE}{m}$; tempus per $EF=\frac{EF}{n}$; tempus per $FG=\frac{FG}{n}$, et tempus per $GH=\frac{GH}{m}$; adeoque

eoque tempus totum erit $= \frac{AE}{m} + \frac{EF}{n} + \frac{FG}{n} + \frac{GH}{m}$. Facta igitur differentiatione huius expreſſionis ſic, vt primo ponatur t ſola variabilis, reliquae conſtantes; deinde u ſola variabilis, reliquae conſtantes; et denique x ſola variabilis, et reliquae conſtantes: obtinebuntur, ſubſtitutis reſpectiuis lineis loco literarum aſſumtarum, ſequentes aequationes:

t variabilis.) $\frac{ES}{m.AE} + \frac{p.VF}{n.EF} + \frac{p.VF}{n.FG} = \frac{GT}{m.GH}$.

u variabilis.) $\frac{p.VF+EV}{n.EF} + \frac{p.VF}{n.FG} = \frac{GT}{m.GH}$.

x variabilis.) $\frac{VG}{n.FG} = \frac{GT}{m.GH}$.

Ex combinatione igitur harum aequationum primae et ſecundae, oritur $\frac{ES}{m.AE} + \frac{p.VF}{n.EF} = \frac{p.VF}{n.EF} + \frac{EV}{m.EF}$, vel $\frac{ES}{AE} : \frac{EV}{EF} = m : n$; eſt autem $\frac{ES}{AE} =$ ſin. MEA, et $\frac{EV}{EF} =$ ſin. FEN, quare debebit eſſe ſin. MEA : ſin FEN $= m : n$. Ex aequatione tertia oritur $\frac{VG}{FG} : \frac{GT}{GH} = n : m$; hoc eſt, ſin. OGF : ſin. HGP $= n : m$. Ex aequatione autem ſecunda et tertia oritur $\frac{p.VF+EV}{EF} + \frac{p.VF}{FG} = \frac{VG}{FG}$, aut vero $\frac{p.VF+EV}{EF} = \frac{VG-p.VF}{FG}$; ſed quia $p = \frac{BD}{CD}$, prodit aequatio ſequens, facta hac ſubſtitutione, et vtroque membro diuiſo per BC; $\frac{BD.VF+EV.DC}{EF.BC} = \frac{VG.CD-BD.VF}{FG.BC}$, quae aequiualet huic ſequenti $\frac{BD}{BC} \times \frac{VF}{EF} + \frac{DC}{BC} \times \frac{EV}{EF} = \frac{CD}{BC} \times \frac{VG}{FG} - \frac{BD}{BC} \times \frac{VF}{FG}$; quae eadem eſt cum hac, ſin. XEG × ſin. FEV + coſ. XEG × coſ. FEV = coſ. XEG × coſ. VGF − ſin. XEG × ſin. VGF, hoc eſt, coſ. (FEV−XEG) = coſ. (XEG+VGF), vel coſ. EFN = coſ. XYG = coſ. OFG; erit ergo EFN = OFG. Itaque vt radius ex A per F tranſiens in H perueniat tempore breuiſſimo, requiritur primo, vt ſit ſin. MEA : ſin. FEN $= m : n$, ſecundo, vt ſit ſin. OGF : ſin. HGP

$= n$

$= n : m$; et tertio, vt ſit $EFN = OFG$; quae conditiones cum in Refractione vtraque et Reflexione, radii AE contineantur: ſequitur, etiam in his radiis refracto-reflexis lucem abſoluere viam deſcribendam tempore breuiſſimo.

Corollarium.

Si vitri ſectio ſit rectangulum, tunc CD euadit infinite magna; quare hoc caſu $p = \frac{BD}{\infty} = 0$. Vnde ex aequationum praecedentium ſecunda et tertia prodit $\frac{EV}{EF} = \frac{VG}{FG}$, hoc eſt, ſin. VFE = ſin. GFV, aut vero VFE = GFV.

DE

DE NOVO OSCILLATIONVM GENERE;

AVTORE
Georgio Wolffg. Krafft.

§. 1.

Quamquam plures hucusque modi ſint in diem prolati, quibus motus oſcillatorius produci poteſt in corporibus, quales ſunt: corporis e filo ſuſpenſi; corporis ex ipſo ſui aliquo puncto pendentis; aquae in tubo communicante reciproco motu agitatae; nerui, aut chordae fortiter extenſae et ſtylo vellicatae; et qui ſunt alii: adiici tamen meretur his aliud adhuc oſcillationum genus, internae corporis ſtructurae debitum, a nemine adhuc examinatum; quod et elegantia ſua non minus, quam diuturna motus huius perſeueratione, ſe commendat.

§. 2. Ductus ſui in disquiſitionem huius noui motus oſcillatorii caſu fortuito, quo factum eſt, vt horologium portatile, ex vnco libere ſuſpenſum, ita vt a tergo ſuo parietem non attingeret, intuerer, atque in eo oſcillationes deprehenderem, quae et motus conſtantia, et arcus, qui deſcribebatur, magnitudine admodum ſenſibili, in aliquam me primum admirationem rapiebant, poſtea autem ad ſequentes meditationes anſam mihi praebebant, quibus et facile in cauſam phaenomeni adductus ſui, et ſimul ſpecialem hanc oſcillationum geneſin paulo latius extendi.

§. 3. Cum ob ponderis cuiuscunque verticaliter deorſum nitentis actionem id in quiete perſiſtere nequeat, niſi vis, illud retroagens, et lapſui imminenti directe oppoſita,

ta, ipſi fuerit applicata: euidens eſt, neceſſe eſſe vt corporis ſuſpenſi centrum grauitatis, et punctum illud, e quo ſuſpenſum eſt corpus, et quod tanquam obſtaculum inuincibile conſideratur, ſint in vna eademque linea recta verticali, ſi corpus in quiete perſiſtens, et ab oſcillationibus liberum eſſe debeat; ex quo fit, vt pendula ſimplicia omnia hunc ſitum continuo appetant quaſi, atque quamprimum attigerint illum, oſcillari deſiſtant, et ad quietem reducantur.

§. 4. Vt itaque ad explicationem phaenomeni accedam, ſit ABKL ſectio horologii, quam imaginabor eſſe circularem, et habere centrum ſuae grauitatis in C centro circuli; huic applicatum ſit a latere libramentum GBF, quod ordinarie ita fabricari ſolet, vt conſtet annulo firmo, e cuius centro M tres radii MF, MG, MB, prodeunt, qui peripheriam annuli in tres arcus aequales diuidunt. Extremitatibus horum radiorum F, G, et B afferruminare conſueuerunt artifices aliquid plumbi, vt eo melius vibretur libramentum. Sin igitur ita conſtructum ſit illud, vt annulus vbique eiusdem ſit craſſitiei et latitudinis, et praeterea ponduſcula afferruminata idem praeciſe teneant pondus: tum centrum grauitatis huius libramenti erit in centro circuli M, manebitque proinde in eodem loco fixo M, ſiue libramentum vibretur, ſiue non. Sed ſi, quod plerumque fieri debet, accidat, vt aut annulus inaequabilis ſit magnitudinis, aut ponduſcula afferruminata ſint inaequalia, aut vtrumque ſimul: centrum grauitatis libramenti erit in loco extra centrum poſito, quem ſtatuam eſſe I. Iunctis igitur centris grauitatum horologii absque libramento C, et libramenti M, per rectam CI,

 erit

erit centrum grauitatis commune in loco aliquo intermedio E; quod, ſi cum puncto ſuſpenſionis D ſit in eadem verticali DE: totum ſyſtema quieſcet, quamdiu libramentum in hoc ſitu perſiſtat. Incipiat nunc libramentum moueri, et prima vibratione perueniant radii in ſitum *f*M, *g*M, *h*M, hac mutatione ſitus centrum grauitatis I aſcendet per arculum I*i*, centro M, et radio MI deſcriptum; quare etiam centrum grauitatis commune E perueniet in alium locum *e*, qui, cum extra verticalem lineam ED ſit: horologium in hoc ſitu quieſcere amplius non poterit, ſed oſcillationem peraget, eo vsque duraturam, donec *e* punctum in verticalem DE perueniat. Patet itaque, motum oſcillatorium in tali horologio oriundum, deberi vnice aut inaequabili craſſitiei libramenti, aut inaequalitati ponduſculorum in F, G, et H, afferruminatorum.

§. 5. Ex ſimilitudine igitur talis horologii concipiamus nouam machinulam, quae conſtet ex lamina circulari RLMN, circa cuius centrum C vibret vectis grauitatis expers inaequalium brachiorum AB, et vtrinque inaequalibus ponduſculis oneratus A et B; vibrationes autem eius producantur ab elatere et rotulis variis quomodocunque diſpoſitis, ita tamen, vt laminae vna cum rotulis et elatere conſideratae centrum grauitatis ſit in ipſo centro C, quod quamuis et aliter ſe habere poſſet, facilitatis gratia tantum ita aſſumo. Poſitis nunc $AC = a$, $CB = b$, pondere laminae et rotularum $= C$, ponderibusque vecti affixis vtrinque $= A$ et $= B$; ſi quaeratur centrum grauitatis commune inter C et A, inuenietur illud per analogiam $A + C : A = a : EC$, vnde $EC = \frac{Aa}{A+C}$, ſimili analogia erueretur quo-

quoque centrum grauitatis commune inter E et B, ponendo $A+B+C:B=EB:ED$, vnde eſt $ED=\frac{B.EB}{A+B+C}$, vel, ob $EB=AB-AE=a+b-\frac{Ca}{A+C}=\frac{Aa+Ab+Cb}{A+C}$, erit $ED=\frac{ABa+ABb+BCb}{(A+C)(A+B+C)}$, conſequenter etiam $CD=ED-EC=\frac{(A+C)(Bb-Aa)}{(A+C)(A+B+C)}=\frac{Bb-Aa}{A+B+C}$; quae CD dabit punctum D, in quo haeret centrum grauitatis totius machinulae compoſitae.

§. 6. Suſpenſa iam ſit machinula ex hoc puncto D e puncto ſuſpenſionis I: manebit ea in aequilibrio, neque oſcillationes peraget. Sed ſi poſtea motus vibratorius vectis AB incipiat, ab elatere et rotulis adiunctis producendus, veniet poſt peractam primam vibrationem vectis in ſitum GF, in quo ſitu centrum grauitatis commune D aſcendit in locum H, poſt abſolutum arcum circularem DH centro C deſcriptum; qui locus H cum ſit extra verticalem DI: motus oſcillatorius conſequetur verſus M, donec poſt aliquot peractas oſcillationes punctum H perſiſtat in verticali dicta, atque ſic machina denuo quieſcat, niſi vibrationes vectis perdurent.

§. 7. Pro definiendo nunc autem angulo HID, ducatur chorda HD, et recta HK, quae ſit ad AB parallela; eruntque anguli H et D aequales; quare vocatis FCB ſinu m, coſinu n, ID e, erit CDH, $=$CHD, ſinus $\frac{\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{2}}$, coſinus $=\frac{\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{2}}$; ex analogia itaque, ſin. CHD $\left(\frac{\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{2}}\right)$: CD $\left(\frac{Bb-Aa}{A+B+C}\right)=$ ſin. HCD (m): DH, elicitur chorda $DH=\frac{(Bb-Aa)m\sqrt{2}}{(A+B+C)\sqrt{(1+n)}}$; cum deinde angulus HDI ſit anguli CDH complementum ad rectum: erit huius anguli HDI ſinus $=\frac{\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{2}}$, quare in triangulo HKD erit ſinus totus (1): DH$=$ ſin. HDI : $HK=\frac{DH.\sqrt{(1-n)}}{\sqrt{2}}$; nec non

 ſinus

ſinus totus (1) : DH $=$ ſin. DHK $\left(\frac{\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{2}}\right)$: DK $=\frac{DH.\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{2}}$; vnde porro fit IK $=$ ID $-$ DK $=e-\frac{DH.\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{2}}$, et conſequenter tangens anguli HID $=\frac{HK}{IK}=\frac{DH.\sqrt{(1-n)}}{e\sqrt{2}-DH.\sqrt{(1+n)}}$, vel ſubſtituto valore ipſius DH ſupra inuento, oritur tangens HID $=\frac{(Bb-Aa)m}{et(A+B+C)-mt(Bb-Aa)}$, poſita $\frac{\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{(1-n)}}=t$, quae eſt tangens anguli CDH.

§. 8. Inuenta haec tangens fit nulla, et conſequenter machinula motum oſcillatorium perdit, ſi fuerit $Bb=Aa$, aut vero $A:B=b:a$, hoc eſt, ſi pondera vecti annexa A et B ſint in reciproca ratione diſtantiarum ab hypomochlio C. Nam in hoc caſu centrum grauitatis commune cadit in C, in locum fixum, qui vibrationibus vectis non mutatur.

§. 9. Si quaeratur valor ipſius m talis, vt angulus HID, in quem oſcillationes excurrunt, fiat maximus, eruetur, poſitis $Bb-Aa=\alpha$, $A+B+C=\beta$, aequatio (A), $\beta etdm-\beta emdt+\alpha m^2dt=0$; quoniam vero eſt $t=\frac{\sqrt{(1+n)}}{\sqrt{(1-n)}}$, eruitur $dt=\frac{-mdm}{mn.(1-n)}$, quo valore ſubſtituto in aequatione (A), emergit, facta diuiſione per dm, $\beta.et+\frac{\beta em}{n.(1-n)}-\frac{\alpha m^2}{n.(1-n)}=0$, et ſubſtituto in hac vltima aequatione valore ipſius t, factaque multiplicatione per $\sqrt{(1-n)}$, et diuiſione per m, oritur $\beta en+\beta e-\alpha m=0$, aut vero $\beta e\sqrt{(1-mm)}+\beta e-\alpha m=0$, vnde tandem deducitur $m=\frac{2\alpha\beta e}{\alpha^2+\beta^2e^2}=\frac{2e.(Bb-Aa)(A+B+C)}{(Bb-Aa)^2+e^2(A+B+C)^2}$. Vt itaque angulus, in quem oſcillationes excurrunt, fiat maximus, et ſumme conſpicuus, debet vectis AB vibrando abſoluere, angulum, cuius ſinus m allegatum teneat valorem.

§. 10.

§. 10. Vt oſcillationes excurrant in angulum rectum, requiritur tangens HID infinite magna, ſiue $et(A+B+C)-mt(Bb-Aa)=0$, vnde deducitur $e=\frac{m(Bb-Aa)}{A+B+C}$.

§. 11. In horologiis portatilibus antiquis, qualia ante inuenta Hugeniana fabrefieri ſolebant, quorum libramentum vecte ponduſculis vtrinque onerato, et aequalium brachiorum, conſtabat, ponendum eſt, pro angulo HID inueniendo, $a=b$, vnde fit tangens anguli HID $=\frac{(B-A)am}{et(A+B+C)-amt(B-A)}$. Cum vero $A+B$ reſpectu ipſius C fere nihilum ſit, et reſpectu eiusdem C etiam ſit $B-A$ contemnibilis quantitatis: habebitur tangens dicti anguli HID $=\frac{(B-A)am}{Cet}$, cum itaque in dato aliquo horologio tali quantitates B, A, C, a, m, t, omnes ſint conſtantes, atque ſola altitudo ſuſpenſionis e variari poſſit: patet tangentem anguli in quem excurrunt oſcillationes talis horologii eſſe in ratione reciproca altitudinum ſuſpenſionis; ſiue eo magis ſenſibiles reddi oſcillationes, quo breuior eſt altitudo ſuſpenſionis.

§. 12. Quoniam pondus C pro lubitu augeri et minui poteſt, appenſo ſcilicet nouo pondere ex puncto C, vel exſciſſis quibusdam partibus ſimiliter poſitis ex lamina circulari, vt centrum grauitatis ſemper adhuc ſit in C, ponamus $C=B(b-1)-A(a+1)$; quo ſubſtituto in valore tangentis HID ſupra inuento, euadet haec tangens $=\frac{m}{(e-m).t}$; quo caſu excurſio in angulum DIH a ponduſculis A, B, C, non dependet amplius; ſed nec machinula oſcillationibus priuari poteſt, niſi fiat $m=0$, hoc eſt, niſi libramentum quieſcat. In eodem hoc caſu, vt angulus

 HID

HID fiat maximus, requiritur $m = \frac{2e}{ee+1}$; atque vt idem hic angulus fiat rectus, neceſſe eſt, vt ſit $e = m$.

§. 13. Si loco vectis heterodromi A B adhibeatur homodromus C B, fiet $A = 0$, et $a = 0$, vnde tangens anguli $HID = \frac{Bbm}{et(B+C) - mtBb}$, vnde patet, neque in hoc caſu machinulam ab oſcillationibus liberari poſſe, niſi iterum fiat $m = 0$, hoc eſt, libramentum quieſcat.

DISSERTATIONIS HYDRAVLICAE
PARS SECVNDA
CONTINENS
METHODVM DIRECTAM ET VNIVERSALEM SOLVENDI OMNIA PROBLEMATA HYDRAVLICA, QVAECVNQVE DE AQVIS PER CANALES CVIVSCVNQVE FIGVRAE FLVENTIBVS FORMARI AC PROPONI POSSVNT.

§. 1.

Canalis eſto qualiscunque ſiue ſit rectus ſiue curuus, ſiue ſit continuus ſiue compoſitus ex pluribus tubis cylindricis, ſiue denique ſit verticalis, ſiue pro parte horizontalis, ſiue in partibus ſuis diuerſis diuerſimode inclinatus. Plenus ſit hic canalis aqua alioue liquore graui homogeneo et fluidiſſimo; Incipiat autem pergatque accelerando (quantum et quousque poteſt) fluere et ita quidem vt canalis conſtanter plenus maneat, ſuccedente ſcilicet aliunde aqua noua, quae elabentem ex vno orificio ſingulis momentis reſarciat influendo per ſummum orificium ea cum velocitate, qua ſuprema ſuperficies ſubſideret, ſi influxus ſubito ceſſaret. Haec conditio additur facilioris calculi gratia, valet enim methodus, ſi nihil noui liquoris aquei ſubintraret ad omnimodam vsque vaſis canalis depletionem. Quaeritur primo velocitas liquoris effluentis pro data quaslibet quantitate liquoris iam egreſſi; Quaeritur deinde quantum latera canalis in ſingulis locis a transfluente liquore premantur, vel quod eodem recidit, ad quantam altitudinem

nem verticalem liquor eiusdem generis cum transfluente ſuspenſus haerere debeat in fiſtula in aliquo loco inſerta et verticaliter erecta.

§. 2. Detur itaque canalis (Fig. 1.) qualiscunque EC*ce* ; Recta verticalis RB tamquam abſciſſarum axis conſiderata, ad quam ordinatim applicatae RE*e*, PF*f*, FN*n*, BC*c*, quarum partes E*e*, F*f*, N*n*, C*c*, deſignent amplitudines ſeu ſectiones horizontales canalis ; Concipiatur liquor in eo contentus, diuiſus in ſtrata horizontalia infinite paruae craſſitudinis FM*mf*, NL*ln*, &c. quorum puncta intermedia ſeu centra grauitatis G, H, V, I &c. faciant lineam ſiue rectam ſiue curuam GHVI, quam vocabo *lineam centricam* ſeu ſimpliciter *centricam*, quae vtique data erit ob datas curuas EFC, *efc*, quae ex figura data canalis determinantur.

Sit amplitudo prima $Ee = b$, amplitudo vltima $Cc = \omega$; amplitudo aliqua intermedia $Ff = y$, alia intermedia $Nn = r$. Craſſities ſingulorum ſtratorum PR vel $TS = dt$: Erunt ſtrata ipſa $Fm = ydt$, $Nl = rdt$. Sit porro aliqua recta indeterminata ID tangens centricam in I quae dicatur $x =$ longitudini cylindri obliqui liquoris effluentis in directione ipſius ID, cuius cylindri eſt baſis C*c*, et qui contineat quantitatem liquoris iam egreſſi ; velocitas liquoris eo ipſo momento elabentis $= v$. Sit grauitas qua corpora naturaliter animantur $= g$. Nominando iam elementa lineae centricae H*h*, V*v* &c. $= ds$, erunt grauitates, quibus animantur ſtrata in directionibus H*h*, V*v*, &c. $= \frac{gdt}{ds}$; Adeoque pondera vel vires motrices ipſorum ſtratorum in iſtis directionibus $= \frac{gydt^2}{ds}$, $\frac{grdt^2}{ds}$, &c. ipſae vero vires motrices abſolutae ſecundum directionem verticalem $= gydt$, $grdt$, et ita porro. §. 3.

§. 3. Transferendo has vires abſolutas (per princip. hydroſtat. vt in parte prima oſtenſum eſt) ad amplitudinem primam b, erunt illa pro ſingulis $gbdt$; erit ergo integrando per omnes dt, hoc eſt, per totam altitudinem AB (quae dicatur $= a$) $gba =$ preſſioni totali ad Ea verticaliter applicandae et aequipollenti ſummae virium motricium abſolutarum in ſtratis omnibus; Et haec preſſio totalis gba ad amplitudinem primam applicanda eſt ea quae mihi vocari ſolet P.

Sit iam tangens in I lineae centricae GHI ad ſuam ſubtangentem verticalem vt α ad 1, et tangens in G ad ſuam ſubtangentem vt β ad 1. Tangens autem in quolibet puncto intermedio H ad ſuam ſubtangentem vt ds ad dt. Erit vtique per decompoſitionem motus, v ſeu velocitas actualis in I liquoris effluentis ad ſuam ſubuelocitatem verticalem etiam vt α ad 1, adeoque ſubuelocitas illa $= \frac{v}{\alpha}$. Pariter nominando u, velocitatem actualem in H ſecundum Hb, erit eius ſubuelocitas $= \frac{udt}{ds}$. Verum vt inueniatur velocitas actualis u, notandum eſt ſtratorum ſubuelocitates eſſe in ratione reciproca ſuarum amplitudinum ad id vt transmittant eodem tempuſculo elementari quantitates aequales liquoris; faciendo itaque $y . \omega :: \frac{v}{\alpha} . \frac{v\omega}{\alpha y}$, erit $\frac{v\omega}{\alpha y}$ $=$ ſubuelocitati ſtrati Fm; faciendo nunc porro $dt . ds :: \frac{v\omega}{\alpha y} . \frac{v\omega ds}{\alpha x dt}$, erit $\frac{v\omega ds}{\alpha y dt} = u$ ſeu velocitati actuali ſtrati Fm in directione Hb. Hinc velocitas actualis ſtrati primi amplitudini Ee contigui (vbi y ponitur b, et $ds : dt :: \beta . 1$) erit $= \frac{\beta\omega v}{\alpha b}$.

Haud aliter ratiocinandum pro inueniendo progreſſu actuali ſtrati Fm in directione Hb; nam nominando dx progreſſum momentaneum ſtrati vltimi Cc in directione

ID, erit eius ſubprogreſſus in directione verticali $= \frac{dx}{\alpha}$, ſunt autem hic etiam ſubprogreſſus ſtratorum in reciproca ratione amplitudinum, faciendo itaque $y \,.\, \omega :: \frac{dx}{\alpha} \,.\, \frac{\omega dx}{\alpha y}$ erit $\frac{\omega dx}{\alpha y} =$ ſubprogreſſui ſtrati F*m*; Proinde etiam faciendo $dt \,.\, ds :: \frac{\omega dx}{\alpha y} \,.\, \frac{\omega dxds}{\alpha ydt}$, erit $\frac{\omega dxds}{\alpha ydt} =$ progreſſui actuali ſtrati F*m* in directione ſui motus H*b*.

§. 4. Exiſtente iam aqua in motu, ſtrata eius diuerſimode in ſe mutuo agunt vrgendo et reſiſtendo, ac viribus quidem diuerſis pro diuerſitate circumſtantiarum tam loci quam celeritatis: Vocetur itaque tantisper γ vis acceleratrix indeterminata quae ex actione mutua oritur, et u velocitas acquiſita, quam aliquod ſtratum F*m* habet in directione H*b*; adeoque $\gamma ds = udu$, vnde $\gamma = \frac{udu}{ds}$ ducatur hoc in maſſam ſtrati ydt, et prodibit eius vis motrix $\gamma ydt = \frac{yududt}{ds}$ in directione H*b*; vt autem ea habeatur in directione verticali a qua haec produci queat, faciendum eſt $dt \,.\, ds :: \frac{yududt}{ds} \,.\, yudu$, quae erit vis motrix requiſita in directione verticali, quae ergo translata ad amplitudinem primam h dat aequipollentem $hudu$; Integretur haec vt habeatur $\frac{1}{2} huu$, quod per debitam correctionem accommodandum eſt ad omnia ſtrata in toto canali EC*ce* contenta atque ſimul ſumta: Proinde (ob velocitatem ſtrati vltimi $= v$, et primi $= \frac{\beta\omega v}{\alpha h}$) correctum integrale $= \frac{h}{2}$ $(vv - \frac{\beta\beta\omega\omega}{\alpha\alpha hh} vv)$ ſeu $\frac{vv(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)}{2\alpha\alpha h} =$ vi verticali ad E*e* applicandae aequipollenti, a qua ſcilicet ſingula ſtrata vim ſuam particularem ſe mutuo vrgendi obtinent ad id tantum vt niſum ſuum conſeruent eo momento quo aqua effluit velocitate v, quod cum fiat non ſucceſſiue ſed in inſtanti indiuiſibili et a ſola figura canalis pendeat, poterit

haec

haec vis ex tranſlatione orta vocari *vis* vel *potentia ſtatica*, aut ſi magis arrideat, *potentia hydroſtatica*, vtpote quae in ſolo niſu conſiſtit transeundi ab vno ſtrato in locum proxime inferioris, nulla facta attentione ad vim acceleratricem actualem. Haec autem *potentia hydroſtatica* eſt ea ipſa, ſed generaliſſime ſumta, quae inuenta eſt in parte prima ad formandos gurgites pro canali compoſito ex pluribus tubis cylindricis, imo ex infinitis multitudine, qui repraeſentare poſſint vaſa vel canales cuiuscunque figurae irregularis vel curuilineae. Quam enim inuenimus vim motricem (§. XX.) $\frac{bb-\omega\omega}{2b}vv$ pro gurgitibus vniuerſis in canali infinitorum cylindrorum, vbi influxum et effluxum aquae perpendiculariter ad ſtrata extrema fieri poſuimus, eandem nunc vim ſub nomine *potentiae hydroſtaticae* exhibemus per formulam praeſentem $\frac{vv(\alpha\alpha bb-\beta\beta\omega\omega)}{2\alpha\alpha b}$ pro influxu et effluxu quolibet obliquo; vbi ſi applicare eam lubeat ad perpendicularem, ponenda tantum eſt vnitas pro α et β, et habebitur heic $\frac{vv(bb-\omega\omega)}{2b}$, idem prorſus quod ibi. Atque ita per compendium indagauimus et longe quidem generalius, quod in prima parte operoſe ſatis per ambagas inueſtigatum dedimus.

§. 5. Quaerenda porro eſt vis altera, quae naſcitur ex acceleratione actuali liquoris transfluentis: Hunc in finem pono cuiuslibet ſtrati Fm progredientis vim acceleratricem actualem $= \acute{\gamma}$, erit (ob progreſſum actualem vltimi ſtrati Cc per ſpatiolum dx) progreſſus ſtrati $Fm = \frac{\omega dxds}{\alpha ydt}$, adeoque $\frac{\acute{\gamma}\omega dxds}{\alpha ydt} = \acute{u}\,d\acute{u} =$ (art. 3.) $\frac{\omega\omega vdvds^2}{\alpha\alpha yydt^2}$, vnde $\acute{\gamma} = \frac{\omega vdvds}{\alpha ydxdt}$, et vis motrix actualis in directione Hb ſtrati, ſeu $\acute{\gamma}ydt = \frac{\omega vdvds}{\alpha dx}$, adeoque vis motrix verticalis ex qua illa

produci poteſt $= \frac{\omega v d v d s^2}{\alpha d x d t}$, quae translata ad primam amplitudinem h dat aequipollentem $= \frac{h \omega v d v d s^2}{\alpha y d x d t}$, quod vt integretur per totam longitudinem axis AB reſpondentem toti canali, pro quolibet ſtrato et pro qualibet acquiſita velocitate v, debent hic non tantum h et ω ſed etiam $\frac{v d v}{\alpha d x}$ conſiderari tanquam conſtantes, et ita integrando habebimus $\frac{h \omega v d v}{\alpha d x} \int \frac{d s^2}{y d t} =$ vi alteri ex actuali acceleratione liquoris effluentis oriunda, quam vocare liceat *vim hydraulicam*, ad diſtinctionem vis *hydroſtaticae* quae in ſolo niſu vel preſſione in inſtanti exercita conſiſtit ſingulis momentis quomodocunque liquor moueatur.

§. 6. Hae duae vires, *hydroſtatica* et *hydraulica*, componunt vim totalem, quae nimirum generatur ab actione vis primitiuae p, quae inuenta eſt (art. 3.) $= gha$; Aequando itaque hanc cum aggregato illarum duarum (art. 4. et 5.) inuentarum, obtinebimus aequationem generaliſſimam pro determinatione velocitatis quacum liquor quouis momento effluit, quae aequatio haec eſt $\frac{vv(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)}{2\alpha\alpha h} + \frac{h\omega\omega d v}{\alpha d x} \int \frac{d s^2}{y d t} = g h a$; vbi notandum per $\int \frac{d s^2}{y d t}$ intelligi ſummam omnium $\frac{d s^2}{y d t}$, quae continentur non tantum inter Cc et Ff, ſed omnino extremas ab vna ad alteram omnes comprehendendo.

§. 7. Quod ſi lubeat exprimere aequationem per z ſeu altitudinem, vnde corpus naturali grauitate g praeditum delabendo acquirat velocitatem quaeſitam v, ſcribendum tantum eſt per principia dynamica $2gz$ pro vv, et gdz pro vdv; id quod dabit hanc aequationem $\frac{gz(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega)}{\alpha\alpha h} + \frac{g h \omega d z}{\alpha d x} \int \frac{d s^2}{y d t} = g h a$, vel reductione peracta; hanc $(\alpha\alpha hh - \beta\beta\omega\omega) z d x + \alpha h h \omega d z \int \frac{d s^2}{y d t}$

$= \alpha\alpha$

$= \alpha\alpha bbadx$, vel, quia $\int \frac{ds^2}{ydt}$ ſumendum per totam axis longitudinem eſt conſtans adeoque vt datum ſupponi poteſt ſaltem per quadraturas, nominetur illud M; eritque aequatio ad hanc formam reducta $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)\, zdx + \alpha M bb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$: Ex reſolutione huius aequationis invenietur z in quantitatibus datis per x conſtantes, M, α, b, ω, α, β.

Corollarium 1.

Exiſtente effluxus velocitate vniformi, ad quam ſenſibiliter peruenitur citiſſime et quaſi vno ictu oculi, vt in ſuo loco huius ſcripti demonſtrabitur, euaneſcit dz, quo igitur neglecto prodit aequatio algebraica haec $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega) z = \alpha\alpha bba$, vnde quaeſita $z = \frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega}$.

Corollarium 2.

Hinc duo vaſa vel duo canales, qualescunque habeant figuras licet a ſe inuicem diuerſiſſimas, modo eandem habeant altitudinem verticalem a, vt et amplitudines ſupremam et infimam ſeu primam et vltimam b et ω in eadem ratione, ac praeterea α et β vtrobique ſibi proportionales. Effluet aqua ex vtroque canali ſeu vaſe aequali velocitate, poſtquam vtrobique venerit ad vniformitatem.

Corollarium 3.

Si linea centrica GHI eſt linea recta ſiue ſit verticalis ſiue obliqua, erit $\beta = \alpha$ et $ds . dt :: \alpha . 1$, proinde $ds = \alpha dt$, et $\int \frac{ds^2}{ydt}$ ſeu $M = \alpha\alpha \int \frac{dt}{y}$; id quod aequationem generalem $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)\, zdx + \alpha M bb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$ mutat in hanc $(bb - \omega\omega)\, zdx + \alpha bb\omega dz \int \frac{dt}{y} = bbadx$. Qualiscunqne au-

autem ſit ſitus centricae rectilineae, ſiue verticalis ſiue obliquus, erit in caſu effluxus vniformis ſemper $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$.

Corollarium 4.

Quod ſi manente figura canalis vel vaſis vt et vtraque eius amplitudine ſumma et ima E*e*, C*c* fiat tantilla mutatio in directione liquoris influentis et effluentis, poteſt illa mutatio etſi fere ſit inſenſibilis producere mutationem inſignem in velocitate vt ex. gr. ſi in figura II. vaſi vel canali EC*ce* adaptentur margines vel labra E*mne* et C*pqc* tantillae altitudinis verticalis E*m*, C*p*, ita vt amplitudines *mn*, *pq* maneant eaedem cum prioribus E*e*, C*c*, ipſaque tota canalis altitudo ſenſibiliter non augeatur; nemo facile crediderit, quanta hinc in effectu futura ſit velocitatis mutatio: Quoniam enim nunc aqua influit et effluit non amplius oblique ſed verticaliter ob directionem labrorum verticalem, quae ideo etiam dat ſitum verticalem tangentibus extremis lineae centricae, facitque $\alpha = \beta = 1$; manifeſtum eſt aequationem generalem $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$, nunc ſubito aſſumere hanc faciem $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz = bbadx$, atque pro velocitate vniformi fore $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$; Quod monere operae pretium duxi, ne alioquin, ſi in experimentis capiendis ad minimas circumſtantias, quae nullius momenti eſſe videntur, non ſatis accurate attenditur et inde quod prouenit cum noſtris minus recte quadrare falſo apparet, ne inquam theoria noſtra ſtatim erroris ſuſpecta habeatur: Sicuti accidit aliquando Cl. Poleno Viro alias in experimentalibus induſtrio et circumſpecto, qui viſurus quas diuerſas quantitates aquae dato tempore emitterent diuerſae amplitudinis lumina, eidem

vaſi

vaſi aqua pleno admota, ſumſerat ad hoc negotium varias laminas non admodum ſpiſſas, vnamquamque peculiaris amplitudinis foramine pertuſam, vt nunc hac nunc illa obtegeret aperturam in fundo vaſis factam; contigit autem, ni fallor, forte fortuna, vt cum aliqua ex illis laminis experimentum bis repetierit et poſtea pluries de induſtria, vbi ſemper attonitus obſeruauit, vnam eandemque illam laminam per ſuum idem foramen modo maiorem modo minorem aquae copiam eodem tempore emiſiſſe, prout vna vel altera eius laminae facies extrorſum ſpectaret; tandem foraminis forma curatius examinata fuit, atque tum obſeruatum, figuram foraminis, licet in tenui lamina inſculpti, non fuiſſe exacte cylindricam ſed inſtar conuli truncati baſin vnam fuiſſe tantillum ampliorem quam alteram; quod iam ſufficiebat ad detegendam rationem, cur extrorſum hiante baſi ampliore foraminis, aqua largius effluxerit quam in ſenſu contrario, idque duplicem ob cauſam, nam et craſſior fuit vena aquea exiliens et maior eius velocitas, ceu patet ex formula noſtra $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$, vbi palam eſt valorem huius fractionis eſſe maiorem ſi maior fuerit w, reliquis b et a manentibus, et contra fore minorem ſi ω minor fuerit.

Corollarium 5.

In caſu quo $\alpha b = \mathfrak{C}\omega$, ſeu vbi $\alpha . \mathfrak{C} :: \omega . b$, habebitur $M\omega dz = \alpha a dx$, proinde $z = \frac{\alpha a x}{M\omega}$, vnde liquet creſcente effluxu x in infinitum, etiam z in infinitum creſcere, adeoque velocitatem nunquam ad vniformitatem conuergere: Quod ſane apparet quoque ex ipſa formula (*coroll.* 1.), eſt enim $z = \frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega} =$ (in hoc caſu) $\frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \alpha\alpha bb} = \frac{a}{0} = \infty$.

Scho-

Scholium 1.

§. 8. Notandum in canalibus et tubis non admodum amplis et ſufficienter longis hoc communiter obſeruari, ſicuti iam innui in praefatione, quod ſtrata F*m* (Fig. 1.) in fluxu conſtituta ex ſitu horizontali ſe facile componunt ad ſitum perpendicularem lateribus ſeu potius lineae centricae GHI, quod vtique ex motu ſupremae ſuperficiei E*e* (ſi nullus alius liquor ſuccedit) vt ex. gr. in tubis barometricis et aliis eiusmodi ſiphonibus non vltra vnam duasve lineas in diametro habentibus, luculenter patet, ſiue hoc fiat ob adhaeſionem fluidi ad latera, quae circum circa in ambitu ſtratorum aequabilis eſſe debet vt quam commodiſſime fluidum moueatur et ſine notabili frictione, ſiue id contingat aliam ob cauſam phyſicam huius loci non eſt inquirere: ſufficit hoc loco inſinuare, hanc circumſtantiam nihil officere noſtrae theoriae; Nam, quia per legem generalem centrum grauitatis corporum quacunque de cauſa in motum concitatorum eodem modo eademque velocitate in ſua directione inchoata mouetur, ac ſi vniuerſa eorum materia in ipſo centro grauitatis eſſet concentrata, poterit vtique materia cuiuslibet ſtrati F*m* conſiderari tanquam congeſta in centro grauitatis H vel *h*. Cum igitur in canalibus oblongis ac non admodum amplis, quaelibet eorum modica portio ſumi poſſit pro quaſi cylindrica vel priſmatica, euidens eſt vnumquodque ſtratum F*m*, leuiſſimam ob cauſam ſitum ſuum horizontalem F*f* mutare poſſe in *rs* perpendicularem ad H*h*, manente interim H*h* eiusdem longitudinis, et quantitate ſtrati noui *rtos* aequali ſtrato FM*mf*. Concipimus itaque quo pacto ſingula reliquorum N*l* (ſine vlla alia mutatione ſiue in velocitate ſiue

ſiue in directione ſecundum V*u*) ſe componere poſſint in ſitum perpendicularem ad latera canalis ſeu potius ad lineam centricam.

Quod ſi iam porro attendimus quid fieret, ſi obturaretur exitus C*c*, eiusque loco aperiretur in latere canalis foramen *cd* eiusdem amplitudinis cum C*c*; Haud difficulter intelligimus, aquam per aperturam *cd* ſub eadem obliquitate ad *cd* erumpere debere, ſub qua erumpebat per C*c*, eiusque adeo directionem *bg* fore horizontalem. Cum praeterea apertura *cd* ponatur aequalis amplitudini C*c*, et conatus erumpendi per C*c* iam detorqueatur verſus *dc* (per vulgarem legem hydroſtaticam) oportet ſane velocitatem aquae per *cd* effluentis eandem fore quam determinauimus pro C*c*.

Vnde et hoc colligitur, ſi ad foramen *cd* adaptaretur nouus canalis horizontalis; in quo nempe linea centrica horizontalis ſit, fore vt motus et velocitas aquae per eum fluentis et effluentis eodem modo ſe habeat, ac ſe haberet, ſi idem ille nouus canalis (clauſo *cd*) ad C*c* adaptaretur ſecundum directionem ID, ſed in quo aqua fluens deſtituta ſupponi deberet propria ſua grauitate. Adeo vt ſtratorum pondera ad amplitudinem E*e* translata hic etiam faciant eandem ſummam *gha* aeque ac ſi abeſſet nouus canalis, ac proin in generali aequatione expreſſa (art. 7.), $(\alpha\alpha bb - \mathfrak{E}\mathfrak{E}\omega\omega)zdx + \alpha M bb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$, nihil aliud mutandum ſit quam vt M ſeu $\int \frac{ds^2}{ydt}$ nunc exprimat ſummam omnium $\frac{ds^2}{ydt}$ quae in ambobus continentur canalibus. Velocitas vero vniformis vtrobique tam in ſimplici quam in combinato canali erit eadem, quia ter-

minus in quo reperitur M, in caſu vniformitatis euaneſcit; vtpote ſemper ea quae habetur per $z = \frac{\alpha\alpha bba}{\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega}$.

De preſſionibus quas ſuſtinent latera canalis a liquore transfluente.

§. 9. Vt recte clareque percipiamus, in quo conſiſtat vis illa, quae exeritur in latera canalis, dum in illo fluit liquor, ſciendum eſt illam vim nihil aliud eſſe quam quae originem habet a vi compreſſionis, qua nimirum partes fluidi ſibi inuicem contiguae, ex. gr. EF*fe* et CF*fc*, vna ad alteram adigitur, vnde in ipſo contactu F*f* per actionem et reactionem gignitur vis intermedia, quam vocare ſoleo *immaterialem*, quia quaſi extra partes ſe inuicem prementes, inter vtramque tamen intermedia, reſidet, atque ad vnam non magis pertinet quam ad alteram; Huius vis proprium eſt vrgere partem liquoris praecedentem *antrorſum* ſeu ea verſus qua tendit, ſequentem vero *retrorſum* ſeu ea verſus vnde venit, faceréque vt pars liquoris ſequens, quae a viribus translatis propellitur, atque pars liquoris praecedens cui aliquid accelerationis imprimere debet, acquirant in ipſo contactu aequalitatem virium acceleratricium, quemadmodum idem contingere dudum monuimus in corporibus ſolidis, quae diuerſis viribus acceleratricibus ſeorſim animata, quando in ſe mutuo agere incipiunt, oriri in eorum contactu vim intermediam *immaterialem* ad vtrumque corpus communi iure ſpectantem, quae ita temperet vtriusque vim acceleratricem particularem, vnam diminuendo, alteram augendo, vt inde in tota maſſa combinata ex duobus iſtis corporibus, reſultet vna communis vis acceleratrix.

§. 10.

§. 10. Id vero diſcriminis eſt in agendi modo, quod in corporibus ſolidis directe in ſe inuicem agentibus, vis illa immaterialis agat prorſum et retrorſum inſtar elaſtri alicuius rectilinei, quod inter vtrumque corpus poſitum ſeſe expandere conatur; ſed in partibus fluidi in ſe mutuo agentibus, vis immaterialis intercedens conſiderari debeat tanquam aura elaſtica, quae non tantum in partes oppoſitas ſed in omnes plagas circumfuſas ſeſe exerit, ex quo nunc facile intelligitur, ab hac ipſa vi immateriali prouenire preſſionem, de qua hic eſt quaeſtio, quae nempe exercetur in latera canalis, et quae viciſſim ab hiſce coërceri debet, dum agit libere antrorſum et retrorſum in partes liquoris quibus interiacet.

§. 11. Reſtat igitur, vt ſecundum datam hanc ideam de vi immateriali, eius quantitatem vel menſuram determinemus: Sit illa vbilibet in Ff quaerenda, quam dicamus $= \pi$. Nunc ita procedo: Finge tantisper partem canalis EFfe (durante fluxu) ſubito auferri, manente reliqua CFfc in ſtatu ſuo cum omnibus ſuis circumſtantiis, atque eodem momento ad amplitudinem Ff apponi novam vim motricem ipſi π aequalem; concipis vtique, hoc modo effluxum liquoris ex truncato canali egredientis acceleratum iri (ſaltem in primo temporis momento) perinde ac ſi integer manſiſſet canalis; Quare iam conſiderabo canalem reſiduum CFfc tanquam canalem integrum, cuius ſuprema ſeu prima amplitudo eſt y ſeu Ff, amplitudo alia intermedia Nn variabilis $= r$, ſtratumque adiacens N$l = rdt$. Hinc ſi (art. 4.) pro b ſubſtituo y, habebo $\frac{vv(\alpha\alpha yv - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{2\alpha\alpha y} =$ vi hydroſtaticae, quod enim

in primo puncto G dicebatur ϵ, id in puncto H eſt $\frac{ds}{dr}$, ratio ſcilicet tangentis ad ſubtangentem; et (art. 5.) $\frac{y\omega v\, iv}{\alpha\, ix}\int\frac{ds^2}{rdt}=$ vi hydraulicae, vbi in integratione ſupponitur r continuari ab ω vsque ad y.

§. 12. Aggregatum harum duarum virium, hydroſtaticae et hydraulicae, aequari deberet vi primitiuae P, quae hic eſſet (art. 3. et 6.) gyt, nominando $BP=t$ ſi nimirum haec ſola ageret in liquorem in canali truncato contentum, ſed quia π coniunctim agit cum gyt, oportet ſane hanc inſtituere aequationem $\frac{vv(\alpha\alpha yy-\frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{2\alpha\alpha y}+\frac{y\omega vdv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}=gyt+\pi$; Ex qua ſtatim emergit valor quaeſitus ipſius π: Transpoſito enim gyt, prodit $\frac{vv(\alpha\alpha yy-\frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{2\alpha\alpha y}+\frac{y\omega vdv}{\alpha dx}\int\frac{ds^2}{rdt}-gyt=\pi$; vbi quoque monendum in integratione $\int\frac{ds^2}{rdt}$ variabilem r ſumi debere a B vsque ad P; vnde pro qualibet aſſumta y dabitur $\int\frac{ds^2}{rdt}$, dicatur ergo hoc $=N$, eritque $\frac{vv(\alpha\alpha yy-\frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{2\alpha\alpha y}+\frac{Ny\omega vdv}{\alpha dx}-gyt=\pi$. Quoniam igitur ex reſolutione aequationis generalis (art. 7.) habetur valor ipſius vv ſeu $2gz$, is in hac ſubſtitutus dabit valorem ipſius π in g et quantitatibus mere linearibus.

§. 13. Quod ſi nunc porro ſcire lubeat, ſi fiſtula aliqua vtrimque aperta in loco quolibet f canali inſeratur erigaturque ad ſitum verticalem, quousque in illa liquor aſcendere debeat, ob hanc preſſionem π quae facit vt aſcendat: attendere conuenit, quod π aquiualet ponderi

ali-

alicuius cylindri ex liquore grauitate naturali g animato confecti, qui pro baſi habet amplitudinem Ff ſeu y, et pro altitudine illam ipſam liquoris in fiſtula haerentis; vnde haec altitudo erit $= \frac{\pi}{gy}$, ad quam ſuſpenſus haerebit liquor in fiſtula, inuariabiliter quidem poſtquam velocitas liquoris effluentis ad ſenſibilem vniformitatem peruenerit, ſed antequam hoc fiat (fit autem in momento quaſi) aſcendere perget liquor in fiſtula, donec acquiſiuerit locum ſuum ſtabilem, quando nempe liquor effluens non amplius ſenſibiliter acceleratur.

§. 14. Accidit in quibusdam caſibus, vt valor ipſius π euadat negatiuus, quando ſcilicet in illo quantitates negatiuae $\frac{-vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2} - gyt$ praeualent affirmatiuis $\frac{vv}{2y} + \frac{y\omega\omega dv}{\alpha dx} \int \frac{dt^2}{rdt}$; Aut iam exiſtente velocitate in ſua vniformitate, ita vt $dv = 0$, quando $\frac{vv\omega\omega ds^2}{2\alpha\alpha y dt^2} + gyt$ maius eſt quam $\frac{vvy}{2}$: id quod contingere poteſt, non tantum in illis caſibus, vbi αy minus eſt quam $\frac{\omega ds}{dt}$, ſed etiam in illis, vbi αy maius quam $\frac{\omega ds}{dt}$, modo interim gyt ſat magnum ſit vt eius exceſſus ſupra $\frac{y\omega v dv}{\alpha dy} \int \frac{ds^2}{rdt}$ ſuperet prioris defectum. Quocunque autem modo id fiat, palam eſt in eiusmodi caſibus compreſſionem conuerti in relaxationem, qua fit, vt latera canalis circa Ff, non tantum plane non extrorſum premantur, ſed omnino introrſum (ſi laterum rigiditas id non impediat) contrahantur: Vnde ſequitur, fiſtulam canali implantatam ſed ex alto ad imum demiſſam verticaliter, vbi hiet in vaſculum liquore plenum, poſſe liquorem quaſi per ſuctionem ſurſum attolli ad altitudinem $= \frac{\pi}{gy}$.

Scholium 2.

§. 15. Hactenus non attendimus ad cauſas quasdam particulares et acceſſorias (non ſemper locum habentes) quae alterare poſſunt, ſeu preſſiones ſeu ſuctiones π, noſtra methodo determinatas. Inter tales cauſas haec praecipue occurrit, quae facit vt aqua in motu conſtituta, offendens in via ſuperficiem immobilem, ei per allapſum imprimat vim, quae vocatur *vis reſiſtentiae fluidorum*, proportionalis vtique partim quadrato velocitatis partim quadrato ſinus obliquitatis incidentiae, vt notum eſt. Eo ipſo itaque haec vis fit inſenſibilis in canalibus anguſtioribus oblongis; In iis enim ob FM, ſere parallelam ipſi H*b* quae eſt directio motus fluidi cum venit ad F*f*, ſicuti in quolibet alio loco N*n*, directio V*u* fere parallela eſt ipſis NL, *nl*; ſinus incidentiae pro nullo reputari poteſt. In canali ex tubis cylindricis conflato, ſinus ille prorſus nihil eſt, quia directio fluidi omnino eſt parallela lateribus cylindrorum per totam canalis longitudinem. Alia inſuper cauſa acceſſoria, quae turbare poſſet effectum a preſſione π oriundum, reperitur in canali valde incuruato, in quo quippe liquor celeriter fluens acquirit vim centrifugam (de qua alibi egimus), haec vis centrifuga maiorem redderet preſſionem π, quam reuera eſt in parte conuexa canalis, ſed minorem in parte concaua eiusdem. Quocirca ſi cui volupe eſſet experimentnm inſtituere ope fiſtulae canali implantandae, inſertio facienda eſſet neque in conuexitate neque in concauitate curuedinis, ſed a latere, ita vt fiſtula exeat ex canali perpendiculariter ad planum conuexitatis et concauitatis, et deinde, ſi planum illud non ſit horizontale, vt fiſtula quantum opus inflectatur donec ſitum verticalem obtineat.

Co-

Corollaria generalia circa velocitates et preſſiones.

§. 16. In effluxu liquoris vniformi et aequabili, aequatio generalis (art. 6.) mutatur ob $dv = o$, in hanc $\frac{vv(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)}{2\alpha\alpha b} = gba$, ſeu $vv = \frac{2\alpha\alpha gbba}{\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega}$; Vnde hoc elegans theorema deducitur: Si duo ſint vaſa vel canales habentes aequales altitudines verticales, aequalesque amplitudines tam ſupremas quam infimas, qualescunque de caetero habeant canales figuras et quantumuis diſſimiles inter ſe, dummodo earum centricae ita ſint comparatae, vt ratio inter α et β in vno ſit eadem quae eſt inter α et β in altero vaſe vel canali: Dico ex vtroque (ſub intellige iugiter pleno exiſtente) liquorem, poſtquam ad aequabilem effluxum peruenerit, effluxurum vtrobique eadem velocitate. Quod ſane patet ex ipſo valore ipſius vv qui eſt $\frac{2\alpha\alpha gbba}{\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega}$, vtpote in quo amplitudines intermedia y haud reperiuntur: Sint ex. gr. duo vaſa cuiuscunque figura ABCD, EFGH (Fig. III.), quorum lineae centricae ſint rectae, et quidem nil refert, an ſint verticales an obliquae, aut vna magis minusue oblique quam altera, in omnibus enim his caſibus erit vtrobique ſemper $\alpha = \beta$, dummodo habeant illa duo vaſa aequales altitudines verticales a, item aequales amplitudines extremat AD = EH $= b$, et BC = FG $= \omega$, aut, quod ſufficit, modo ſit AD . EH :: BC . FG, ſintque illa vaſa conſtanter plena aqua alioue liquore homogeneo, in quibus nempe vtrobique eſt eadem grauitas g naturalis animans ſtrata, erit velocitas maxima et vniformis aquae per BC effluentis, aequalis velocitati maximae et vniformi aquae effluentis per

FG

FG; In tali enim caſu habetur vtrobique (art. 7.) ob $dz = 0$ et $\alpha = \beta$ habetur inquam $(bb - \omega\omega)z = bba$, adeoque $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega}$ conformiter corollario 2. art. 7, et vt alias in prima parte pro vaſe cylindrico tantum inuenimus; manifeſtum interim eſt valorem $\frac{bba}{bb - \omega\omega}$ pro data altitudine a vtriusque vaſis eſſe eundem ſi ratio inter b et w vtrobique ſit eadem, hoc eſt, ſi AD.EH::BC.FG: Notandum autem nos hic abſtrahere a contractione venae aqueae, quae aliquousque vltra orificium obſeruari ſolet, in illis praecipue vaſis, quae ſubito in foramen deſinunt in fundo latiori apertum, ſecus ac fit in illis figuram ABCD habentibus et quaſi in tubum cylindricum conuergentibus, in quibus nulla conſpicitur ſenſibilis venae contractio; Interim ſi eius quoque habenda eſſet ratio, conſiderari deberet vas tanquam continuatum ad maximam venae contractionem, vbi contrahi ceſſat, atque tunc amplitudo venae contractae eſſet ſumenda pro ipſo foramine inferiori ω, huiusque diſtantia ab amplitudine ſumma pro vera altitudine verticali.

§. 17. Si iam ſtantibus iisdem conditionibus, vt in praeced. duorum vaſorum aequealtorum ABCD, EFGH (Fig. III) et in extremitatibus aeque amplorum atque centricas rectas habentium, habeant praeterea adhuc tertiam amplitudinem alicubi LM, NO ſibi mutuo aequalem et ab orificiis BC, FG aequaliter diſtantem. Erit non tantum velocitas maxima (per praeced.) vtrobique aequalis, ſed etiam preſſiones in LM et in NO aequales erunt. adeoque in fiſtulis iis in locis inſertis atque in ſitum verticalem inflexis, aqua vtrobique ad altitudinem eandem ſuſpenſa haerebit: Patet veritas huius ex aequatione

tione (art. 12.) quae ob $\alpha = \beta = \frac{ds}{dt}$ in caſu velocitatis vniformis abit in hanc ſimpliciorem $\frac{vv(yy-\omega\omega)}{2y} - gyt = \pi$, vel (ſcribendo $2gz$ pro vv) in hanc $\frac{gz(yy-\omega\omega)}{y} - gyt = \pi$, in qua quia pro vtroque vaſe ſunt eadem z, y, ω, g, t, debet vtique reſultare idem valor ipſius π, proindeque etiam ipſius $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy-\omega\omega)}{yy} - t = \frac{hha(yy-\omega\omega)}{yy(hh-\omega\omega)} - t$.

§. 18. Hinc ſi omnes LM, NO in aequalibus diſtantiis verticalibus a BC, FG, eſſent aequales, id quod fieret, ſi vaſa illa duo ABCD, EFGH eſſent ex. gr. conoidica truncata eiusdem generis, vnum rectum, alterum ſcalenum, in hoc caſu non ſolum velocitates vniformes quibus aqua ex vtroque vaſe efflueret forent aequales, ſed etiam preſſiones in ſingulis altitudinibus aequalibus forent aequales, adeoque etiam ſuſpenſiones aquae in fiſtulis haerentis haberent in vtroque vaſe eandem altitudinem.

§. 19. Quoniam aequatio (art. 7.) inuenta pro velocitate generaliter determinanda, ſiue iam ſit aequabilis ſiue nondum aequabilis, dat $dx = \frac{\alpha Mhh\omega dz}{\alpha\alpha hha - \alpha\alpha hhz + \beta\beta\omega\omega z}$; ſubſtituatur hic valor in aequatione pro preſſionibus π (art. 12.) et $2gz$ pro vv, habebimus $\frac{gz(\alpha\alpha yy - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{\alpha\alpha y} + \frac{gNy(\alpha\alpha hha - \alpha\alpha hhz + \beta\beta\omega\omega z)}{\alpha\alpha Mhh} - gyt = \pi$, hinc altitudo liquoris in fiſtula ſeu $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(\alpha\alpha yy - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{\alpha\alpha yy} + \frac{N(\alpha\alpha hha - \alpha\alpha hhz + \beta\beta\omega\omega z)}{\alpha\alpha Mhh} - t$; Quae adeo pro quacunque determinata z, exprimit generaliter altitudinem liquoris in fiſtula. Hinc, quod curioſum eſt, inuenitur ſtatim altitudo illa initialis, hoc eſt, ea quae obſeruaretur in fiſtula

primo momento quo orificium inferius aperiretur et liquor in procinctu eſſet exeundi; cum enim primo temporis momento ſit adhuc $z = 0$, erit certe (deletis z) $\frac{\pi}{gy} = \frac{Na}{M} - t$.

§. 20. Ante hanc demonſtrationem, potuiſſet aliquis dubius haerere, annon forte in momento quo orificium BC aperitur et antequam liquor in actualem motum erumpat, annon, inquam, preſſiones in quolibet loco LM adhuc eaedem ſint, ſaltem per momentum temporis, quae modo antē fuerant, cum orificium BC eſſet adhuc clauſum vel obturatum: Verum trita et vulgaris lex hydroſtatica, vbique recepta, docet, pro caſu vaſis obturati in BC, liquorem in fiſtula alicubi in circumferentia ſtrati alicuius LM inſerta et verticaliter erecta haerere ſuſpenſum in altitudine $= a - t$, hoc eſt, in eodem horizonte cum ſuperficie ſuprema AD liquoris in vaſe contenti. Nunc autem videmus rem aliter ſe habere in caſu orificii clauſi BC, et aliter in caſu aperti eiusdem, etiamſi liquor nondum actualiter effluat. Quia enim N, tanquam pars, minor eſt quam tota M, erit $\frac{Na}{M}$ minor quam a, adeoque etiam $\frac{Na}{M} - t$ minor quam $a - t$. Vnde patet, in primo inſtanti, quo operitur orificium BC, liquorem iam aliquid quaſi amittere vel potius remittere de ſua grauitate, quod impendit non ad premendum latèra ſed ad propellendum liquorem, adeo vt latera vaſis non amplius tam grauiter premat, quam fecerat ante aperturam factam. Interim etiam hic monendum, me abſtrahere a cauſis acceſſoriis, quae inuentam altitudinem in fiſtula $\frac{Na}{M} - t$ poſſent alterare: Ex. gr. figurae vaſis aliquid dandum eſt, ſi enim eſſet

val-

valde amplum et ſubito conuergeret in anguſtum foramen, tunc ſine dubio noſtra theoria poſſet abludere ab eo quod experientia monſtraret; ratio eſt, quia theoria ſupponit, ſtrata FM, NL (Fig. 1.) eam diſpoſitionem ad motum affectare (etiamſi nondum actu moueantur) vt per totum decurſum amplitudines F*f*, N*n*, &c. conſeruent ſitum horizontalem vndique ad latera vsque extenſum atque inſuper linea centrica GHI transeat vbique per puncta media G, H, V, I, quod quidem iis in vaſis et canalibus, quorum latera paulatim, neque ſubito, ad orificium inferius conuergunt vel diuergunt, accurate ſatis ita obtinere debet vt theoria ſupponit, ſed in aliis valde amplis et deſinentibus in fundum amplum quod pro exitu habet foramen anguſtum, in hisce, vt probabile eſt, ſtrata ſe non extendunt per totas vaſis amplitudines, ſed aliquousque tantum, prout id requirit qualitas liquoris, non perfecte fluidi ſed magis minusue tenacis, vt a frictione minimam, quae ſit poſſibilis, patiatur reſiſtentiam, relicta nimirum parte liquoris prope latera vaſis in quiete vel ſine ſufficiente diſpoſitione ad motum; vnde fieri poteſt, vt in tali vaſe gurges continuus ſeu aliqua quaſi catarrhacta qualem fere Newtonus concepit, formetur, quamuis non ea neceſſaria lege quam indicauit. Intelligitur ex dictis, in huismodi vaſis non eſſe conſiderandam eorum figuram externam et artificialem, ſed illam internam gurgitis continui a natura formati, non qualem concepit Newtonus, ſed quae optime conuenit qualitati vel conſtitutioni liquoris. In huius ergo gurgitis ſuperficie ambiente, ſi poſſet implantari fiſtula; obſeruaretur liquoris in illa ſuſpenſi altitudo omnino ſemper vt regula noſtra poſtulat, ſiue iam ſit in motu, ſiue moueri incipiat liquor in vaſe.

§. 21.

§. 21. Cum vero non poſſit facile ſenſibus obſeruari, quousque in vaſe peramplo gurges vel catarrhacta terminetur, ſeu vbinam eius ſuperficies ambiens exiſtat, ſecurius erit ſi fiſtula intra vas vsque ad meditullium, hoc eſt, vsque ad lineam centricam perpendiculariter penetret, ac dein pars altera fiſtulae extra vas ſurſum inflexa ſit verticalis. Hoc enim modo altitudo liquoris in fiſtula hoc vnicum monſtrat, quanta ſit liquoris compreſſio in loco lineae centricae quem orificium fiſtulae attingit, et vbi cauſae illae acceſſoriae effectum compreſſionis alterantes, de quibus ſupra (art. 15.) egimus, iam nihil officiunt. Id tamen curandum, vt ſaltem portio fiſtulae intra liquorem vaſis intrudenda ſit ſatis gracilis, ne alioquin nimia eius craſſities libero motui liquoris aliquid impedimenti obiiciat. His probe obſeruatis, non dubito accuratiſſime obſeruatum iri ſequentia, 1°. generalem altitudinem liquoris in fiſtula fore (art. 12 et 13.) $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(\alpha x v y - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega}{\alpha\alpha yy} + \frac{N\omega dx}{\alpha dx} - t$, durante adhuc effluxus acceleratione; 2°. Sed ceſſante ſenſibili acceleratione, vbi nempe velocitas peruenerit ad ſenſibilem vniformitatem, fore $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(\alpha\alpha yy - \frac{ds^2}{dt^2}\omega\omega)}{\alpha\alpha yy} - t$; 3°. Altitudinem initialem fore (art. 19.) $\frac{\pi}{gy} = \frac{N\alpha}{M} - t$.

Applicatio theoriae noſtrae ad exempla vaſorum et canalium ſemper plenorum.

§. 22. Sit vaſis alicuius linea centrica in ſitu verticali, pro hoc caſu faciliori vbi $\alpha = \beta = 1$, habetur (art. 7.) $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega} \times (1 - 1 : f^{\frac{(bb - \omega\omega)x}{Mbb\omega}})$ id quod inuenitur ex reductione

ductione aequationis ibi traditae et huic caſui applicatae $(bb-\omega\omega)\,zdx + Mbb\omega dz = bbadx$, poſito ſcilicet $lf = 1$. Adeoque exiſtente $x = \infty$, hoc eſt, in caſu aequabilis effluxus ſeu velocitatis vniformis, erit $z = \frac{bba}{bb-\omega\omega}$, vnde fluit theorema (art. 16.) iam demonſtratum. Sit igitur vas ABCD (fig. IV.) cuiuscunque figurae cuius centrica vel altitudo verticalis $= a$, habeatque ſibi adaptatum canalem CK conflatum ex pluribus tubis, ex. gr. tribus cylindricis CG, FI, HK in ſitu horizontali poſitis; Sit amplitudo ſuprema AD (ad quam vas cum tubis iugiter plenum ſupponitur) $= b$, amplitudines CE $= m$, FG $= n$, HI $= g$, et foramen vltimi tubi $= \omega$. Dico fore ſemper $z = \frac{bba}{bb-\omega\omega}$, adeo vt nec figura vaſis, nec multitudo tuborum, nec eorum amplitudines in conſiderationem veniant, modo prima b et vltima ω ſint data. Neque etiam ſcire attinet, vtrum gurges vel catarrhacta ſeſe extendat per totam vaſis capacitatem, an tantum partem aliquam eius circa lineam centricam occupet. Res eſt clara per art. 15. quia canalis CK ſupponitur horizontalis, ideoque eadem ſemper eſt velocitas vniformis quae eſſet ſi foramen ω immediate ad CE eſſet adaptatum ope laminae alicuius perforatae ad aperturam CE applicandae.

Corollarium

Si ω ſit valde paruum reſpectu b, erit $z = a$, ac proinde velocitas aquae vniformiter effluentis, quae maxima eſt quam acquirere poteſt, erit aequalis ei, quam acquirit corpus graue cadendo ex altitudine $= a$.

§. 23. Pro inuenienda altitudine liquoris in fiſtula implantanda alicubi in canali horizontali CK, notetur in

hoc caſu eſſe $t=0$, quia t ſignificat exceſſum altitudinis verticalis loci vbi fiſtula inſeritur ſupra altitudinem foraminis, per quod liquor egreditur, ſeu, quod idem eſt, t ſignificat altitudinem loci inſertionis fiſtulae ſupra locum effluxus: Hic autem ob poſitionem canalis horizontalem, ipſa quoque centrica quaſi horizontalis cenſetur, praeſertim ſi eius tubi, ex quibus canalis componitur, non admodum ſunt ampli, ita vt (art. 22.) ſtrata liquoris per illos fluentis fiant verticalia. Erit igitur altitudo liquoris in fiſtula (art. 19.), ob $\alpha = \beta = \frac{ds}{dt}$, ſeu $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy-\omega\omega)}{yy} + \frac{N(bbz - bbz + \omega\omega z)}{Mbb}$; verum, ob $t=0$, erit quoque (art. 12.) $N=0$: Proinde $\frac{\pi}{gy} = \frac{z(yy-\omega\omega)}{yy}$. In caſu velocitatis aequabilis, vbi (art. praeced.) habetur $z = \frac{bba}{bb-\omega\omega}$, quo valore ſubſtituto, prodibit altitudo in fiſtula, $\frac{\pi}{gy} = \frac{bba(yy-\omega\omega)}{yy(bb-\omega\omega)}$. Adeoque pro tubo primo CG, vbi y eſt m, erit illa altitudo $= \frac{bba(mm-\omega\omega)}{mm(bb-\omega\omega)}$, pro ſecundo tubo FI, vbi y eſt n, erit illa $= \frac{bba(nn-\omega\omega)}{nn(bb-\omega\omega)}$, pro tertio tubo HK, vbi y eſt q, erit altitudo in fiſtula $= \frac{bba(qq-\omega\omega)}{qq(bb-\omega\omega)}$, et ſic porro quotquot eſſent tubi canalem componentes. Quae omnia accuratiſſime reſpondent experimentis de hac re ſumtis.

Coroll. Altitudo initialis in fiſtula eſt $=0$; in hoc enim caſu tam z quam $N=0$:

§. 24. Quod attinet ad altitudinem liquoris in fiſtula inſerenda aliquo in loco ipſius vaſis (et ſi opus producenda vsque ad lineam centricam, quam inpoſterum ſemper rectilineam verticalem, alteram vero canali ad vas adaptato vt horizontalem ſupponimus). Sit locus inſertionis in aliquo puncto ſtrati indeterminati LM, cuius diſtantia ab horizonte infimo $= t$, amplitudo gurgitis (ſi non ſit

ipſa

ipſa LM) quaecunque illa ſit per experientiam capienda $= r$; habebitur altitudo liquoris in fiſtula (per art. 11. huc applicatum) $= \frac{z(rr-\omega\omega)}{rr} + \frac{N(bba-bbz+\omega\omega)}{Mbb} - t$, vbi $N = \int\frac{dt}{r}$ contentum inter BE et LM, et $M = \int\frac{dt}{r}$, ſed contentum inter BE et AD (art. 7.). Pro velocitate liquoris vniformiter effluentis, vbi $z = \frac{bba}{bb-\omega\omega}$, ſubſtituatur hic valor pro z, et prodibit altitudo in fiſtula $= \frac{bba(rr-\omega\omega)}{rr(bb-\omega\omega)} - t$, (euaneſcit enim terminus in quo N et M habentur); addita itaque altitudine t ſeu loci inſertionis, habebitur totalis altitudo ſummitatis liquoris haerentis in fiſtula ſupra horizontem infimum BE $= \frac{bba(rr-\omega\omega)}{rr(bb-\omega\omega)}$. Quod ſi ω infinite paruum reſpectu b et r, erit illa totalis altitudo $= a$, hoc eſt, ſummitas liquoris in fiſtula eſt in eodem horizonte cum ſuprema amplitudine AD, hoc ita euenire debere, vel hinc quoque colligere poſſemus, quia liquor in vaſe quaſi quiescit. Caeterum initialis altitudo totalis in fiſtula, exiſtente nimirum $z=0$, hic etiam $= \frac{Na}{M}$.

§. 25. Ponamus nunc canalem horizontalem CK convergere in conum truncatum ſeu qualemcunque conoidicum, habereque maiorem baſin vaſi obuerſam; erit pro velocitate vniformi aquae effluentis altitudo in fiſtula, quouis in loco F implantata, (nominando amplitudinem $FG = y$) erit inquam altitudo illa (vt art. 23. expreſſa) $= \frac{bba(yy-\omega\omega)}{yy(bb-\omega\omega)}$. Hinc ſi minor baſis ſit vaſi applicata, et canalis oblongus non nimis ſubito diuergat ne aqua in illo diffluat ſed ſtrata ordine inſequentia ſuccedant praecedentibus ſicuti theoria ſtabilita ſupponit, erit, ob y minus quam ω, preſſio in latera negatiua, ac proin mutatur in ſuctionem, qua fit, vt aqua in fiſtula verticaliter deſcendente

et

et hiante in aquam vaſculo inferiori contentam attollatur per ſuctionem ad altitudinem $= \frac{bba(\omega\omega - yy)}{yy(bb - \omega\omega)}$. Quod ſi quoque ω maius ſit quam b, fit numerator et denominator fractionis negatiuus, ideoque valor eius rurſus affirmatiuus, id quod indicat adeſſe preſſionem. Quare exiſtente vaſe ABED ſemper pleno, quod haberet amplitudinem ſupremam AD minorem orificio canalis conoidici diuergentis per cuius maiorem baſin aqua erumpit, obſeruaretur iterum aquam in fiſtula ſurſum erecta continuo et ſine fine aſcenſuram eſſe; in tali enim caſu acceleratio aquae effluentis nunquam ceſſat, nunquam proin peruenitur ad aequabilitatem velocitatis, quod patet ex generali aequatione (ex art. 7. huc applicata), $(bb - \omega\omega)zdx + Mbb\omega dz = bbadx$; vel clarius ex aequatione (art. 22.) expoſita in terminis finitis $z = \frac{bba}{bb - \omega\omega} \times \left(1 - 1 : f^{\frac{(bb - \omega\omega)x}{Mbb\omega}}\right)$, quae aequiualet huic $z = \frac{bba}{\omega\omega - bb} \times \left(f^{\frac{(\omega\omega - bb)x}{Mbb\omega}} - 1\right)$; ex qua ſtatim liquet, in caſu quo ω maius quam b, euadere z, adeoque velocitatem, infinitam, quando x eſt infinitum, ſecus ac fit ſi b maius eſt quam ω. Haec ad amuſſim conſpirant cum iis quae dedi in fine partis primae per methodum diuerſiſſimam inuenta.

De breuitate temporis ab initio effluxus vsque ad velocitatem ſenſibiliter aequabilem ſeu vniformem.

§. 26. Etiamſi, accurate loquendo, requiratur tempus infinitum, antequam fluxus aquae ex vaſis per foramen proſilientis perueniat gradatim ad vniformitatem perfectam

ſectam et geometricam: experientia tamen quotidie monſtrat, aquam ex vaſis praeſertim amplioribus quamuis altitudinis vix trium quatuorue pedum, a primo fluxus momento tanta rapiditate ad maximam ſuam et aequabilem fluxus velocitatem conuergere dum effluit per foramen mediocriter licet anguſtum, vt ſenſibus percipi non poſſint incrementa gradualia velocitatis per quae tranſit a quiete ad vniformem et maximam poſſibilem velocitatem quam ſenſibiliter acquirere poteſt. Vt huius phaenomeni rationem reddamus ex noſtra theoria, conſideremus vas cylindricum vel priſmaticum, ſat magnae amplitudinis b et iuſtae altitudinis a; ex quo prorumpat aqua per foramen anguſtum ω in directione horizontali, ſiue id fiat immediate ex ipſo vaſe ſiue mediante canali in extremitate orificium ω habente.

§. 27. Aequatio generalis (art. 6.) pro determinatione velocitatis adhuc creſcentis haec fuit $\frac{vv(bb-\omega\omega)}{2b}+\frac{b\omega v dv}{dx}\int\frac{dt}{y}=gba$, quae in noſtro caſu vbi $\int\frac{dt}{y}=\frac{a}{b}$, et $\omega\omega$ iuxta bb negligi poteſt, in hanc mutatur $2a\omega v dv = 2gbadx-bvvdx$, ſeu $dx=\frac{2a\omega v dv}{2gba-bvv}$; adeoque elementum temporis $d\theta$ ſeu $\frac{dx}{v}$ erit $=\frac{2a\omega dv}{2gba-bvv}=\frac{\frac{2a}{b}\omega dv}{2ga-vv}=$ $\frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}}\left(\frac{dv}{v+\sqrt{2ga}}+\frac{dv}{-v+\sqrt{2ga}}\right)$; integrando habetur $\theta=\frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}}\times l\left(\frac{v+\sqrt{2ga}}{-v+\sqrt{2ga}}\right)=$ (ob $v=\sqrt{2gz}$) $\frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}}\,l\left(\frac{\sqrt{z}+\sqrt{a}}{-\sqrt{z}+\sqrt{a}}\right)=$ (art. 22.) $\frac{a\omega}{b\sqrt{2ga}}\,l\left(1+\sqrt{\left(1-\frac{1}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)}\right):\left(1-\sqrt{\left(1-\frac{1}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)}\right)$; Eſt enim in hoc caſu $z=a\left(1-\frac{1}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)$. Hinc $\frac{b\sqrt{2ga}}{a\omega}\,\theta=$

Log. $\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)} : 1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)} \right]$; Transeundo a logarith. ad numeros et rite procedendo inuenietur $f^{\frac{bx}{2a\omega}} =$ huic fractioni $\left(f^{\frac{b\sqrt{2ga}}{a\omega}\theta} + 1\right) : \left(2 f^{\frac{b\sqrt{2ga}}{2a\omega}\theta}\right)$.

§. 28. Verum ex principio dynamico pro lapſu libero grauium, ponendo C = altitudini quam graue libere cadens percurrit tempore dato θ, inuenietur $\theta = \frac{\sqrt{2C}}{\sqrt{g}}$ ſubſtituatur hic valor in fractione modo inuenta, et habebitur $f^{\frac{bx}{2a\omega}} =$ huic alteri fractioni $\left(f^{\frac{2b\sqrt{aC}}{a\omega}} + 1\right) : 2 f^{\frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}}$. Nunc quia amplitudo vaſi b valde maior ſupponitur quam amplitudo foraminis ω, et altitudo lapſus liberi C vno ſecundo horario percurrenda = 15. pedibus, ac praeterea ex natura curuae logarithmicae f maior quam binarius, manifeſtum eſt pro qualibet mediocri altitudine vaſis a, hunc numerum $f^{\frac{2b\sqrt{C}}{a\omega}}$ in immenſum ſuperare vnitatem, ita vt haec contemni poſſit in numeratore fractionis noſtrae, erit igitur ſenſibiliter $f^{\frac{bx}{2a\omega}} = f^{\frac{2b\sqrt{aC}}{a\omega}} : 2 f^{\frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}} = \frac{1}{2} f^{\frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}}$, ſeu $2 f^{\frac{bx}{2a\omega}} = f^{\frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}}$, vel ſumendo logarithmos $\frac{bx}{2a\omega} + l2 = \frac{b\sqrt{aC}}{a\omega}$, vnde $x = 2\sqrt{aC} - \frac{2a\omega l2}{b} =$ (ob ω incomparabiliter minus quam b) $2\sqrt{aC} =$ (ponendo $a = 4$ ped. et C = 15 ped.) $2\sqrt{60}$ ped. = (circiter) 16 pedibus. Quod ſi igitur in aequatione $z = a\left(1 - \frac{a}{f^{\frac{bx}{a\omega}}}\right)$, quae pro quolibet aquae effluxu longitudinis x determinat velocitatem, ſubſtituamus 4 pro a, 16 pro x, 2 pro f (quamuis, quod rem fortius probaret, f maius ſit quam 2) et ponamus amplitudinem vaſis b eſſe ad amplitudinem fo-

foraminis ω tantum vt 100 ad 1, habebimus $z = 4 (1 - 1 : 2^{400})$, quod ob ſtupendam paruitatem fractionis $1 : 2^{400}$, non differre cenſetur a 4 pedibus, quae deſignat altitudinem vaſis, et ſimul illam a qua graue delapſum acquirit velocitatem aequalem ei quam habet effluxus cum peruenerit ad vniformitatem, vnde patet vno ſecundo temporis elapſo, aquam effluentem iam habere ſenſibiliter illam velocitatem vniformem. Sed vt melius appareat, quanta promtitudine conuergat velocitas effluxus ad vniformitatem, videamus quam parum debeat abludere velocitas aquae effluentis acquiſita, poſt elapſam decimam partem vnius ſecundi, a maxima velocitate quam acquirere poſſet ſi effluxus duraret per infinitum temporis ſpatium: Reducamus pedes ad pollices, et habebimns $a = 48$ poll. atque reperietur C circiter $= 2$ poll. vnde x ſeu $2 \sqrt{aC}$ circiter $= 20$ poll. et $f \frac{bx}{a\omega} = f \frac{2000}{48}$, pro quo ſcribo tantum 2^{40}. Erit itaque $z = a (1 - 1 : 2^{40})$, quod etiamnum, ob imperceptibilem paruitatem fractionis $1 : 2^{40}$; ab ipſo a denotante velocitatem vniformem neutiquam differre cenſendum eſt.

Corollarium.

Effluxus aquae ex vaſis amplioribus per anguſta foramina poteſt tuto conſiderari tanquam aequabilis in momento poſt motus initium.

Theorema hydraulicum generale directe deductum ex principiis hydrodynamicis, demonſtratum per methodum indirectam virium viuarum.

§. 29. Ad vberiorem confirmationem bonitatis methodi noſtrae directae et vniuerſalis, lubet nunc tradere ſolutionem indirectam, ex theoria conſeruationis virium viuarum eruendam, propoſitionis principalis de velocitate aquae erumpentis ex vaſe et canali ſemper pleno, prout illam ſtabiliuimus per aequat. art. 7. traditam. Concipiamus aquam per C*c* (Fig. I.) egredientem dirigi ſtatim ad ſitum horizontalem vt conſiderari poſſit ſine aſcenſu et ſine deſcenſu in ſuo progreſſu: Sit vero x longitudo cylindri aquei ſecundum directionem obliquam ID habentis pro baſi C*c*, qui cylindrus contineat tantam quantitatem aquae quanta iam egreſſa eſt, erit illa quantitas $= \frac{\omega x}{\alpha}$, cuius differentiale $\frac{\omega dx}{\alpha}$ deſignat particulam aquae elementarem porro iamiam egreſſuram ex C*c* poſtquam egreſſa eſt quantitas $\frac{\omega x}{\alpha}$. Sit z altitudo verticalis, ex qua graue aliquod libere delapſum acquirat velocitatem quaeſitam, quam nempe debet habere particula illa elementaris aquae $\frac{\omega dx}{\alpha}$. Erit per principium virium viuarum eius velocitas $= \sqrt{z}$, et ſubuelocitas $= \frac{\sqrt{z}}{\alpha}$, vnde ſubuelocitas in G $= \frac{\omega \sqrt{z}}{\alpha b}$, ipſa vero velocitas actualis in G in directione tangentis $= \frac{g\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$. Similiter ſubuelocitas in quolibet puncto H $= \frac{\omega\sqrt{z}}{\alpha y}$, adeoque ipſa actualis velocitas in H $= \frac{\omega ds\sqrt{z}}{\alpha y dt}$.

§. 30. Quoniam autem per ſingulas amplitudines in toto canali eodem tempuſculo eadem quantitas aquae $\frac{\omega dx}{\alpha}$

per-

perfluere debet, concipienda eſt talis quantitas elementaris $\frac{\omega dx}{\alpha}$ tanquam collocata ſupra ſupremam E*e* in altitudine verticali $= \frac{\beta\beta\omega\omega z}{\alpha\alpha bb}$, vt conuenienti tempore cadere incipiens ſua grauitate perueniat ad amplitudinem E*e* ibique reſarciat eodem momento et eadem velocitate $\frac{\beta\omega\sqrt{z}}{\alpha b}$ particulam ſupremam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ deſcendentem in canali. Atque hoc modo canalis iugiter plenus conſeruabitur, prout conditio problematis id requirit.

§. 31. Quod ſi igitur ſingulae $\frac{\omega dx}{\alpha}$ ſua quaeque altitudine $\frac{\beta\beta\omega\omega z}{\alpha\alpha bb}$ collocata ſupra E*e* fuerint, et iam omnes ſucceſſiue delapſae ſint per E*e*, ingreſſurae canalem ſemper plenum conſeruantes, patet aequalem quantitatem aquae $\int \frac{\omega dx}{\alpha}$ ſeu $\frac{\omega x}{\alpha}$ per orificium C*c* eſſe egreſſam, quam in plano horizontali C*c* prolongato moueri concipimus, et ita quidem vt ſingulae eius particulae $\frac{\omega dx}{\alpha}$ habeant ſuam acquiſitam velocitatem $\sqrt{z}$. Quare vnaquaeque ex particulis $\frac{\omega dx}{\alpha}$ cenſenda eſt deſcendiſſe ex loco primitiuo quietis vsque ad infimum horizontem BC*c* prolongatum, hoc eſt, ex altitudine $= \frac{\beta\beta\omega\omega z}{\alpha\alpha bb} + AB = \frac{\beta\beta\omega\omega z}{\alpha\alpha bb} + a$; oportet itaque multiplicare deſcenſus per particulas deſcendentes vt habeatur $\frac{\beta\beta\omega^3 zdx}{\alpha^3 bb} + \frac{a\omega dx}{\alpha}$, quod integratum dat $\frac{\beta\beta\omega^3}{\alpha^3 bb}$ $\int zdx + \frac{a\omega x}{\alpha} =$ vi viuae ex deſcenſu vniuerſo particularum grauium collectae: Haec autem aequalis eſſe debet effectui ſuo, qui conſiſtit in aggregato productorum quae fiunt ducendo ſingulas particulas in quadrata ſuarum reſpectiue velocitatum.

§. 32. Quocirca particulam $\frac{\omega dx}{\alpha}$ iam egreſſam ex canali multiplico per quadratum velocitatis ſuae quod eſt z,

et habebo $\frac{\omega z dx}{\alpha}$, cuius integrale $\frac{\omega}{\alpha}\int z dx$ exprimit vim viuam ex velocitatibus oriundam totius materiae aqueae ex canali egreſſae, cui addenda adhuc eſt ea quam habet omnis materia intra canalem fluens et quae reperitur multiplicando ſingula ſtrata ydt per quadratum ſuarum reſpectiue vltimarum velocitatum $\frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha yy dt^2}$; adeo vt cuiuslibet ſtrati ydt prodeat vis viua ex motu ſuo oriunda $= \frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha yy dt^2} \times ydt = \frac{\omega\omega z ds^2}{\alpha\alpha y dt}$: Proinde vis viua omnium ſtratorum $= \frac{\omega\omega z}{\alpha\alpha}\int\frac{ds^2}{ydt}$ per totum canalem ſumendorum $=$ (ob datum, per magnitudinem datam totius canalis, $\int\frac{ds^2}{ydt}$, quod dicatur M) $\frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$. Sumendo itaque aggregatum ambarum harum virium viuarum ex motu oriundarum, habebimus vim viuam vniuerſi ſyſtematis aquei $= \frac{\omega}{\alpha}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$.

§. 33. Hinc aequando hanc ex motu collectam cum illa quam modo ante ex deſcenſu particularum collegimus, ſuppeditabitur nobis haec aequatio $\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega^3}{\alpha^3 bb}\int z dx + \frac{a\omega x}{\alpha} = \frac{\omega}{\alpha}\int z dx + \frac{M\omega\omega z}{\alpha\alpha}$, quae differentiata et a fractionibus liberata, hanc praebet $\mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega z dx - \alpha\alpha bb z dx = M\alpha bb\omega dz - \alpha\alpha bb a dx$, vel denique (reductione peracta) hanc $(\alpha\alpha bb - \mathfrak{C}\mathfrak{C}\omega\omega) z dx + \alpha M bb\omega dz = \alpha\alpha bb a dx$: omnino vt inuenimus per methodum directam (art. 7.).

Corollarium.

Si b vel Ee ſit amplitudinis permagnae reſpectu ω vel Cc, aequatio inuenta abit in hanc $\alpha z dx + M\omega dz = \alpha a dx$, et pro effluxu vniformi in hanc $z = a$. Sin vero Ee non quidem ſit valde magnae amplitudinis reſpectu Cc, velimus tamen vt aqua noua ſuccedat continuo deſcendenti intra canalem non cum velocitate acquiſita aliqua, ſed ex qui-

quiete incipiat ſuccedere ita vt etiam hoc modo canalis ſemper plenus conſeruetur ; poterit hoc effectui dari , ſi ad Ee (Fig. V.) adaptatur vas ampliſſimum ſed valde paruae altitudinis , quod ſit aqua plenum : Effluet vtique ex illo aqua ſumens motum ex quiete , et tamen influens in canalem cum debita velocitate conſeruabit iugiter eius plenitudinem. Res ipſa patet ex figura : vbi canalis ECce adaptatum habet vas cylindricum ampliſſimum AQVK , cuius altitudo AK vel QV valde parua ſupponitur ita vt altitudinem verticalem AB canalis Ec ſenſibiliter non augeat , id eſt , vt KB ſumi poſſit pro AB , et tamen capacitas AV huius vaſis cylindrici permagnam aquae copiam contineat. Quare vt iam velocitas aquae effluentis per Cc determinetur , non amplius Ee ſed KV ſumenda eſt pro prima amplitudine b manente interim altitudine verticali a canalis , quia per hypotheſin ſenſibiliter non differt AB a KB. Hoc pacto habebimus ſemper pro velocitate vniformi $z = a$, hoc eſt , eam velocitatem quam graue acquireret cadendo libere ex altitudine $= a =$ AB ſeu KB.

Exemplum ſingulare determinandi motus aquae in canali conoidico verticaliter deſcendentis , vbi nihil effluit nullaque noua aqua deſcendenti ſuccedit.

§. 34. Eſto hyperbola BEG (Fig. VI.) inter aſymtotos orthogonales , vnam verticalem AM , alteram horizontalem AH ; cuius applicatae DI , EK , FL , GM , &c. deſignent amplitudines ipſis canalis conoidici , in infinitum continuati , qui generari intelligitur , ſi alia hyperbola inter

ter eaſdem aſymtotos (cuius applicatae ſint vt radices hyperbolae ordinariae prioris) deſcripta circa aſymtoton verticalem tanquam circa axem reuoluitur. Concipiatur in loco quocunque canalis dari portionem aquae deſignatam per aream hyperbolicam DK, a quiete deſcendere incipientem, deſcendendo perueniſſe in locum quemlibet alium FM, ita vt per conſequens FM ſit $= DK$. Quaeruntur velocitates in GM, in FL, et velocitas cuiuscunque ſtrati intermedii PO*op*.

§. 35. Sit vnumquodque rectangulum coordinatarum, hoc eſt, productum amplitudinis cuiusque PO per altitudinem conoidis AO, $= aa$; item abſciſſae datae $AI = b$, $AK = c$; deſcenſus quilibet aſſumtus AL amplitudinis ſuperioris $= x$. Erunt ex natura hyperbolae amplitudo $DI = \frac{aa}{b}$, $EK = \frac{aa}{c}$, $FL = \frac{aa}{x}$, et praeterea (ob $DK = FM$) $AM = \frac{cx}{b}$, proinde $GM = \frac{aab}{cx}$; ipſaque area vel potius ſolidum DK vel $FM = aa(lc - lb)$. Erit porro (calculo docente) centri grauitatis areae DK diſtantia ab horizonte $AH = \frac{c-b}{lc-lb}$, et diſtantia centri grauitatis areae FM (nota, per aream ſemper ſolidum me intelligere) ab eadem $AH = \frac{x(c-b)}{b(lc-lb)}$. Hinc deſcenſus centri grauitatis ex ſitu DK in ſitum $FM = \frac{(x-b) \times (c-b)}{b(lc-lb)}$, multiplicetur per quantitatem aquae deſcendentis deſignatam per $aa(lc-lb)$, erit productum $\frac{aa(x-b) \times (c-b)}{b} =$ vi viuae ex deſcenſu productae.

§. 36. Dicatur iam velocitas in $GM = \sqrt{z}$, erit velocitas in $FL = \frac{b}{c}\sqrt{z}$; dicatur etiam quaelibet $AO = y$, erit $PO = \frac{aa}{y}$, ſtratum $Po = \frac{aady}{y}$, ipſaque eius velocitas $= \frac{by}{cx}\sqrt{z}$; Huius ergo quadratum ductum in ſtratum Po dat $\frac{aabbz}{ccxx} ydy =$ vi viuae ſtrati Po, cuius integrale debite cor-

rectum

rectum (ſumendo a, b, c, z et x pro conſtantibus) $= \frac{aabbz}{2ccxx}yy - \frac{aabbz}{2cc} =$ (in caſu y ſeu AO $= \frac{cx}{b}$ ſeu AM) $\frac{aaz}{2} - \frac{aabbz}{2cc} = (cc - bb)\frac{aaz}{2cc} =$ vi viuae totius maſſae aqueae ex motu oriundae. Comparando hanc cum praecedente habebimus $\frac{aa(x-b)\times(c-b)}{b} = (cc-bb)\frac{aaz}{2cc}$, vnde per reductionem inuenietur $z = \frac{(x-b)2cc}{(c+b)b} =$ quadrato velocitatis in GM, adeoque quadratum velocitatis in FL $= \frac{(x-b)2b}{c+b}$; et quadratum velocitatis cuiusqunque ſtrati intermedii Po (pro abſciſſa AO ſeu y) $= \frac{(x-b)2byy}{(c+b)xx}$.

Corollarium 1.

Stratum infimum EK deſcendens ex quiete in ſitum GM, acquirit maiorem velocitatem quam corpus graue libere cadens ex altitudine KM, eſt enim $\frac{(x-b)cc}{(c+b)b}$ maius quam KM vel quam $\frac{cx}{b} - c$.

Corollarium 2.

Sed ſtratum ſupremum DI deſcendens in locum FL, acquirit minorem velocitatem quam graue cadens libere ex altitudine IL, nam $\frac{(x-b)b}{c+b}$ minus eſt quam IL ſeu quam $x-b$.

Corollarium 3.

Partes ergo inferiores maſſae aqueae fortius, et ſuperiores ſegnius accelerantur quam ſi libere deſcenderent a ſola naturali grauitate animatae: Quod vel hinc quoque citra calculum praeuideri poterat, quia partes aquae in locis anguſtioribus premuntur ab incumbentibus, atque ſic ad maiorem accelerationem incitantur, contra vero renituntur

partibus iis quae occupant loca ampliora, atque ita ſuperiores in acceleratione ſua naturali retardantur.

Corollarium 4.

Datur itaque alicubi ſtratum Po intermedium, quod nec incitatur nec retardatur, ſed eodem ritu acceleratur, ac ſi libere deſcenderet; Hoc autem vt determinetur, facio vt AL ad AO ſeu vt x ad y, ita AI ſeu b ad Aω, quae erit $\frac{by}{x}$, eritque ω ſitus primitiuus ſtrati PO. Proinde ωo ſeu $y - \frac{by}{x}$ eſt altitudo, per quam deſcendit ſtratum Po, vt igitur acceleratio huius ſtrati ſit = naturali, oportet tantum facere $y - \frac{by}{x} = \frac{(x-b)^2 byy}{(c+b)^2 xx}$; vnde prodibit $y = \frac{(c+b)x}{2b}$, id quod oſtendit diſtantiam AO eſſe mediam arithmeticam inter AL et AM, ſicuti Aω eſt media arithmetica inter AI et AK; adeoque LO=OM et Iω=ωK: His itaque in locis ſtratum intermedium Po tantumdem premitur deorſum verſus ab incumbente aqua FO, quantum ſurſum verſus reprimitur ab aqua ſubiecta PM, ita vt haud aliter deſcendat quam ſi libere deſcenderet a ſola grauitate naturali animatum. Caeterum et hoc quoque obſeruandum, in iisdem his locis fieri maximam aquae compreſſionem, vnde concludimus, ſi in loco ſtrati Po inſeretur fiſtula verticaliter, fore vt aqua in illa ad maiorem altitudinem a loco inſertionis aſcenderet, quam ſi inſereretur in cuiuslibet alius loci ſtrato inter FL et GM; etenim altitudo in fiſtula dependet a ſola aquae compreſſione, vt ex ſupra explicatis patet.

Col-

Collatio huius ſolutionis per vires viuas cum ea quae elicitur per methodum noſtram directam ex principiis mere dynamicis petitam.

§. 37. In ſcripti huius hydraulici Parte Secunda art. 7. dedimus per principia dynamica aequationem generaliſſimam pro determinatione velocitatis, nempe hanc $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)zdx + \alpha Mbb\omega dz = \alpha\alpha bbadx$. Sed ibi ſupponitur, vas vel canalis ſemper plenus, ſuccedente nimirum continuo liquore nouo eadem velocitate ſeſe adiungente illi qui in ſuprema amplitudine iamiam deſcendit, ipſeque canalis exiſtit datae et determinatae altitudinis verticalis: Cum vero in praeſenti exemplo canalis ſit indefinitae altitudinis, in quo quippe pars tantum liquore plena FM locum ſuum ſemper mutat, habetque proin altitudinem ſuam LM ſingulis momentis variabilem, adeo vt non ſtatim videatur huius exempli caſum contineri ſub formula illa inuenta art. 7. cum praeſertim nullus nouus liquor heic ſuccedat deſcendenti, ſed vna eademque ſemper eius quantitas DK vel FM in canali conſeruetur, modo hunc modo alium locum occupans.

§. 38. Interim monſtrabimus, quo pacto per aliquam mentis fictionem praeſens caſus reduci poſſit ad leges hypotheſeos art. 7. ſtabilitae. Conſiderandum nempe ſpatium primitiuum DEKI ſub ſpecie canalis datae altitudinis IK, cuius amplitudo ſuperior eſt DI, inferior EK, vtraque data et determinata: Iam ex EK dum liquor effluit, occupaturus loca inferiora canalis prolongati,

fingo per ſupremam amplitudinem DI ſubingredi fluidum aliquod tam grauitatis quam omnis inertiae vel reſiſtentiae expers, quod quamuis tale in rerum natura non detur, tamen ita fingi poteſt vt nihil aliud agat quam ſupplere ſpatium quod a liquore deſcendente vacuum relinqueretur. Hoc ita praeſuppoſito, deſcenderit iam liquor realis ex DK in locum FM; Huius ſingulorum ſtratorum Po vires tum hydroſtaticas tum hydraulicas transfero ad ſupremam amplitudinem DI vbi premat fluidum fictum quod nunc occupat ſpatium DFLI, eundemque effectum praeſtare debet, quam praeſtat vis in grauitate oriunda liquor realis FM pariter translata ad amplitudinem ſupremam DI, et haec eſt illa vis quam vocavi P ſeu gba; omnia applicando ad mentem theoriae noſtrae in ſcripto hoc hydraulico expoſitae: Atque ſic nullae aliae vires in computum venient, quam quae reſultant a grauitate et motu liquoris realis, fluido ficto nihil omnino contribuente et nullum alium in finem inſeruiente, quam vt transmittat vires translatas ad depellendum liquorem realem FM.

§. 39. Nihil igitur aliud reſtat, quam vt debita fiat applicatio methodi expoſitae in artic. 4 et 5, eum in finem vt accommodetur ad exemplum propoſitum, vbi ſtatim patet, eſſe $\alpha = \beta = 1$, reliquae vero litterae deſignant hic ea quae ſequuntur, ſcilicet $b =$ DI, $\omega =$ EK, a ſeu altitudo liquoris realis $=$ LM, M $=$ ſummae omnium $\frac{Oo}{PO}$ in altitudine LM contentorum; item $z =$ altitudini ex qua graue libere delapſum acquirit velocitatem v, qua cum liquor realis ſub initium deſcenſus vel poſtea fluidum fictum effluit per EK, ac denique $dq =$ progreſſui momentaneo ex amplitudine EK.

§. 40.

§. 40. His probe obſeruatis nunc ita procedo: Poſita velocitate per EK $= v$, erit velocitas per FL $= \frac{xv}{c}$, velocitas per GM $= \frac{xv}{b}$, velocitas per PO $= \frac{yv}{c}$. Porro progreſſus per FL $= d$ (AL) $= dx$, progreſſus per GM $= d$ (AM) $= \frac{cdx}{b}$, progreſſus per PO $= d$ (AO) $= \frac{ydx}{x}$, progreſſus per EK ſeu $dq = \frac{cdx}{x}$; qui progreſſus omnes, cum debeant eſſe ſimultanei, ſunt vtique in ratione reciproca amplitudinum, ſicuti et ipſae velocitates, adeoque in ratione directa diſtantiarum ab horizontali AH.

Quaerenda iam eſt ad imitationem art. 4. (exiſtente hic $\alpha = \beta = 1$) vis hydroſtatica, quae exprimitur per ſemiſſem amplitudinis ſupremae DI multiplicatum per differentiam quadratorum velocitatum, maximae per GM et minimae per FL; eſt autem DI $= \frac{aa}{b}$, velocitas per GM $= \frac{xv}{b}$ et velocitas per FL $= \frac{xv}{c}$, vnde tota vis hydroſtatica $= \frac{aa}{2b}\left(\frac{xxvv}{bb} - \frac{xxvv}{cc}\right) = \frac{aaxxvv}{2b^3cc}(cc - bb)$.

§. 41. Ad initationem art. 5. vim hydraulicam ita determino: Vim acceleratricem ſtrati indefiniti Po, quam voco $\acute{\gamma}$, multiplico per eius progreſſum $\frac{ydx}{x}$, et habebo per principium dynamicum $\frac{\acute{\gamma}ydx}{x} = \acute{u}d\acute{u} = \frac{yyvdv}{cc}$, vnde vis acceleratrix progreſſiua $\acute{\gamma} = \frac{xyvdv}{ccdx}$, et ipſa vis motrix ſtrati Po, hoc eſt, $\acute{\gamma}$Po $= \frac{aaxvdvdy}{ccdx}$; Quae translata amplitudinem DI ſeu ad $\frac{aa}{b}$ facit $\frac{aaxvdvydy}{bccdx}$, quod integratum dat $\frac{aaxvdvyy}{2bccdx} =$ (corrigendo vel ſumendo per omnes yy quae ſunt contentae in interuallo LM) $\frac{aax^3vdv}{2b^3ccdx}(cc-bb) =$ vi

 hy-

hydraulicae. Aggregatum virium hydroſtaticae et hydraulicae erit $\frac{aaxxvv}{2b^3cc}(cc-bb)+\frac{aax^3vdv}{2b^3ccdx}(cc-bb)$ ſeu $\left[\frac{aaxx}{2b^3cc}\left(vv+\frac{xvdv}{dx}\right)\right]\times(cc-bb)$, quod virium aggregatum debet eſſe aequale vi primitiuae translatae ex grauitate ſtratorum oriundae: Habetur autem vis primitiua translata cuiuslibet ſtrati Po, faciendo vt PO ad DI ſeu vt AI ad AO, hoc eſt, vt b ad y ita $g\times$Po ſeu $\frac{gaady}{y}$ ad $\frac{gaady}{b}$, quod debite integratum per interuallum LM dat $\frac{gaax(c-b)}{bb}$ pro tota vi primitiua translata.

§. 42. Lucramur ergo aequationem inter aggregatum virium hydroſtaticae et hydraulicae atque inter vim primitiuam translatam, quae aequatio ita ſe habet $\left[\frac{aaxx}{2b^3cc}\left(vv+\frac{xvdv}{dx}\right)\right]\times(cc-bb)=\frac{gaax(c-b)}{bb}$, vnde diuidendo per $\frac{aax}{bb}(cc-bb)$ prodit haec altera $\frac{x}{2bcc}\left(vv+\frac{xvdv}{dx}\right)=\frac{g}{c+b}$, vel reducendo, haec $xvvdx+xxvdv=\frac{2gbccdx}{c+b}$; atque integrando et corrigendo debito modo (vt AL vel x exiſtente $=$ AI vel $=b$, ipſum v ſit $=0$) habebitur $\frac{1}{2}xxvv=\frac{2gbccx-2gbbcc}{c+b}$, aut ſcribendo ſecundum legem dynamicam $2gz$ pro vv et diuidendo per g, erit $xxz=\frac{2bccx-2bbcc}{c+b}$, adeoque $z=\frac{(x-b)2bcc}{(c+b)xx}$, quod determinat velocitatem per EK, ex qua nunc determinatur velocitas per quamlibet aliam amplitudinem, faciendo namque vt GM² ad EK² ſeu vt AK² ad AM², hoc eſt, vt cc ad $\frac{ccxx}{bb}$, ſiue vt bb ad xx ita $\frac{(x-b)2bcc}{(c+b)xx}$ ad $\frac{(x-b)2cc}{(c+b)b}$, erit hoc $=$ altitudini ex qua graue libere cadendo acquirit velocitatem quam habet liquor in puncto infimo M; faciendo porro vt cc ad xx ita $\frac{(x-b)2bcc}{(c+b)xx}$ ad $\frac{(x-b)2b}{c+b}=$ altitudini vnde graue libere delapſum habebit velocitatem eam quae conuenit

nit liquori in ſupremo puncto L: ac denique faciendo vt cc ad yy ita $\frac{(x-b)^2 bcc}{(c+b)xx}$ ad $\frac{(x-b)^2 byy}{(c+b)xx}$, indicabit hoc altitudinem ex qua graue libere cadere debet vt acquirat debitam velocitatem, quam liquor habebit in puncto quolibet dato intermedio O. Quae omniae mirifice conſpirant cum iis quae inuenimus per theoriam virium viuarum.

§. 43. Sed et hoc iam praeſtare poſſumus, quod non aeque facile praeſtari poteſt per vires viuas, ſcilicet inuenire quantum liquor inter descendendum in quauis ſui parte comprimatur; Vidimus quidem ſupra in Coroll. 4. liquorem poſtquam ex ſitu initiali ſeu primitiuo DK deſcendit in ſitum FM, in ſingulis ſuis partibus PO diverſas pati compreſſiones, atque eorum maximam eſſe, vbi PO biſariam ſecat LM, verum eius quantitatem determinare et cum pondere aliquo dato comparare, nedum in aliis locis, cum ſcilicet PO diuidit LM in alia quacunque ratione, res eſſet altioris indaginis, ſi quis id ex natura virium viuarum eruere vellet; Per methodum noſtram directam, in capite de preſſionibus expoſitam, haud arduum eſt quaeſitum obtinere, etiam pro hoc peculiari exemplo.

§. 44. Sit itaque indagandum, quanta vi maſſa liquoris FM comprimatur in quolibet loco PO, quam vim quaerendam hic etiam vocabo π; Oſtendi art. 11 et 12, ſi portio tantum PM, remoto reſiduo FO, deſcendere pergeret ſed ita vt non ſolum a propria grauitate ſed inſuper etiam a π vrgeretur, fore vt (ſaltem primo momento) eodem modo acceleraretur, quo accelerari debet tota maſſa FM a ſola ſua grauitate. Secetur IK in ω in ſimili ratione vt ſecta eſt LM in O, ita vt AI . Aω :: AL . AO, erit $\pi\omega$ ſitus initialis ipſius PO; et πK = PM. Sit AL

ad

ad AO, vel AI ad Aω vt 1 ad n, proinde AO$=nx$ et Aω $= nb$. Fingamusque liquorem in πK contentum deſcendere vi ſuae grauitatis, ac praeterea vi π, quae in quolibet loco deſcenſus ipſi conuenit, vt acceleratio fiat perinde ac ſi tota maſſa DK vi ſola ſuae grauitatis deſcenderet; Quare quod erat AL vel x, id nunc eſt AO vel nx; Et quod erat AI vel b, id nunc eſt nb. Ideoque vires hydroſtatica et hydraulica inuenientur ſi nx pro x et ndx pro dx, item nb pro b ſcribatur, atque ſic habebitur $\frac{aannxxvv}{2n^3b^3cc}(cc-nnbb)$ vel $\frac{aaxxvv}{2nb^3cc}(cc-nnbb) =$ vi hydroſtaticae, nec non $\frac{aan^3x^3vdv}{2n^3v^3ccndx}(cc-nnbb)$ vel $\frac{aax^3vdv}{2nb^3ccdx}$ $(cc-nnbb) =$ vi hydraulicae: Vis autem P per translationem a grauitate oriunda, quae erat $\frac{gaax(c-b)}{bb}$ nunc eſt vtique $\frac{gaanx(c-nb)}{nnbb}$ vel $\frac{gaax(c-nb)}{nbb}$.

§. 45. Sumendo iam aggregatum virium hydroſtaticae et hydraulicae, illudque aequando cum vi primitiua translata ex grauitate oriunda $\frac{gaax(c-nb)}{nbb}$, cui addi debet vis compreſſionis translata ex PO in ω, quae habetur ſi facimus vt PO ad ω, ſeu vt AI ad AL, hoc eſt, vt b ad x ita π ad $\frac{x\pi}{b}$, lucramur hanc aequationem $\left(\frac{aaxxvv}{2nb^3cc} + \frac{aax^3vdv}{2n^3ccdx}\right) \times (cc-nnbb) = \frac{gaax(c-nb)}{nbb} + \frac{x\pi}{b}$, quae ordinata hanc induit formam $\frac{aa}{2nbbcc}$ $(d[\frac{1}{2}xxvv] \times (cc-nnbb)) = \frac{gaadx(c-nb)}{nb} + \pi dx$; Quoniam autem velocitas maſſae diminutae PM ſed preſſae a vi π eadem eſſe debet quae eſt velocitas maſſae integrae FM, pro qua velocitate modo ſupra inuenimus $\frac{1}{2}xxvv = \frac{2gbccx-2gbbcc}{c+b}$, ſcribamus huius differentiale quod eſt $\frac{2gbccdx}{c+b}$ pro $d[\frac{1}{2}xxvv]$, et prodibit $\frac{gaadx}{nb(c+b)} \times (cc-nnbb) = \frac{gaadx(c-nb)}{nb} + \pi dx$;

Di-

Diuidendo per dx et transponendo, obtinebimus $\pi = \frac{gaa[(cc-nnbb)-((c-nb)(c+b))]}{nb(c+b)} = \frac{gaa(cn-c-nnb+nb)}{n(c+b)}$. Quo circa ſi ad PO inſeratur fiſtula verticaliter erigenda, vt cognoſcatur ad quam altitudinem liquor in illa (ſaltem per tempus breuiusculum) ſuspenſus haerere poſſet, diuidendum eſt π per g. PO, hoc eſt, per $\frac{gaa}{nx}$, vt habeatur $\frac{\pi nx}{gaa} = \frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b} =$ altitudini liquoris in fiſtula, ex qua altitudine aeſtimanda eſt compreſſio abſoluta liquoris in PO. Q. E. I.

§. 46. Quod ſi porro determinare oporteat punctum O in data qualibet LM, vbi intenſitas compreſſionis ſit maxima, id eſt, vbi liquor in fiſtula maximam obtinebit altitudinem: Differentianda eſt quantitas inuenta $\frac{x(cn-c-nnb+nb)}{c+b}$, ſumto n pro variabili et reliquis pro conſtantibus, quo facto prodibit $c+b-2bn=0$, vnde reſultat $n=\frac{c+b}{2b}$, adeoque nx ſeu AO $= \frac{(c+b)x}{2b} = \frac{c+b}{2b}$ AL $= \frac{c.\,AL}{2b} + \frac{1}{2}$ AL $= \frac{1}{2}$ AM $+ \frac{1}{2}$ AL; vnde patet punctum O maximae compreſſionis eſſe in medio inter M et L, plane vt ſupra in Coroll. 4. coniectando praeuidimus.

§. 47. Praeterea ſi in expreſſione $\frac{x(cn-c-nn'+nb)}{c+b}$ ſubſtituatur valor inuentus ipſius n, qui eſt $\frac{c+b}{2b}$, habebitur ipſa liquoris maxima altitudo in fiſtula $= \frac{x(c-b)^2}{4b(c+b)}$; Hinc quia $\frac{1}{2}$ LM ſeu LO $= \frac{x(c-b)}{2b}$, erit LO ſeu altitudo liquoris in canali ſupra punctum O vbi fiſtula inſeritur ad altitudinem liquoris in fiſtula :: $\frac{x(c-b)}{2b}$. $\frac{x(c-b)^2}{4b(c+b)}$ :: $2(c+b)$. $c-b$, ſeu vt duplum ſummae diſtantiarum primitiuarum AK + AI ad earundem ſimplam differentiam, hoc eſt, vt 4 A ω ad IK.

§. 48. Caeterum vel ſola ratio ſana dictat, maſſam liquoris deſcendentis FM in extremitatibus FL et GM nullam pati compreſſionem, adeoque altitudinem in fiſtula tam in L quam in *M* inſerta debere eſſe nullam: Et hoc ipſum quidem per formulam confirmatur; nam in priori caſu vbi $n = 1$, mutatur formula $\frac{x(cn - c - nnb + nb)}{c + b}$ in hanc $\frac{x(c - c - b + b)}{c + b}, = 0$, in poſteriori vero, vbi $n = \frac{c}{b}$, eadem mutatur in hanc $\frac{x(cc - cb - cc + cb)}{b(c + b)}$ etiam $= 0$.

Scholium 3.

§. 49. Hoc exemplum liquoris ſua grauitate deſcendentis in tuba hyperbolica ad indefinitum continuata, quod ſpeciminis loco fuſius pertractaui, monſtrat quomodo ſit procedendum in aliis eiusmodi caſibus, vbi liquor intra canalem ſufficienter longum eadem ſemper quantitate delabitur, ita nempe vt nihil inde effluat, nihilque pariter noui liquoris ſubingrediatur. Aperit inſuper aditum ad ſolutionem problematum de motu oscillatorio determinando fluidorum in tubis recuruis vel reflexis, cuiuscunque ſint figurae, atque amplitudinis vtcunque variantis: In talibus namque tubis ſeu ſiphonibus dum pars quaedam fluidi per vnum crus deſcendit, per alterum crus licet multum disſimile pars alia fluidi priori aequalis ascendit, hoc eſt, negatiue deſcendit, ita vt perinde ac in tubis continuo deorſum vergentibus eadem ſemper fluidi maſſa conſeruetur; Vnde ſi mutatis mutandis quantum ad ſigna in calculo per eandem methodum, quam adhibuimus in allato exemplo, procedatur, haud arduum erit peruenire ad ſupputationem velocitatis fluidi transfluentis in ſingulis locis pro quolibet eius deſcenſu vel aſcenſu, vnde omnia reliqua dependent.

De

De *vaſis, quae interea dum emittunt liquorem per aperturam in fundo vel prope fundum factam, nihil noui liquoris deſuper influentis accipiunt.*

§. 50. Pro iſtis caſibus vaſorum, quae emittendo liquorem ſed nullum alium accipiendo tandem deplentur atque euacuantur, poſſet adhiberi methodus illa quam explicui §. 44. et ſeq. vbi agebatur de determinatione motus datae maſſae aqueae intra canalem hyperbolico - conoidicum continuo delabentis, ſcilicet ope fluidi fictitii, quod nihil aliud agat quam ſupplere ſpatium ab aqua deſcendente vacuum relictum. Iſta vero mentis fictione inſuper habita atque neglecta ſufficiet in rem praeſentem aequatio noſtra in §. 7. data $(\alpha\alpha bb - \beta\beta\omega\omega)\, z\,dx + \alpha M bb\omega\, dz = \alpha\alpha bb a\, dx$, quam pro vaſis ſemper plenis exiſtentibus valere vidimus. Illa quippe aequatio nullo negotio accommodabitur ad ea quoque vaſa, quae ob nullum nouum liquorem influentem paulatim deplentur atque adeo ſuprema liquoris ſuperficies E*a* (Fig. I.) continuo deſcendit.

§. 51. Ad imitationem eius quod pro caſu vaſis cylindrici iam ſolutum extat in parte prima art. XII. conſideremus hic vas cuiuſcunque figurae, in quo ſuperne nullus ingrediatur nouus liquor, dum ille qui iam ineſt per orificium infimum continuo ductu elabitur; Ponamus itaque ſupremam ſuperficiem deſcendendo ex ſitu E*e* perueniſſe in ſitum F*f*, ad quod momentum determinanda ſit liquoris effluentis velocitas; quem in finem ipſa amplitudo F*f* ſeu y licet variabilis ſumenda eſt pro ſuprema amplitudine, cui reſpondet altitudo BP ſeu t quae et ipſa

variabilis eſt (hoc certe permittit natura translationis virium motricium in fluidis, vt cuilibet attendenti patebit) ipſum vero M ſeu $\int \frac{ds^2}{ydt}$ quod in vaſis conſtanter plenis conſtans erat, nunc eſt variabile, capiendum nempe per altitudinem variabilem BP; Scribatur ergo in aequatione noſtra yy pro bb, t pro a, et $\frac{ds}{dt}$ pro $\mathfrak{E}$, atque prodibit haec aequatio quae deſideratur $(\alpha\alpha yy - \frac{\omega\omega ds^2}{dt^2})\, zdx + \alpha yy\omega dz \int \frac{ds^2}{ydt} = \alpha yytdx$: Ex eo vero quod elementum aquae elabentis $\frac{\omega dx}{\alpha}$ = ſtrato deſcendenti $-ydt$ (pono $-ydt$ quia creſcente x decreſcit t) erit $dx = \frac{-\alpha ydt}{\omega}$, ſubſtituendo igitur hunc valorem pro dx, habebit aequatio hanc faciem $(\alpha\alpha yy - \frac{\omega\omega ds^2}{dt^2})\, zdt - \omega\omega ydz \int \frac{ds^2}{ydt} = \alpha\alpha yytdt$; Quae pro vaſis habentibus centricam verticalem, vbi $\alpha = 1$ et $ds = dt$, in hanc abit aequationem ſimpliciorem $(yy - \omega\omega)\, zdt - \omega\omega ydz \int \frac{dt}{y} = yytdt$.

§. 52. Ex hac aequatione exemplum ex prima parte allegatum (art. XII.) vbi vas ſupponebatur cylindricum nunc porro ad finem proſequemur ac quaedam notatu digna adiiciemus: Hic igitur viciſſim eſt b pro conſtante y, atque $\int \frac{dt}{y}$ erit $\int \frac{dt}{b}$ ſiue $\frac{t}{b}$, totusque terminus $\omega\omega ydz \int \frac{dt}{y}$ erit $\omega\omega tdz$, vnde aequatio pro caſu cylindri recti hanc formam habebit $(bb - \omega\omega)zdt - \omega\omega tdz = bbtdt$, Quae per modum integrandi dudum mihi vſitatum dat in terminis finitis valorem quaeſitum ipſius $z = \frac{bbt}{bb - 2\omega\omega}\left(1 - \left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{bb - 2\omega\omega}{\omega\omega}}\right)$. Hinc ſtatim liquet velocitatem tam initialem quam finalem eſſe nullam, hoc eſt in caſu quo $t = 0$ vel quo $t = a$; vnde colligere eſt, alicubi fore velocitatem maximam aquae tum effluentis ex vaſa tum in ipſo vaſe deſcendentis, ea vt determinetur quaerendum eſt maxi-

mum

mum z quod fiet quando ſuperficies aquae in cylindro deſcendit ad eam a baſe diſtantiam t quae ſit $= a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\frac{\omega\omega}{bb-2\omega\omega}}$; id quod duabus viis inuenitur, nempe vel differentiando valorem inuentum ipſius z more ſolito, vel quod commodius eſt, ponendo in praecedente aequatione differentiali $(bb-\omega\omega)\, z\,dt - \omega\omega t\,dz = bbt\,dt$, terminum ſecundum $\omega\omega t\,dz$ aequalem nihilo, vnde prodit $z = \frac{bbt}{bb-\omega\omega}$ qui comparatus cum inuento valore generali $\frac{bbt}{bb-2\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{bb-2\omega\omega}{\omega\omega}}\right)$ dabit vt dixi $t = a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\frac{\omega\omega}{bb-2\omega\omega}}$.

§. 53. Interim in caſu particulariſſimo, vbi $bb = 2\,\omega\omega$, id eſt, vbi amplitudo vaſis cylindrici ſe habet ad amplitudinem foraminis vt $\sqrt{2}$ ad 1, hoc incommodi accidit vt $\frac{bbt}{bb-2\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{bb-2\omega\omega}{\omega\omega}}\right)$ euadat $= \frac{bbt}{0}(1-1)$, nec non vt alterum $a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\frac{\omega\omega}{bb-2\omega\omega}}$ fiat $= \left(\frac{\omega\omega}{\omega\omega}\right)^{\frac{\omega\omega}{0}}$, ſeu $= (1)^{\infty}$, ex quo vtroque nihil concludi poteſt. Hoc autem incommodum tollitur per regulam cum aliqua dexteritate adhibitam, quam olim communicaui cum illuſtri Hoſpitalio, vt videre eſt in Analyſi infinite paruorum (art 136.). Prius enim modo allatum $\frac{bbt}{bb-\omega\omega}\left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{\frac{bb-\omega\omega}{\omega\omega}}\right)$ inuenitur pro praeſenti caſu $= -2(a-t)\,l(a-t)$, alterum vero $a\left(\frac{\omega\omega}{bb-\omega\omega}\right)^{\frac{\omega\omega}{bb-2\omega\omega}} = \frac{1}{c}$, aſſumendo ſcilicet a pro vnitate, et $lc = 1$, atque hinc vtrumque per logarithmicam vulgarem cuius ſubtangens $= a = 1$, facillime conſtruitur.

De Clepſydris conficiendis.

§. 54. Figuras vaſorum aquas per foramen inferius emittentium huc vsque haud aliter tractauimus quam tanquam datas, vt nimirum erueremus leges ſecundum quas motus aquarum effluentium procederet: Nunc vero lubet inquirere ordine inuerſo in figuram vaſis ad id requiſitam, vt aquae ſuprema ſuperficies ſubſidat ſecundum propoſitam aliquam legem, ex gr. vt vniformi celeritate deorſum feratur, vnde ex quantitate deſcenſuum duratio fluxus immediate innoteſcat, qui vſus olim fuit apud veteres frequentiſſimus clepſydrarum ad horas dimetiendas inſtitutus. Id autem duobus praecipue modis obtineri poteſt, vnus ſcilicet eſt quo ex quantitate elapſae aquae, alter quo ex quantitate aquae in vaſe adhuc remanente de temporis ſpatio iudicari poteſt. De vtroque ſeorſim agemus.

§. 55. Conſideremus vaſa ſimpliciora quae nimirum habent centricas ſuas verticales, quarumque aequatio (§. 51.) haec erat $(yy-\omega\omega)\, zdt - \omega\omega v dz \int \frac{dt}{y} = yytdt$, vbi inde indeterminatae t et y originem ducunt a loco infimo ſeu a foramine ω; Quod ſi iam velimus facere vt aqua erumpat velocitate vniformi ponendum eſt $z =$ conſtanti c, quo poſito erit $dz = 0$ et ita euaneſcet ſecundus terminus $\omega\omega v dz \int \frac{dt}{y}$, reliquique diuiſi per dt dabunt hanc aequationem algebraicam $(yy-\omega\omega)\, c = yyt$, vnde elicitur $yy = \frac{\omega\omega c}{c-t}$ et $y = \sqrt{\left(\frac{\omega\omega c}{c-t}\right)}$, ſeu $\sqrt{y} = \sqrt{\sqrt{(\omega\omega c : c-t)}}$.

Corollarium I.

Ea igitur eſt vaſis natura et figura vt generari poſſit ex circumuolutione hyperbolae planae biquadraticae deſcriptae inter duas aſymtotos, quarum vna verticalis altera horizontalis diſtans ab orificio ω altitudine $= c$.

Co-

Corollarium 2.

Altitudo prima ſeu t initialis $= c$, ipſaque amplitudo initialis y eſt infinita, eſt enim tunc $y = V(\omega\omega c : c-t) = V(\omega\omega c : c-c) = \omega$.

Corollarium 3.

Quantitas aquae remanentis in vaſe pro quauis altitudine t, ſeu $\int y\,dt$ inuenietur integrando riteque corrigendo $\int V(\omega\omega c : c-t)\,dt = 2\omega c - 2\omega V(cc-ct)$. Hinc quantitas totalis aquae ab initio fluxus $= 2\omega c$, hoc eſt, $=$ cylindro aqueo cuius baſis eſt ω et altitudo $2c$.

Corollarium 4.

Quod ſi igitur aquae effluxurae ex orificio ω ſubſternatur receptaculum cylindricum capacitatis non minoris quam $2\omega c$, aqua effluens in eo receptaculo collecta aequalibus temporibus aequaliter aſcendet. Atque ita altitudine receptaculi in gradus aequales diuiſa, habebitur clepſydra.

Scholium 4.

§. 56. Diſſimulandum non eſt, hoc genus clepſydrarum in praxi vix vllum habere poſſe vſum ob immanem altitudinem quae danda eſſet vaſi hyperbolico vt effluxus durare poſſet per temporis ſpatium etiamſi valde mediocre; quod ex eo ſatis colligi poteſt, quia ſi vas altum eſſet 15 pedes, id eſt, ſi $c = 15$ ped. contineret aquam $2\omega c = 30\omega$, hoc eſt, columnam aqueam cuius altitudo 30 ped. ſuper baſi ω, cum autem ex orificio ω aqua egrediatur vniformi velocitate debita altitudini. 15 pedum, ſitque tempus caſus per hanc altitudinem non niſi

vnius

vnius tantum minuti ſecundi horarii, manifeſtum vtique eſt intra vnum minutum ſecundum elabi ex vaſe cylindrum aqueum amplitudinis ω et longitudinis bis quindecim ſeu triginta pedum, adeoque tantillo tempore totum vas exhauſtum iri. Vt nihil iam dicam de impoſſibilitate ſtructurae vaſis quod ſupponit ſupremam ſuam amplitudinem infinitam; cui inconuenienti quidem liceret mederi, prolongando vas ſatis prope ad aſymtoton ſuperiorem horizontalem vt acquirat amplitudinem multo maiorem quam eſt ea foraminis ω; quae dein amplitudo circumdari poſſet margine vsque ad aſymtoton aſſurgente.

§. 57. Commodiori modo parari poteſt clepſydra, per aequabilem deſcenſum aquei ſtrati ſupremi in ipſo vaſe, cuius adeo inueſtiganda eſt figura ad id apta, vt elabente aqua per orificium ω, ſuperficies aquae reſiduae in vaſe aequalibus temporibus aequaliter deſcendat, adeo vt diuiſo axe vaſis verticali in partes aequales, ſuperficies dato temporis interuallo percurrat datum numerum partium in ſcala illa ſumtarum. Duo autem ſunt caſus, quibus intentum obtineri poteſt, aut enim amplitudo luminis ω tam parua eſt, vt nullam habeat rationem ſenſibilem ad amplitudines in vaſe y, aut amplitudo illa ω ſat magna eſt vt ſit comparabilis cum qualibet y. Priorem caſum vtpote faciliorem atque in praxi vtiliorem nunc tractabimus, de altero poſtea acturi.

§. 58. Patet vtique aequationem noſtram $(yy-\omega\omega)zdt-\omega\omega ydz\int\frac{dt}{y}=yytdt$ reduci, in caſu quo ω valde paruum eſt reſpectu y, ad hos duos terminos duntaxat $yyzdt=yytdt$, vnde $z=t$, hoc eſt, in quolibet vaſe habente foramen ω minimum, aquam ex illo emanare ea ve-

velocitate quae acquiritur a corpore graui cadente ex altitudine t quam aqua reſidua in vaſe habet; Cuius rei veritatem (a nobis ſcientifice inuentam) ſcriptores hydraulici ſuperiorum annorum non niſi per experimenta cognitam habebant: Ea vero ſemel ſuppoſita facile tunc fuit inuenire naturam vaſis conoidici, foramine ω tanquam eius vertice deorſum ſpectante, quod hunc praeſtet effectum, vt quouis momento ſumma ſuperficies y aquae reſiduae deſcendat vniformi vel aequabili celeritate. Cum enim velocitates fluidi in eadem quantitate eodemque tempore per duas diuerſas amplitudines transfluentis ſint in reciproca ratione amplitudinum, faciendum eſt $y . \omega :: \sqrt{z} . \frac{\omega}{y} \sqrt{z}$, eritque tunc $\frac{\omega}{y} \sqrt{z}$ deſignans celeritatem ſuperficiei y deſcendentis, quae celeritas cum debeat eſſe conſtans, ponatur $\frac{\omega}{y} \sqrt{z} = \sqrt{c}$, vnde erit $\frac{cyy}{\omega\omega} = z = t$. Sunt autem in conoidibus rectis amplitudines nihil aliud quam circuli quorum areae y ſunt vt quadrata radiorum ſeu applicatarum curuae genetricis, quae ſui reuolutione circa axem deſcribit conoides quaeſitum; Nominando igitur applicatam in curua genitrice $= s$, et radium orificii ω circularis $= b$, itemque aream circuli ad quadratum radii vt n ad 1, erit ſane $y = nss$, $yy = nns^4$, $\omega = nbb$, et $\omega\omega = nnb^4$; atque adeo pro aequatione $t = \frac{cyy}{\omega\omega}$, habebitur $t = \frac{cs^4}{b^4}$, ſeu $\frac{b^4 t}{c} = s^4$, quae oſtendit curuam genitricem conoidis quaeſiti eſſe parabolam biquadraticam, in cuius puncto infimo ſeu vertice deorſum ſpectante orificium ω venam aqueam emittens, inſculptum eſſe debet.

Corollarium.

Parameter parabolae inuentae eſt $b\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$, vbi c eſt arbitraria, adeoque tam parua aſſumi poteſt vt $b\sqrt[3]{\frac{b}{c}}$ fieri poſſit quantumuis magna, eum in finem vt amplitudines conoidis fiant incomparabiliter maiores quam amplitudo foraminis ω. Sic ergo pro lubitu tanta capacitas conciliari poteſt vaſi, foramenque ω tam paruae amplitudinis fieri, vt effluxus aquae ſat longo tempore durare queat, antequam vas penitus exhauriatur, ad quod inprimis attenditur in clepſydrarum ſtructura.

§. 59. Quod nunc ſpectat ad alterum caſum, vbi foramen ω non inſenſibilis adeo amplitudinis ſupponitur, vt termini in aequatione vniuerſali $(yy-\omega\omega)zdt-\omega\omega ydz \int\frac{dt}{y} = yytdt$, in quibus ω reperitur, euaneſcant, oportet ſane vt maneant omnes termini, atque tunc ponatur $\frac{cyy}{\omega\omega}$ pro z et $\frac{2cydy}{\omega\omega}$ pro dz, in eum ſcilicet finem, vt ſuperficies ſuprema aquae in vaſe deſcendat celeritate vniformi, quae celeritas debeatur altitudini arbitrariae c, quo facto reſultabit aequatio reſoluenda quae haec eſt, nempe $(yy-\omega\omega)cdt-2c\omega\omega dy\int\frac{dt}{y} = \omega\omega tdt$. Sunt quaedam indicia ex quibus ſtatim ſuſpicabar, dari quandum curuam algebraicam quae huic aequationi in abſtracto ſumtae reſpondeat; imo poſt breuem indagationem iſta protinus ſe mihi obtulit $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$, et pro curua genitrice haec $s^4 = \frac{b^4(t+3c)}{c}$, quae rurſus eſt parabola biquadratica, ſed cuius abſciſſae t initium ſumunt non ab ipſo eius vertice verum intra eundem in axe in diſtantia $= 3c$. Interim inventa aequatio $yy = \frac{\omega\omega(t+3c)}{c}$, quae quidem in abſtracto ſa-

ſatisfacit, ideo ſatisfacere non poteſt in hac materia, quia tacitam conditionem non adimplet, quae conditio in hoc conſiſtit, vt exiſtente $t = o$ tota aequatio in nihilum abeat ac proinde etiam $\int \frac{dt}{y}$ debeat euaneſcere, id quod non fit per aequationem $yy = \frac{\omega\omega(t+c)}{c}$; Nil quippe noui eſt, vt quaedam propoſitio quae in theſi eſt vera non ſemper quadret in hypotheſi, cum nempe aliquid adimplendum accedit, ad quod, rem ſumendo in genere, attendi neceſſario non requiritur. Vera autem curua genitrix pro quaeſita figura vaſis conoidici reperietur, ſi qua arte vniuerſaliter reſolui poteſt aequatio $(yy-\omega\omega)\, cdt - 2c\omega\omega dy \int \frac{dt}{y} = \omega\omega t dt$, ita vt y per t vel vice verſa t per y determinetur, ſiue id fiat in terminis finitis algebraicis vel exponentialibus, ſiue demum per quadraturas; hoc autem negotium, cum huius loci non ſit, aliis quibus vacat perficiendum relinquo.

Scholium 5.

§. 60. Opportuna iam datur occaſio examinandi catarrhactam Newtonianam, quam deſcribit Auctor in Editione ſecunda Princip. Math. Phil. Nat. Prop. 36. Lib. II. pag. 303. et ſeqq. Vbi ſtatim animaduertendum, formam quam Newtonus tribuit ſuae catarrhactae ABNFEM (vid. Fig. Newt. in loco allegato) prorſus eandem eſſe quam ſupra inueni (§. 55.) pro figura clepſydrae, quae aquam per orificium ω emittit celeritate vniformi. Notemus iam, quod ipſe Newtonus agnoſcit, in tali catarrhacta quodlibet ſtratum MN, ea cum velocitate deſcendere, quam acquireret ſi libere caderet a puncto dato I per altitudinem IO nulla alia vi quam ſua naturali grauitate animatum, vnde ſequitur ſtrata quidem inter ſe con-

tigua manere deſcendendo ſed ita tamen vt in ſe mutuo nullam vim exerceant nec premendo nec reſiſtendo aeque ac ſi ſingula pondere ſuo ſolitarie deſcenderent. Compreſſio itaque illa de qua ſupra egi in ſuo peculari capite nulla erit per totam catarrhactam Newtonianam, neque proin de vi preſſionis, quam vocari π, vel minimum exercebitur in latera AME, BNF, id quod etiam patebit ex ipſa mea formula quam pro π dedi in §. 12. Si enim illa ad caſum praeſentem applicetur, comperietur vt dixi valorem ipſius π eſſe nullum per totam catarrhactae altitudinem; Qui dergo hinc concludi debet? Haud dubie hoc, quod ſi latera catarrhactae AME, BNF eſſent rigida inſtar infundibuli, cum quo Newtonus comparat illa, atque ſi quocunque in loco facto foramine inſeratur fiſtula ad ſitum verticalem erecta, aqua nulla ex transfluente catarrhacta in fiſtulam ſit ingreſſura et asceniſura ſicuti fieret ſi premerentur latera ab aqua transfluente. Interim premuntur latera AME, BNF introrſum verſus axem HG a pondere aquarum ſtagnantium in AMEC, BNFD per ordinariam legem hydroſtaticam, quae docet preſſiones in ſingulis locis M, N exercitas eſſe proportionales altitudinibus HO: Cum autem latera catarrhactae non ſint rigida, et preſſiones iſtae aquarum ſtagnantium nullas habeant preſſiones ſibi oppoſitas ab aquis transfluentibus, oportet ſane vt aquae quae ſtagnare ponuntur et continuo premunt ſortiantur ſuum effectum, hoc eſt; vt ſe ingerant in catarrhactam commisceantque ſeſe cum ipſis aquis fluentibus; Ergo figura catarrhactae deſtruetur, turbabitur, aliterque vt nos explicauimus aquae deſcendunt; Ergo explicatio Newtoniana, vtpote legibus hydroſtaticis adverſa, ſubſiſtere non poteſt.

SO-

SOLVTIO PROBLEMATIS PHYSIOLOGICI

AVT.

Ioſia Weitbrecht.

Problema Phyſiologicum.

Dato numero muſculorum, qui membrum quodpiam mouent, inuenire numerum motuum, qui a muſculis illis varie inter ſe combinatis produci poſſunt.

Antequam ad ſolutionem huius problematis accedam, non incongruum fore duxi, ſi aliqua praemonerem, quae ad explicandam rationem methodi, qua ad illam peruenitur, facere poſſent.

I. Per motum alicuius membri intelligo translationem eius ex vno ſitu in alium, quatenus illa ab actione muſculorum dependet, qui ad membrum illud affixi ſunt. In propatulo eſt autem, non modo quemuis muſculum ſeorſum agentem ſingularem motum ac ſitum in membro producere, qui ab aliis motibus ratione directionis vel celeritatis diſcrepat, ſed alios ſubinde motus oriri, ſi duo, tres, quatuor, pluresue muſculi ſimul actionem ſuam, reliquis quieſcentibus, exerceant. Multiplex igitur hic motus a multiplici muſculorum actione determinatur, quae actiones ex varia potentiarum agentium combinatione reſultant. Vt igitur problemati ſatisfiat, ſcire oportet, quo-

 tuplici

tuplici modo certus numerus muſculorum inter ſe combinari poſſit; id quod conſequenter a legibus artis combinatoriae, adiunctis quibusdam conditionibus ex natura actionis muſculorum deſumtis, dependet. His probe conſideratis, patet: 1. vnamquam combinationem deſignare et producere motum ſingularem et ſibi proprium, neque quicquam intereſſe, ſiue muſculi agentes antagoniſtae ſint ſiue conſpirantes. Quamuis enim antagoniſtae, ſi aequali virtute agant, quietem membri potius, quam motum efficiant, qui ſtatus a phyſiologis motus tonicus appellari ſolet: nihilominus tamen per talem repugnantiam membrum in determinato aliquo ſitu conſeruatur, in quem non ſine motu peruenit, et qui mox mutatur, vbi primum altervtrius antagoniſtae virtus aut remittit, aut plane ceſſat. 2. Poſſunt etiam inter ſe combinari duo muſculi ſocii, non ſolum in genere in eandem actionem, ſed et praeciſe in eandem directionem conſpirantes; inde enim vis vnita fortior oritur, quae motum, quidem eundem, ſed celeriorem, membri producere poteſt. 3. Haec noſtra combinatio ab aliis ſpeciebus in eo differt, quod compoſitio e. gr. trium muſculorum vnicum tantummodo effectum edat, quamuis ratione ſitus multoties inter ſe mutari posſint. E. gr. ſint tres muſculi, *a*, *b*, et *c*, quamuis, ſi omnes ſimul agant, combinatio characterum *abc*, ratione ſitus, ſexies inmutari queat, vt: *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba*: non tamen propterea ſex motus numerare licet; ſed vnicus tantum motus reſultat; quia in quocunque horum characterum ſitu, ſemper tamen iidem ſoli muſculi *abc* conſiderantur et combinantur.

II.

II. Muſculus non eodem ſemper virtutis gradu agit, ſed nunc magis nunc minus contrahitur, vnde neceſſario diuerſus ſubinde membri ſitus oritur; e. gr. flexores digitorum vel ita agunt, vt digiti ad metacarpum inclinentur ad angulum obtuſum, vel ad angulum rectum, vel, vt penitus circumflectantur, et palmam claudant. Talem certum virtutis gradum vocabo intenſitatem muſculi; quae, quemadmodum ipſa infinities variari poteſt: ita etiam longe aliae conbinationes, et motiones oriri debent, ſi muſculi intenſitate ſimplici, aliae, ſi duplici, aliae denique, ſi tripl ci, pluribusue, agere ſupponatur; vnde diffuſiſſima tam problematis quam ſolutionis extenſio apparet.

III. Ne igitur nimium obruamur: aliquos caſus ſpeciales diſtinctius euoluemus; et primo quidem ſupponemus, quemuis muſculum agere intenſitate vnica eaque conſtante; vnde problema facillimum euadet. Ne etiam terminorum valores confundamus: intelligemus per *numerum muſculorum* omnem illam congeriem muſculorum, qui membro alicui mouendo deſtinati ſunt, ſiue illi agant, ſiue quieſcant. Muſculos illos, quos ſimul agere ſupponimus reliquis quieſcentibus et qui in combinationem ingrediuntur, *potentias* vocabo. *Numerus combinationum* denique indicabit, quoties iſtae potentiae inter ſe combinentur, et quot motus poſſibiles inde reſultent. Ex gr. ſi ad membrum aliquod quinque muſculi pertineant, atque ex his terni combinentur: erunt inde combinationes ſeu motus decem. In hoc caſu numerus quinarius eſt numerus muſculorum; ternarius, numerus potentiarum; et denarius, numerus combinationum ſeu motuum. Genera-

neraliter autem ponemus numerum muſculorum $= n$; potentiarum $= p$. ex quorum compoſitione numerus combinationum emerget.

CASVS I.

Quando muſculi agunt intenſitate vnica.

I. Sit $p=1$. Sit 1. muſculus vnicus, erit quoque motus vnicus ab illo producendus. 2. Sint muſculi duo, *a*, *b*: Hi muſculi ſinguli ſeorſim agentes ſuum motum producunt: erunt ergo motus duo. 3. Sint muſculi tres, *a*, *b*, *c*: erunt motus tres. Et in genere, quotquot muſculi membro alicui deſtinati ſunt, ſinguli, absque vlla combinatione, motum ſuum ſpecialem efficient, et ſemper erunt numeri motum aequales numero muſculorum $= n$.

II. Sit $p=2$. Sint 1. muſculi duo: patet, non ſolum vnumquemque muſculum ſeorſim, ſed et ambos iunctim agere poſſe. Dantur igitur combinationes duae, *ab*, et *ba*. Quia vero ſitus nihil infert, et eadem combinatio bis ponitur: ergo facta diuiſione per binarium numerus combinationum et motuum erit $= 1$.

2. ſint muſculi tres *a*, *b*, *c*: quiuis muſculus cum duobus reliquis combinatur, vt: *ab*, *ac*, *ba*, *bc*, *ca*, *cb*. Ergo numerus muſculorum ductus in numerum eundem vnitate minorem, dabit numerum combinationum poſſibilium. Quia vero combinatio quaeuis bis occurrit; valebit tantum pars dimidia; et verus numerus motuum erit $= \frac{3 \cdot 2}{2}$.

3. Sint muſculi quatuor *a*, *b*, *c*, *d*: quiuis muſculus combinari poterit cum tribus reliquis, vt *ab*, *ac*, *ad*, *ba*,

ba, *bc*, *bd*, *ca*, *cb*, *cd*, *da*, *db*, *dc*; et numerus muſculorum ductus in numerum eundem vnitate minorem dabit numerum combinationum poſſibilium. Quia vero quaeuis combinatio bis occurrit, facta diuiſione per binarium, erit verus numerus motuum $= \frac{4.3}{2}$.

4. Idem ratiocinium valet, ſi muſculi ſint quinque aut ſex, vnde erunt numeri motuum $= \frac{5.4}{2}$, et $\frac{6.5}{2}$. Et in genere quotcunque ſint muſculi, ſi $p = 2$, erit numerus combinationum et motuum $= \frac{n.(n-1)}{2}$.

III. Sit $p = 3$. Sint 1. muſculi tres, erit motus vnicus, quia tot ſunt potentiae, quot muſculi.

2. Sint muſculi quatuor *a*, *b*, *c*, *d*. Patet 1) cuiuis combinationi ex potentiis duabus ortae, addi poſſe potentiam tertiam. 2) ſi iungantur muſculi duo, *ab*, vel *cd*, vel *bc*; ſemper reſtare duos, vel *c*, *d*, vel *a*, *b*, vel *a*, *d*. Ergo numerus combinationum antecedens (II. 3) ductus in numerum muſculorum, binario minorem dabit numerum combinationum poſſibilium: *abc*, *abd*, *acb*, *acd*, *adb*, *abc*, *bca*, *bcd*, *bda*, *bdc*, *cda*, *cdb*. Quia autem quaeuis combinatio ter occurrit, ergo facta diuiſione per ternarium erit verus numerus motuum $= (\frac{4.3}{2}).(\frac{4-2}{3})$.

3. Sint muſculi quinque *a*, *b*, *c*, *d*, *e*: ſimili modo 1) cuiuis combinationi ex potentiis duabus ortae addi poteſt potentia tertia. 2) tales muſculi addendi ſuperſunt tres. Ergo numerus combinationum antecedens (II. 4) ductus in numerum muſculorum binario minorem, dabit numerum combinationum poſſibilium. Quia autem denuo quaeuis combinatio ter occurrit; ergo facta diuiſione ſimili erit verus numerus motuum $= (\frac{5.4}{2})(\frac{5-2}{3})$.

4. Idem valet ratiocinium, ſi ſint muſculi ſex aut ſeptem. Et in genere, quotquot ſint muſculi, ſi $p = 3$, erit numerus combinationum et motuum $= (\frac{n.(n-1)}{2})(\frac{n-2}{3})$.

IV. Sit $p = 4$. Sint 1. muſculi quatuor, erit motus vnicus, quia tot ſunt potentiae, quot ſunt muſculi.

Sint 2. muſculi quinque: ſimiliter patet, 1) cuiuis combinationi ex tribus potentiis ortae addi poſſe musculos binos, qui ex quinque reſidui ſunt, et 2) ſingulas combinationes quater occurrere. Ergo numerus combinationum antecedens, ductus in numerum ternario minorem, dabit, facta diuiſione per quaternarium, verum numerum motuum $= (\frac{5.4}{2})(\frac{5-2}{3})(\frac{5-3}{4})$.

3. Ex eodem ratiocinio, ſi ſint muſculi ſex aut ſeptem, erit numerus combinationum $= (\frac{6.5}{2})(\frac{6-2}{3})(\frac{6-3}{4})$, et $(\frac{7.6}{2})(\frac{7-2}{3})(\frac{7-3}{4})$. Et in genere, quotquot ſint musculi, ſi $p = 4$, erit numerus combinationum et motuum $= n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3})(\frac{n-3}{4})$.

V. Qui calculus ſi vlterius euoluetur, inuenietur denique pro omnibus combinationibus, poſitis quibusuis potentiarum numeris, ſequens generalis regula:

Numeri potentiarum: I. II. III.

Numeri combinationum: n, $n(\frac{n-1}{2})$, $n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3})$,

IV. V.

$n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3})(\frac{n-3}{4})$, $n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3})(\frac{n-3}{4})(\frac{n-4}{5})$. . . .

Vltim. p.

. . . . $n(\frac{n-1}{2})(\frac{n-2}{3})(\frac{n-3}{4})(\frac{n-4}{5})(\frac{n-5}{6})$ . . $(\frac{n-(p-1)}{p})$.

Sub-

Subiungamus aliquot combinationum ſpecimina:

I. Sit muſculus vnus $= a$, erit quoque motus. Vnicus $= a$.

II. Sint muſculi duo $= a, b$. erunt motus tres $a, b = 2$, et $ab = 1$, ſumma $= 3$.

III. Sint muſculi tres, a, b, c, erunt motus ſeptem, vt:

a	*ab*	*abc*
b	*ac*	1
c	*bc*	
3	3	ſumma $= 7$.

IV. Sint muſculi quatuor a, b, c, d: erunt motus quindecim, vt:

a	*ab*	*bd*	*abc*	*abcd*
b	*ac*	*cd*	*abd*	1
c	*ad*		*acd*	
d	*bc*		*bcd*	
4	6		4	ſumma $= 15$.

V. Sint muſculi quinque a, b, c, d, e: erit ſumma motuum $= 31$. vt:

a	*ab*	*bd*	*abc*	*ade*	*abcd*	*abcde*
b	*ac*	*be*	*abd*	*bcd*	*abce*	1
c	*ad*	*cd*	*abe*	*bce*	*abde*	
d	*ae*	*ce*	*acd*	*bde*	*acde*	
e	*bc*	*de*	*ace*	*cde*	*bcde*	
5	10		10		5.	ſumma $= 31$.

VI. Sint muſculi ſex, a, b, c, d, e, f: erit ſumma combinationum et motuum $= 63$, vt:

a	*ab*	*bf*	*abc*	*ade*	*bdf*	*abcd*	*acef*	*abcde*	*abcdef*
b	*ac*	*cd*	*abd*	*adf*	*bef*	*abce*	*adef*	*abcdf*	1
c	*ad*	*ce*	*abe*	*aef*	*cde*	*abcf*	*bcde*	*abcef*	
d	*ae*	*cf*	*abf*	*bcd*	*cdf*	*abde*	*bcdf*	*abdef*	
e	*af*	*de*	*acd*	*bce*	*cef*	*abdf*	*bcef*	*acdef*	
f	*bc*	*df*	*ace*	*bcf*	*def*	*abef*	*bdef*	*bcdef*	
6	*bd*	*ef*	*acf*	*bde*		*acde*	*cdef*	6	
	be			20		*acdf*			
	15					15		ſumma $= 63$	

VII. Sint muſculi ſeptem, a, b, c, d, e, f, g: erit ſumma motuum = 127, vt:

a	*ab ce*	*abc aef bfg*	*abcd acdg bceg*	*abcde acdfg*	*abcdef*	
b	*ac cf*	*abd aeg cde*	*abce acef bcfg*	*abcdf acefg*	*abcdeg*	
c	*ad cg*	*abe afg cdf*	*abcf aceg bdef*	*abcdg adefg*	*abcdfg*	
d	*ae de*	*abf bcd cdg*	*abcg acfg bdeg*	*abcef bcdef*	*abcefg*	
e	*af df*	*abg bce cef*	*abde adef bdfg*	*abceg bcdeg*	*abdefg*	
f	*ag dg*	*acd bcf ceg*	*abdf adeg befg*	*abcfg bcdfg*	*acdefg*	
g	*bc ef*	*ace bcg cfg*	*abdg adfg cdef*	*abdef bcefg*	*bcdefg*	
7	*bd eg*	*acf bde def*	*abef aefg cdeg*	*abdeg bdefg*	7	
	be fg	*acg bdf deg*	*abeg bcde cdfg*	*abdfg cdefg*		
	bf	*ade bdg dfg*	*abfg bcdf cefg*	*abefg*		*abcdefg*
	bg	*adf bef efg*	*acde bcdg defg*	*acdef*		1
	cd	*adg beg*	*acdf bcef*	*acdeg*		
	21	35	35	21		ſumma = 127

Ex his Exemplis ſequens tabula conſtrui poteſt pro inveniendis omnibus motibus.

Series numerorum, qui indicant omnes combinationes & motus poſſibiles, dato numero muſculorum & potentiarum.

Sit Numerus muſculorum.

1	1																			
2	2	1																		
3	3	3	1																	
4	4	6	4	1																
5	5	10	10	5	1															
6	6	15	20	15	6	1														
7	7	21	35	35	21	7	1													
8	8	28	56	70	56	28	8	1												
9	9	36	84	126	126	84	36	9	1											
10	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1										
11	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1									
12	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1								
13	13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13	1							
14	14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91	14	1						
15	15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455	105	15	1					
16	16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820	560	120	16	1				
17	17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188	2380	680	136	17	1			
18	18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564	8568	3060	816	153	18	1		
19	19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388	27132	11628	3876	969	171	19	1	
20	20	190	1130	4845	15504	38760	77520	120970	167960	184756	167960	120970	77520	38760	15504	4845	1130	190	20	1
	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.

Nr. potentiarum

Quae

Quae in hanc formam mutata dat Summam omnium motuum

Numerus Muſculorum.

Nr. pot.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2		1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	139	153	171	190
3			1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	364	455	560	680	816	969	1130
4				1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	1365	1820	2380	3060	3876	4845
5					1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	4368	6188	8568	11628	15504
6						1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	12376	18564	27132	38760
7							1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	19448	31824	50388	77520
8								1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	43758	75582	120970
9									1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	92378	167960
10										1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	184756
11											1	12	78	364	1365	4368	12376	31824	75582	167960
12												1	13	91	455	1820	6188	18564	50388	120970
13													1	14	105	560	2380	8568	27132	77520
14														1	15	120	680	3060	11628	38760
15															1	16	136	816	3876	15504
16																1	17	153	969	4845
17																	1	18	171	1130
18																		1	19	190
19																			1	20
20																				1
Summa Motuum omnium.	1	3	7	15	31	63	127	255	511	1023	2047	4095	8191	16383	32767	65535	131071	262143	524287	1048575

Ex hiſce tabulis ſequens emergit ſeries, quae ſummam omnium motuum, dato numero muſculorum ab 1 ad 20. continet, et quae ſimul ſolutionem problematis caſus 1[mi] ſuppeditat:

Sit numerus muſculorum :	1. 2. 3. 4. 5. 6.
Erit numerus motuum =	1. 3. 7. 15. 31. 63.
Eſt autem binarius, eleuatus ad poteſtatem, cuius exponens eſt *n* = . . .	2. 4. 8. 16. 32. 64.

7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.
127.	255.	511.	1023.	2407.	4095.	8191.	16383.
128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	8192.	16384.

15.	16.	17.	18.	19.	20.
32767.	65535.	131071.	262143.	524287.	1048575.
32768.	65536.	131072.	262144.	524288.	1048576.

So-

Solutio caſus primi.

Summa motuum omnium poſſibilium cuiusuis membri, ad quod muſculi quotcunque pertinent, ſi ſinguli muſculi agunt intenſitate vnica, erit aequalis numero binario eleuato ad poteſtatem, cuius exponens eſt numerus muſculorum; demta vnitate $= 2^n - 1$. quae ſumma $2^n - 1$ aequalis eſt ſummae ſeriei ſupra inuentae pro ſingulis numeris combinationum $= n + n.(\frac{n-1}{2}) +$ &c.

CASVS II.

Quando muſculi agunt intenſitatibus duabus.

Hic nouis limitationibus opus eſt. Indicabimus diuerſitatem intenſitatum per literas, a, b, c, &c. et α, β, γ. Patet 1. poſita eadem combinationis methodo, tot motus oriri, ſi e. gr. tres muſculi combinantur, quot ſupra inuenimus, dum muſculos ſex, ſed intenſitate vnica agentes compoſuimus, ſed 2. exterminari debere omnes illas combinationes, in quas eiusdem muſculi intenſitas vtraque ingreditur, vt: $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $a\alpha b$, $b\beta\gamma$ &c. quia idem muſculus eodem tempore non niſi intenſitate vnica agere poteſt.

Sit ergo numerus potentiarum $= 1$. Sit muſculus vnicus: ille bis agere poteſt, vnde emergunt motus, a, α. Sint muſculi duo habebimus motus quatuor, a, α, b, β. Addatur muſculus tertius, erunt motus ſex, a, α, b, β, c, γ. Quotquot igitur ſint muſculi, ſi $p = 1$, erunt quoque tot motus bis poſiti. Summa ergo motuum erit $= 2n$.

Sit $p = 2$. Sint muſculi duo: quaeuis intenſitas cum reliquis bis componi poteſt, vt ab, αb, ba, $b\alpha$, &c. Ergo nu-

numerus motuum antecedens ductus in duplum numerum muſculorum vnitate minutum dabit numerum combinationum. Quia vero non ſolum quaeuis combinatio bis occurrit, ſed et illae, in quibus $a\alpha$, $b\beta$, occurrit, reiici debent, erit verus numerus motuum $= \frac{4.3}{2} - 2$. Sint muſculi tres: erit numerus motuum $= \frac{6.5}{2} - 3$ ſint muſculi quatuor: erit numerus motuum $= \frac{8.7}{2} - 4$. Et in genere; ſint muſculi quotcunque: duplus numerus muſculorum ductus in eundem numerum duplum vnitate minutum & per binarium diuiſus, demto numero muſculorum, dabit verum numerum motuum $= 2n\left(\frac{2n-1}{2}\right) - n = 4n\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

Sit $p = 3$. ſimiliter, ſingulae intenſitates binae multiplicari debent cum reliquis, et combinationes, in quas $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, ingreditur, reiici. Ergo, quotquot ſint muſculi; ſumma motuum erit $= 2n\left(\frac{2n-1}{2}\right)\left(\frac{2n-2}{3}\right) - n(2n-2)$.

Vnde haec emergit ſeries, quae motuum ſummam continet.

Si $p = 1$ ſunt motus $= \frac{2n}{1}$

Si $p = 2$ – – $= 4n\left(\frac{n-1}{2}\right)$

$p = 3$ – – $= 8n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)$

$p = 4$ – – $= 16n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)$

$p = 5$ – – $= 32n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{5}\right)$

$p = 6$ – – $= 64n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)\left(\frac{n-4}{5}\right)\left(\frac{n-5}{6}\right)$

&c. &c.

Quae ſeries ad determinatum numerum muſculorum adplicita dat ſequentes ſummas motuum.

I.

I. $a\alpha$	II. $a\alpha b\beta$	III. $a\alpha b\beta c\gamma$
1 + 1 = 2	4 + 4 = 8	6 + 12 + 8 = 26

IV. $a\alpha b\beta c\gamma d\delta$	V. $a\alpha b\beta c\gamma d\delta e\varepsilon$
8 + 24 + 32 + 16 = 80	10 + 40 + 80 + 80 + 32 = 242.

Numerus muſculorum.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Numerus motuum =	2.	8.	26.	80.	242.	728	2186.

VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.
6560.	19682.	59048.	177146.	531440.	1594322.

XIV.	XV.	XVI.	XVII.
4782968.	14348906.	43046720.	129140162.

XVIII.	XIX.	XX.
387420488.	1162261466.	3486784400.

Solutio caſus ſecundi.

Si ſinguli muſculi agunt intenſitatibus duabus: Summa motuum omnium poſſibilium, quos membrum, ad quod illi muſculi pertinent, exercere poteſt, eſt aequalis numero ternario eleuato ad poteſtatem, cuius exponens eſt numerus muſculorum, demta vnitate $= 3^n - 1$. Quae ſumma aequalis eſt ſummae ſeriei ſupra poſitae $= 2n$, $4n\left(\frac{n-1}{2}\right)$, $8n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)$, $16n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\left(\frac{n-3}{4}\right)$ &c.

CASVS III.

Quando muſculi agunt intenſitatibus tribus.

Erit, datis muſculis, pro potentiis ſimul agentibus haec ſeries:

I. $\frac{a\alpha\mathrm{a}}{1+1+1=3}$ II. $\frac{a\alpha\mathrm{a}b\beta\mathrm{b}}{6+9=15}$ III. $\frac{a\alpha\mathrm{a}b\beta\mathrm{b}c\gamma\Gamma}{9+27+27=63}$

IV. $\frac{a\alpha\mathrm{a}b\beta\mathrm{b}c\gamma\Gamma d\delta\Delta}{12+54+108+81=255.}$ Vnde ſequens ſumma motuum emergit.

Numerus muſculorum	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
Numerus motuum =	3.	15.	63.	255.	1023.	4095.

VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
16383.	65535.	262143.	1048575.	4194303.

XII.	XIII.	XIV.	XV.
16777215.	67108863.	268435455.	1073741823.

XVI.	XVII.	XVIII.
4294967295.	17179869183.	68719476735.

XIX.	XX.
274877906943.	1099511627775.

Solutio.

Si muſculi agunt intenſitatibus tribus: Summa motuum omnium poſſibilium, quos exercere membrum po-

teſt, aequalis eſt numero quaternario eleuato ad poteſtatem cuius exponens eſt numerus muſculorum, demta vnitate $= 4^n - 1$.

Ex conſideratione horum trium caſuum eruitur

Solutio generalis.

Summa motuum omnium, quos exercere valet membrum, ope muſculorum quotcunque ad illud pertinentium, et agentium intenſitatibus quotcunque (ſi numerus intenſitatum eſt $= m$) aequalis eſt $(m+1)^n - 1$.

Corollarium I.

Si membrum trahatur a muſculis pluribus, et vnus illorum vel plures (non tamen omnes) agant intenſitatibus duabus, reliqui vnica: tunc nouae quaedam determinationes emergunt. Sint enim muſculi e. gr. quatuor, a, b, c, d; et vnus illorum agat intenſitate duplici, erunt potentiae a, α, b, c, d, quinque. Agat primo vnus ille muſculus, erunt motus duo a, α, accedat potentia ſecunda b: in propatulo eſt, hos binos motus combinari poſſe ſingulos cum potentia b; vnde oriuntur motus ab, αb; quibus ſuperadditur motus ſolitarius b. Accedat potentia tertia c; denuo omnes motus priores repetuntur multiplicando per c; vnde erunt motus ac, αc, abc, αbc, et denuo nouus motus c. Similiter omnes antecedanei motus repetuntur multiplicando per d, et augentur motu nouo d. Eadem ratione agant muſculi duo intenſitate duplici, erunt potentiae $a, \alpha, b, \beta, c, d$. Agant primo bini illi muſculi ſoli et iunctim, erunt motus octo $a, \alpha, b, \beta, ab, a\beta, \alpha b, \alpha\beta$ Accedat potentia c, haec combinata cum iſtis efficit nouos motus octo ac, αc, bc, βc. &c. et motum ſolitarium

tum *c*. Accedat potentia quarta *d*; denuo per nouam combinationem omnes motus antecedanei duplicantur, et motu nouo *d* augentur. Inde naſcitur haec regula: Dato numero muſculorum, ſumma motuum aequalis erit ſummae duplae motuum, quae competit numero illi dato muſculorum vnitate minuto, vnitate auctae. Ex. gr. ſi competant membro alicui muſculi quatuor, numerus motuum ex illorum combinatione reſultans, aequalis erit ſummae duplae motuum a tribus muſculis productorum, vnitate auctae. Vbi intelligendum eſt, terminum primum, qui duplicari debet, eſſe illum, in quo ſoli motus muſculorum intenſitate duplici agentium occurrunt; et determinari per regulam ſolutionis generalis. Sit igitur terminus primus $((m+1)^n-1)=(3^n-1)=N$. emergit haec ſeries: N, $2N+1$, $(4N+2)+1$, $(8N+4+2)+1$, $(16N+4+4+2)+1$ &c. Ex. gr. Si vnus muſculus agat duabus intenſitatibus, reliqui ſimplici, emergent dato numero muſculorum motus ſequentes.

I. *aa* — $1+1=2$.
II. *aab* — $3+2=5$.
III. *aabc* — $4+5+2=11$.
IV. *aabcd* — $5+9+7+2=23$.
V. *aabcde* — $6+14+16+9+2=47$.
VI. *aabcdef* — $7+20+30+25+11+2=95$.

Numerus muſculorum	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Numerus motuum =	2.	5.	11.	23.	47.	95.	191.

VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.
383.	767.	1535.	3071.	7134.	14287.	28575.

XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.	XX.
57151.	114303.	228607.	457215.	914431.	1828863.

Si muſculi duo: erit I. $\frac{a\alpha}{1+1=2}$. II. $\frac{a\alpha b\beta}{4+4=8}$. III. $\frac{a\alpha b\beta c}{5+8+4=17}$.

IV. $\frac{a\alpha b\beta cd}{6+13+12+4=35}$. V. $\frac{a\alpha b\beta cde}{7+19+25+16+4=71}$.

VI. $\frac{a\alpha b\beta cdef}{8+26+44+41+20+4=143}$.

Numerus muſculorum	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Numerus motuum =	2.	8.	17.	35.	71.	143.	287.

VIII.	IX.	X.	XI.	XII.	XIII.	XIV.
575.	1151.	2303.	4607.	9215.	18431.	36863.

XV.	XVI.	XVII.	XVIII.	XIX.	XX.
73727.	147455.	294911.	589823.	1179647.	2359295.

Si muſculi tres: erit I. $\frac{a\alpha}{1+1=2}$. II. $\frac{a\alpha b\beta}{4+4=8}$. III. $\frac{a\alpha b\beta c\gamma}{6+12+8=26}$.

IV. $\frac{a\alpha b\beta c\gamma d}{7+18+20+8=53}$. V. $\frac{a\alpha b\beta c\gamma de}{8+25+38+28+8=107}$.

VI. $\frac{a\alpha b\beta c\gamma def}{9+33+63+66+36+8=215}$.

Vnde ſummae pro reliquis numeris muſculorum facili opera erui poſſunt.

Corol-

Corollarium 2.

Obſtupeſcis, Lector, ad tam ingentes numeros. Neque forte ſine ratione. Sed duae imprimis cautelae exinde redundant. 1. Deſines in poſterum mirari, vnde eueniat, vt e. gr. lingua, caput, femur, et alia membra, ad quae muſculi non pauci pertinent, tot mille motus exercere poſſint, vnde tam diuerſae loquelae, voces, modulationes, inceſſus, ſaltationes, conuulſiones, (vt Chorea S. V.) emergant. Si enim memineris, ad ſolam vocem et loquelam non modo muſculos linguae, ſed et labiorum, osſis hyoidis, vuulae, laryngis, pharingis, concurrere: posſibilitatem multorum millionum motuum exinde clare perſpicies; ſi modo omnes vnica intenſitate agere ſupponas. Quis autem cuiuis muſculo intenſitates plures non concedat? 2. Diſcis, quantum oneris ſibi imponeret, qui adgrederetur, *diſtincte explicare omnes motus poſſibiles in corpore humano.* Hoc enim ab intellectu humano finito numquam exſpectabis. Quam inique igitur agunt, qui talia a phyſiologo poſtulant. Decem muſculi duabus intenſitatibus agentes 1048575 motus producunt: quis autem vel mille, ne dicam milliones ſibi diſtincte animo repraeſentet? Et iſti tamen motus omnes poſſibiles ſunt. Aetatem ſuam viginti homines conſumerent, qui adgrederetur, ſingulos motus poſſibiles, a viginti muſculis, duabus intenſitatibus agentibus producibiles = 3486784400, in chartam conſignare. Ad ſcribendos autem motus 1099511627775. quos totidem muſculi intenſitatibus tribus animati producunt, multa millia ſeculorum non ſufficerent.

DE FILICASTRO,

NOVO PLANTARVM GENERE, ALIISQVE MINVS NOTIS RARIORIBVS FILICVM SPECIEBVS.

A. I. Amman.

Tab XVIII. XIX. XX. XXI. XXII. et XXIII.

PLurimae dantur late ſic dictarum Filicum ſpecies, quae ſemina gerunt vel in foliis, vel in coſtis ſiue pediculis peculiaribus, a reliquis ſterilibus eiusdem plantae vt plurimum omnino diuerſis. Has omnes fere rei herbariae Scriptores methodici aut ad Osmundae ſiue Lunariae genus retulerunt, aut ad ea Filicum genera, cum quibus foliorum ſterilium praeſertim ſtructura maxime conueniunt, nulla habita ratione, num coſtae vel pediculi ſeminiferi ex ipſa radice proueniant, nec ne? Quare clarioris diſtinctionis gratia hasce tam numeroſas, tamque diuerſas inter ſe Species a reliquis ſeparare, et peculiare exinde genus conſtituere nec ſuperuacaneum forte, nec inutile erit in dignoscendis, ſic dictis plantis Capillaribus.

Plantae igitur Capillares in genere diuiduntur in eas, quarum folia omnia aequalia et fructifera ſunt, et illas, quae folia obtinent duplicis generis et diuerſae ſtructurae, alia nempe ſterilia, alia fructifera. Quae duplicis generis foliis praeditae ſunt, vel ſemina habent in pediculis folioſis ex ſterilium foliorum coſtis ortum ducentibus; vel in foliis ſiue coſtis peculiaribus ex ipſa radice egredientibus, a ſterilibus diuerſis. Priores omnes ad Osmundam referri poſſunt:

poſſunt. Ex poſterioribus vero diuerſum, et ab Osmunda diſtinctum genus ob modo allatas rationes conſtituam, ſub nomine FILICASTRI.

FILICASTRI igitur character eſto: habere ſemina in coſtis peculiaribus, ex ipſa radice ſurgentibus, diſpoſita; OSMVNDAE vero, Semina gerere in pediculis aut ſurculis peculiaribus ex ſterilium foliorum coſtis egredientibus. Quibus notis hoc ab illo, ambo autem a reliquis omnibus plantarum Capillarium generibus facillime diſtinguuntur.

FILICASTRI nomen ex Geſneri tractatu de Lunariis ſumptum eſt, qui olim Osmundae vulgari illud impoſuit, quod vero nunc huic generi proprium facimus.

Species omnes huius Filicum generis, de quibus aliquid certi affirmare audeo; recenſere, rariorum et nouarum deſcriptiones iconesque exhibere animus eſt; eas autem quum foliorum praeſertim ſterilium ſtructura admodum varient, diuidimus in FILICASTRA, quae praedita ſunt:

1. Foliis ſimplicibus minime laciniatis.
2. Foliis, in lacinias tantum ad mediam vsque coſtam non pertingentes, diuiſis.
3. Foliis in varias lacinias diuiſis.
4. Foliis in pinnas tantum diuiſis.
   Integras, vel
   Laciniatas.
5. Foliis ramoſis in plures pinnas ſimplices diuiſis.
6. Foliis ramoſis in pinnulas ſubdiuiſis.

Sectionis primae, eorum ſcilicet quae folia obtinent minime laciniata ſimplicia, ſequentia mihi nota ſunt.

1. FI-

1. FILICASTRVM Americanum, folio ſimplici villoſo rufescenti, maius. Lingua ceruina villoſa maior et rufescens Plumierii in Tractatu de Filicibus Americanis pag. 110. Tab. 126.

2. FILICATSTRVM Americanum, folio ſimplici, villoſo, minus. Lingua Cervina villoſa, minor Plum. de Filic. Amer. pag. 110. Tab. 127.

3. FILICASTRVM Americanum, folio ſimplici, longiori et anguſtiori, coſtis villoſis. Lingua Cervina anguſtifolia, coſtis et pediculis villoſis Plum. de Filic. Amer. pag. 113. Tab. 129.

4. FILICASTRVM Americanum folio ſimplici, anguſtiori, villoſo et muſcoſo. Lingua Ceruina villis et ſquamulis aureis muſcoſa Plum. de Filic. Amer. pag. 120. Tab. 139.

5. FILICASTRVM Americanum, folio ſimplici, rigido et glabro. Lingua Cervina rigida et glabra Plum. de Filic. Amer. pag. 118. Tab. 135.

6. FILICASTRVM Indiae Orientalis, Ari folio. Aſplenium Luzon. Ari folio Peciuer. Gaz. Nat. et Art. Tab. 50. F. 12. Phyllitis Anglicana Luzonis. Ray Syllab. Stirp. Inſulae Luzon. pag. 2. n°. 18.

FILICASTRI Secundae Sectionis, foliis nempe in lacinias tantum ad mediam vsque coſtam non pertingentes diviſis, ſequentes ſunt Species:

7. FILICASTRVM Polypodii folio breuiore et anguſtiore. Polypodium anguſtifolium folio vario Inſt. r. h. pag.

pag. 540. Spicant Tragi et Germanorum Flor. Ienens. pag. 279. Lonchitis altera folio Polypodii I. B. 3. 744. Haec planta quamuis a celeberrimo Tournefortio propter foliorum ſimilitudinem ad Polypodium relata ſit, rectius tamen ad hoc FILICASTRI genus pertinet, quoniam duplicis generis foliis, aliis ſterilibus, fructiferis aliis, ex ipſa radice egredientibus, a ſterilibus diuerſis, praedita eſt. Male quoque eandem hancce plantulam pro Struthiopteride Cordi et Thalii a Ioanne Bauhino, Raio aliisque habitam fuiſſe, infra demonſtrabo. Subinde in hac ſpecie laciniae ad coſtam vſque mediam diſſectae ſunt, vt plurimum tamen Polypodii in modum prope eam coniunctae.

8. FILICASTRVM Virginianum Polypodii folio latiore et longiore, tenuiſſime ſerrato.

Hoc Bobartus in Hiſtoriae Oxonienſis Tom. III. pag. 569. Sect. 14. n°. 24. ſub nomine Lonchitidis maioris, Virginianae, folio vario, alis Polypodii in modum coniunctis, breuiter ſic deſcribit: planta haec hactenus incognita, e Virginia recepta, pedalis eſt altitudinis. Folia promit ampla, lobata, alis integris biuncialibus, planis et mucronatis, vnaque extremum claudente, e foliacea membtana ſecundum coſtam mediam, Polypodii ritu, altetnatim egredientibus, praedita. Praeter haec alia oriuntur folia ex alis anguſtioribus, rarius diſſitis, puluerulentis, Lonchitidis alterae, foliis Polypodii in modum compoſita. Huic deſcriptioni addendum, quod laciniae aut alae, vt ipſi audiunt, foliorum ſterilium quam tenuiſſime ſerratae ſint; quod inferiores earundem vtrinque ſint anguſtatae, ſecus ac in mediis et ſuperioribus, quae lata

baſi praeditae ſunt; quod duae infimae ope breuium pediculorum coſtae mediae annexae ſint, ſuprema vero quodammodo vndulata ſit. Quae quidem omnia ſatis bene in figura, quam Sect. 14. Tab. 2ª. inter alias Capillares dedit, expreſſa ſunt, quanquam in deſcriptione ne mentio quidem eorum facta ſit. Porro notandum, lacinias ſterilium foliorum, quo propiores ſummitati, eo minus profunde ſectas eſſe; coſtas ſeminiferas teretes eſſe, rigidas, glabras, ſplendentes, ex badio colore nigricantes; coſtas autem mere folioſas ſeminiferis multo teneriores eſſe, pallidas, in dorſo conuexas, in facie canaliculatas; capſulas ſeminales in pinnis aut alis fructiferis, in lineolas oblongas vtrinque verſus margines earum diſpoſitas eſſe. Plukenetio eadem haec planta audit: *Filix Oſmundae* facie, Mariana, ſegmentis minutim denticulatis, pediculo atronitente Mant. pag. 80. Tab. 400. Fig. 2. Verum folia fertilia, quae ad ſiniſtrum latus ſterilium appicta ſunt, minime ad hanc plantam pertinent, ſed potius ea, quae Tab. praecedenti 399°. idem Auctor exhibet, ſub titulo nouo Filicis Floridanae, praelongis et anguſtis pinnulis, ad oras ſeminibus fimbriatis, pediculo ſplendente, nigro.

9. FILICASTRVM Virginianum, ſenſibile, laciniis profunde dentatis. Polypodium ſenſibile Munting. Phyt. curioſ. pag. 289, et 290. Filix Indica Oſmundae facie Bodaei a Stapel in Theophr. pag. 320. Filix Indica, vel herba viua foliis Polypodii Sim. Paulli Quadrip. Bot. pag. 302. Filix, ſeu Polypodium Indianum foliis profunde ſinuoſis, Marrubii aquatici aemulis Pluk Alm. Phyt. Tab. 30. Fig. 1. Filix Mariana, Oſmundae facie, racemi-

cemiſera. Eiusdem Mant. pag. 80. Tab. 104. Filix Indica, Polypodii facie Mentz. Pug. Polypodium Virginianum, Oſmundae facie tenerius Bobart. Hiſt. Oxon. Tom. 3. pag. 563. Sect. 14. Tab. 2.

Muntingii deſcriptio Belgica loco ſupra citato de foliis ſterilibus ſatis accurata eſt; de coſtis autem fructiferis plane nihil dicit, licet in eleganti eius icone vna earum, ſed nondum perfectam magnitudinem et maturitatem adepta, ad ſiniſtrum latus ex ipſa radice egrediens adpoſita ſit. Hunc defectum ſupplet Plukenetiana figura Tabulae 104. Sunt autem hae coſtae pedales aut ſesquipedales, in plurimas pinnas diuiſae, in quarum ambitu, vascula ſeminalia maiora, ſphaerica, duriora, nigricantia, per totam earum longitudinem vtrinque diſpoſita conſpiciuntur.

Huic ſpeciei peculiare eſt, quod marcescant folia ſterilia eo loco, vbi digitis vel parum comprimuntur. Si vero folia eadem integra manibus contrectantur, et leuiter tantum premuntur, breui poſt omnino pereunt. Vnde etiam ſenſibilis dicta eſt. In Carolina, Virginia, Marilandia, Penſyluania, aliisque Septentrionalis Americae regionibus copioſe prouenit.

10. FILICASTRVM Americanum ampliſſimo Polypodii folio, rigido, et acuminato. Polypodium rigidis et acuminatis pinnulis Plum. de Filic Amer. pag. 69. Tab. 90.

FILICASTRI foliis in varias lacinias diſſectis vnicam ſpeciem noui.

11. FILICASTRVM Americanum minimum repens. Lichen digitatus Geranii facie Plum. de Filic. Amer. pag. 141. Tab. 50.

FILICASTRI foliis in pinnas tantum integras diuiſis hae mihi notae ſunt ſpecies:

12. FILICASTRVM maius, Virginianum, pinnis longioribus et acutioribus. Cum hac ſpecie eadem eſt: Lonchitis Virginiana, folio vario, alis longioribus, acutis Bobart. Hiſt. Oxon. Tom. III. pag. 569. Sect. 14. Tab. 2. qui et eandem ſic deſcribit: haec terrae Virginienſis incola, elatior apparet planta, cuius folia alas inferiores proferunt triuncialis longitudinis, aliasque aſſurgentes breuiores, vt pyramidalem figuram conſtituant ad baſin ſubrotundas, ſemunciam latas, in mucronem acutum ſe anguſtantes, ex vtroque latere virides, per coſtam mediam alternatim diſpoſitas. Inter haec alia aſſurgunt folia, quorum alae anguſtiores, acutiores, et rarius diſpoſitae ſunt, ſuperne virides, a neruo medio oblique ſed eleganter venoſa, inferne vero fuſca, puluerulenta materia omnino obtecta.

13. FILICASTRVM Africanum minus, pinnis breuioribus et anguſtioribus. Filix Africana, minor, Lonchitidis facie Par. Bat. Prodr. Filix minor, Africana, Lonchitidis folio, pinnulis auriculatis, planis Pluk. Alm. Bot. pag. 152. Tab. 89. Lonchitis minor, Africana, alis crebrius diſpoſitis, ſeſſilibus, et ad baſin rotundis, planis ac variis Bobart. Hiſt. Oxon. Tom. III. pag. 569. Sect. 14. Cuius iterum deſcriptio ſic ſe habet: e denſiſſimo ceſpite oriuntur folia plurima, recta, dodrantalia, ſtatim a radice alis oppoſitis ornata; hae autem inferiores breues ſunt, deinde medium circiter in vncialem longitudinem exporriguntur, et poſtea gradatim in acutum mucro-

cronem contrahuntur, creberrime diſpoſitae, vt ſibi inuicem contiguae incumbant, immo 30 vel 40 alarum coniugationes coſtae frequenter adhaereant, planae, ad baſin latiuſculae, ſubrotundae, ſeſſiles, et in mucronem acutum ſenſim terminatae, ſpiſſiori virore, perpetua fronde lucentes. Praeter haec alia oriuntur folia ex anguſtioribus alis conſtructa, in quibus pulueris ſeminiferi ſpecies conſpicitur, quemadmodum et in aliis huius diſtributionis plantis. Huc vsque Bobartus. Sed notandum adhuc eſt, pinnas ſterilium foliorum ſubinde, quanquam leuiter admodum dentatas eſſe; capſulas autem ſeminales in fructiferis iuxta neruum medium vna continua ſerie diſpoſitas eſſe.

14. FILICASTRVM Americanum maximum, pinnis Linguam Ceruinam referentibus. Osmunda Linguae Cervinae foliis Plum. de Filic. Amer. pag. 132. deſc. Tab. 154. Ic.

15. FILICASTRVM Americanum nodoſum, maius. Lingua Ceruina nodoſa, maior Plum. de Filic. Amer. pag. 90. Tab. 108.

16. FILICASTRVM Americanum nodoſum minus. Lingua Ceruina nodoſa minor Plum. de Filic. Amer. pag. 91. Tab. 109.

FILICASTRI in pinnas tantum diuiſi laciniatas hae ſunt ſpecies.

17. FILICASTRVM Americanum, pinnarum laciniis acutis, non dentatis. Osmunda latis crenis inciſa Plum. de Filic. Amer. pag. 133. deſc. Tab. 155. Ic.

18. FILICASTRVM Virginianum racemoſum. Osmunda Mariana Dryopteridis folio Mus. Pet. n°. 442. Filix botrytis Virginiana maior, per totam caulis longitudinem floreſcens Bobart. Hiſt. Oxon. Tom. III. pag. 593. Sect. 14. Tab. 4. Filix non ramoſa latius dentata, Mariana, floreſcens, thyrſo florum ruffa lanugine tecto Pluk. Mant. pag. 78. Tab. 400. F. 1. Osmunda non ramoſa caule florifero, a folioſis ſeiuncto, plurimis ſeminum racemis craſſis rubentibus, lanuginoſis, coniugatim exeuntibus onuſto Ray. Hiſt. App. pag. 87.

Bobarti deſcriptio haec eſt: folia fortaſſe diſtinctis pediculis, vti fit in quibusdam aliis huius ſectionis, geſtat; ſcapus enim noſtri exemplaris ſesquipedalis, lanugine pulla veſtitus, antica parte ſulcatus, recte aſſurgere videtur. Huic ad vncialem intercapedinem ab imo pene ad ſummum vsque ac fortuito poſitu adnaſcuntur, alarum vice racemuli vnciales et ſescunciales, puluere ferrugineo ſeminifero omnino obſiti, in quibus nulla materia folioſa obſeruatur.

Folia ſterilia reliqua, quae Bobartus non vidit, in Iconiſmo Plukenetiano repraeſentantur, a Raio vero ita deſcribuntur: pediculi ſeu ſcapi folioſi in plantis, ſaltem quas nobis videre contigit, dotrantales erant, tenues, plurimos ramulos, binos ex aduerſo per interualla ſitos, emittentes, luteo-virides, duas tresue vncias longos, profunde velut in pinnas diuiſos, inciſuris tamen ad mediam ſurculi coſtam non pertingentibus. Erant autem ſegmenta illa pinnularum aemula, obtuſa, per margines aequalia.

Haec ſpecies propter capſulas ſeminales in quamplurimos racemos denſos et villoſos diſpoſitas, ab omnibus reli-

reliquis huius generis maxumopere differt, atque adeo facillime dignoſcitur. Illae autem capſulae ſphaericae ſunt figurae et anulo elaſtico, vt congeneres, praeditae, quo disrupto capſulae dehiscunt, et progreſſu temporis in duas valuas haemiſphaericas delabuntur, ſemina ſundentes quam plurima minutiſſima. Sponte in Carolina, Virginia et Marilandia Americae Septentrionalis Prouinciis prouenit,

19. FILICASTRVM Septentrionale et paluſtre, pinnarum laciniis oblongis tenuiſſime dentatis.

Rara haec eſt admodum planta, paucis Botanicis bene nota, a nemine accurate ſatis deſcripta. Eius ergo deſcriptionem accuratiorem icone illuſtratam exhibemus. Tab. XVIII.

Radix ei eſt craſſiſſima, pugni magnitudine, ſquamis nigris, craſſis, veterum ſcilicet foliorum relictis veſtigiis, arcte ſibi inuicem ſuperincumbentibus, obtecta, innumeras fere fibras, nigras itidem, validas, teretes filorum ferreorum ad inſtar emittens. Craſſities autem huius radicis maximam partem a modo dictis veterum foliorum coſtarumque fructiferarum emarcidarum relictis veſtigiis pendet, corpus ipſum non adeo magnum nec craſſum eſt. Porro ex eadem ſingulis annis noui ſtolones ex lateribus pullulant, marcescentibus veteribus.

Primo ſtatim vere ex hac radice ſurgunt aſparagi, primo inflexi et conuoluti, ſiluaque tenui et muſcoſa materia obducti, qui progreſſu temporis explicantur in folia cubitalia aut ſesquicubitalia, quoad magnitudinem ratione ſoli admodum variantia; quo enim hoc humidius, eo laetius et maius incrementum integra planta capit. In hortos transplantata, et in locum arenoſum ſiccumue, ventis

et

et radiis ſolaribus nimis expoſitum collocata, tenera admodum promit folia, parua et ita fragilia, vt flante mediocri vento in fruſta fere dilabantur, coſtarum autem fructiferarum ne rudimenta quidem appareant. Contrarium euenit, ſi in locum humidum et vmbroſum ponitur. Sunt autem haec folia vtrinque anguſtata, in medio latiſſima, in pinnas tantum diuiſa ſeſſiles, id eſt, nullis pediculis rachi aut coſtae mediae affixas, numero triginta quatuor, quinque, ſex, ad quadraginta vsque et plures in vnoquoque latere. Rachis aut coſta media, reſpectu magnitudinis totius folii et coſtarum fructiferarum, tenuis admodum eſt et fragilis, pallida, extus valde gibba, intus concaua ſeu canaliculata, radici lata baſi adnaſcens. Sex aut ſeptem pinnarum infimarum, proxime radicem ſpectantium, ſtructura plane diuerſa eſt a mediis et ſupremis: prima enim omnium breuiſſima, interdum vix vnciae trientem longa, in tres tantum lacinias diſſecta eſt, vnam ſcilicet mediam longiorem, et laterales duas breuiores dentatas et arcuatas. Sequentes ad octauam, ſubinde ad nonam aut decimam vsque, paulatim longiores factae, ſimilibus ad baſin laciniis arcuatis et auriculatis, profundius ſectis praeditae ſunt, ita tamen, vt in ſingulis earum ſuperior inferiori longior ſit. Reliquarum omnium pinnarum ſegmenta aequalia ſunt. In medio omnium longiſſimae, quatuor vel quinque pollices longae, octo circiter lineas latae, baſi lata coſtae mediae ſine pediculis adnatae, modo coniugatae, modo alternae, ad incerta interualla diſpoſitae ſunt, nam aut inferiori ſuperior ſuperincumbit, aut eam tantummodo tangit, vel ſatis a ſe inuicem remotae ſunt. Praeter infimas et ſupremas omnes hae pinnae in la-

lacinias latas, oblongas, obtuſas, verſus extremitatem tantum tenuiſſime, aut plane non dentatas, profunde quidem, ſed non ad medium neruum vsque diſſecantur. Folii autem extremum non in pinnas, ſed in lacinias tantum, Polypodii in modum ad coſtam mediam fere pertingentes, per margines vtplurimum aequales, diuiſum eſt. Notandum praeterea folia haecce non ex medio radicis, ſed ex eiusdem limbo excreſcere, et in orbem, nidum auis exprimeotem, diſponi.

Praeter haec, quae ſeminibus prorſus deſtituta ſunt, verſus Autumnum ex ipſo radicis meditullio aliae enaſcuntur coſtae, quatuor, quinque aut ſex et plures pedales, vel ſesquipedales, validae, prope radicem trientem vnciae ad minus latae, ex flauo ſubfuſcae, in dorſo valde gibbae vel conuexae, in facie canaliculatae, intus ſpongioſae, lata itidem baſi radici innaſcentes; quarum aliae ima parte pinnis folioſis ſterilibus, ſed breuiſſimis, vncialibus vel ſeſcuncialibus, praecedentibus caeterum ſimilibus praeditae ſunt, aliae nequaquam. Ad quinque aut ſex pollicum a radice diſtantiam, ſupra modo dictas pinnas folioſas, ſi adſint, e lateribus harum coſtarum, egrediuntur pinnae fructiferae a tringinta ad quadraginta vsque in vnoquoque latere, quarum primae et extremae, reliquis in medio poſitis, multo ſunt breuiores, ſterilium ad inſtar modo coniugatae, modo alternae, modo magis, modo minus a ſe inuicem remotae. Hae autem ſeſcuncialem, aliquando et biuncialem longitudinem adipiſcuntur, latitudinem vnius aut alterius lineae. Initio ſordide virescentis ſunt coloris; maturescentibus autem ſeminibus nigro fusci. Haec ante maturitatem conſpici non poſſunt; pinnarum enim laciniae

membranaceae et valde tenues tunc temporis reflexae ſunt verſus neruum medium earundem, ſeminaque penitus obtegunt, ita vt aequalia tunc, vel minime diuiſa aut laciniata corpuscula longa, teretia, vel paululum compreſſa aut nodoſa referant. Creſcentibus autem indies vasculis ſeminalibus, laciniae earum tandem diducuntur et aperiuntur: quo facto capſulae apparent ſphaericae, vna continua ſerie ad neruum pinnarum medium vtrinque poſitae, ſquamulis fuscis obuolutae, et zona ſeu annulo Succini inſtar ſplendente, fere pellucido, et geniculato, elaſtica vi donato, cinctae, quo fracto aut in longum extenſo, ſemina ex vnaquaque capſula funduntur quamplurima, minutiſſima, flaua, non niſi armatis oculis conſpicienda. Non raro etiam pinnarum aliquot folioſarum infra fructiferas in eadem coſta poſitarum, vt ſupra diximus, ſeminibus donantur, marginesque laciniarum conuolutos habent. Vide Tab. XVIII. Tab. XVIII.

Sponte haec planta et copioſe quidem prouenit in variis Ingriae locis paluſtribus et vliginoſis, praeſertim circa *Catharinen Hoff*, Aeſtiuam Imperialem non longe ab vrbe ſitam; nec non in humidis Alnetis Betuletisque Careliae Wiburgum verſus. Ex Sibiria quoque Clariſſimus Gmelinus miſit.

Inter rei herbariae Scriptores primus eſt Cordus, qui de hac planta mentionem fecit in ſua Stirpium Hiſtoria, quamque *Struthiopteridem* appellat, Filicis inſignem ſpeciem in Hercynia Sylua prope Goslariam inuentam figura admodum ſpectabilem, addita deſcriptione, ſed minus perfecta, quia, vt ipſe fatetur, integram plantam nondum viderat. Editores Cordi Hiſtoriae, neſcientes quamnam plantam Auctor deſcripſerit, putarunt hanc Cordi Struthiopte-

pte-

pteridem eandem eſſe plantam cum *Lonchitide altera folio Polypodii I. B.* quapropter etiam huius figuram ex Trago ſumptam Auctoris deſcriptioni addiderunt. Eundem errorem poſtea ſequuti ſunt Ioannes Bauhinus, Raius et alii. Caſparus Bauhinus eandem quidem exiſtimauit quoad iconem, quoad deſcriptionem autem diuerſam eſſe ſtatuit in Pinace pag. 358, diuerſoque nomine inſigniuit, *Filicis nempe paluſtris alterae, ſubfuſco puluere hirſutae*, ignarus, ipſum iam in Prodromo Theatri Botanici eandem deſcripſiſſe, vt infra dicemus.

Poſt Cordum Thalius Struthiopteridem aggreſſus eſt deſcribere in Sylua Harcynia pag. 119, et 120. Cuius deſcriptionem verbotenus hic repetimus, vt eo melius pateat, plantam, quam adumbrat, cum noſtra vnam eſſe eandemque. Illa autem ſic ſe habet: radice conſtat craſſiſſima, tuberoſaque, nonnihil fibrata, nigricante, cui circum circa adnaſcuntur pediculi longi, cubitales, procerioresque, ipſi radicis corpori ſquamatim quaſi inhaerentes vngue latiori, nigricante, longo vncias duas, ſemunciam lato, canaliculato parum, inferius tamen anguſtiori et adunco, qui eleganter exprimit figuram inferioris partis inſtrumenti iſtius ferrei pharmacopaeorum, ſpatulae nomine ipſis appellati, quo nimirum materiae ab ipſis, dum medicamenta componuntur miſcenturque, agitari counirique ſolent. Reliqua deinde pars, quae vnguem mox ſubſequitur, canaliculata imbricatur cauitate profundius. Pediculi exteriores frequentibus coſtis folioſis exornantur, quarum ſemper bina ad vtrumque latus aequaliter ſibi contraponuntur; ſuntque foliola in hiſce coſtis ſimilia prorſus foliis Filicis foeminae ſupra indicatae. Ac iſtis exterioribus

pediculis color eſt in flauo ruffescens, ipſique aliquantulum moll ori materia conſtant. Interiores vero ex ſpadiceo ſubnigricant, et craſſiores ſunt, multoque ex ſolidiori materia compoſiti. Horum ii qui caeteris ſunt proceriores, inferiori loco absque coſtarum adminiculo, foliolis iſtiusmodi ad latera obueſtiuntur, qualia eſſe folia exteriorum pediculorum coſtis iam dixi: deinde vero poſt medium pediculi vsque in ſummum eius cacumen vtrinque coſtae folioſae frequentes ſurſum porrectae in ipſis diſponuntur breuiores, neruo per medium dorſi ipſarum extrinſecus protuberante, coloris ſpadicei, coſtis ſingulis interiori parte imbricatis: folioſa vero pars ad latera ipſarum continua ſerie vtrinque crenantur, quemadmodum folia Scolopendrii veri: illaeque crenis anguſtioribus ita inciſae particulae eleganti (vt ſic dicam) crispatura verſus interiora recuruantur aut retorquentur, puluisculum iſtiusmodi etiam, qualis eidem eſt ſtirpi, denſe ac arcte ipſis adhaerentem, interius ſibi includentes comprehendentesque: vnde figuram aliquam iſta crispatura conuoluta haec folia quaſi pennarum Struthio-Camelorum cum plumata ipſarum incuruatione effigiare videntur.

Dixi ſupra, etiam Casparum Bauhinum hancce plantam deſcripſiſſe in Prodromo Theatri Botanici, videamus nunc an cum noſtra conueniat nec ne? Nomen quod huic ſpeciei attribuit eſt: Filix paluſtris maxima. Deſcriptio autem, quae habetur pag. 150 et 151, haec eſt: radice eſt omnium Filium craſſiſſima, duos pugnos ſuperante, nigra, velut ex craſſiſſimis ſquamis compacta, et multis fibris nigris capillata, vnde exſurgunt folia plura, atrouirentia, tres cubitos ſuperantia, in latus ampliſſime

ex-

expanſa; quorum pediculus ruffeſcens, anguloſus, cauus, inſtar oblongi auriſcalpii ex radice prodit, qui vbi pedalem altitudinem adeptus eſt, folioſus redditur ad modum Filicis maris vulgaris, nam veluti ex plurimis pinnis, ſecundum margines crenatis ad vnum pediculum coharentibus componuntur. Verum ad radicem inter media folia, plura foliorum rudimenta cubitalia, veluti futurorum principia conſpiciuntur, eo modo, quo in Filice florida ſiue Osmunda dicta, circa ſummos ramulos apparent; a qua tamen differt, quod Osmunda caules edat, et caulium ſummis veluti flores ſiue ſeminum rudimenta adhareant, et folia habeat latiora et haudquaquam per margines ſerrata. Haec Bauhinus: Quae ſi cum ſupra dictis comparentur, vnicuique, exiſtimo, clare patebit, Bauhinianae plantae radicem, folia, coſtas fructiferas, quas ille futurorum foliorum principia perperam vocat, cum dictis partibus, ſi magnitudinem excipias ratione ſoli admodum variantem, omnino conuenire, adeoque Bauhinianam et noſtram vnam eandemque eſſe plantam: folia enim Filicis maris dictae ſimilia, ſterilia, plura alia foliorum rudimenta ex ipſa radice egredientia et fructifera eo modo, quo in Filice florida ſiue Osmunda dicta, in nulla alia hactenus cognita Filicum Europaearum ſpecie deprehenduntur.

Quae in Raii et Moriſoni Hiſtoria plantarum alibique proſtant deſcriptiones huius Bauhinianae plantae, omnes cum nomine ex eius Prodromo petitae ſunt, praeter eam, quam Muntingius dedit in Phytographia curioſa Lugduni Batarorum Belgice edita in folio, pag. 292, ſub titulo Struthioferae; et breuiſſimam illam, quam exhibet Raius in Hiſtoriae Appendiee Vol. 3. pag. 68.

ſub nomine Lonchitidis Norwegicae maioris Petiuer. Verum in hisce deſcriptionibus coſtarum fructiferarum tantum mentio fit ; icon quoque Muntingii pinnas fructiferas iuſto craſſiores et breuiores exhibet. Fallitur itidem Auctor dum ſcribit, coſtas hasce verno tempore ex radice progerminare, cum e contrario verſus Autumnum demum poſt folia ſterilia creſcant. Taceo ea, quae idem affirmat, hancce plantam ſeminibus deſtitutam eſſe. Nec mirandum illum cum Kiggelaerio in editione eiusdem operis absque deſcriptionibus Amſtelaedami in fol. edita 1711, Bauhini et Thalii mentionem nullam feciſſe, quoniam vtrisque ignotum fuit, plantam, de qua agitur, duplicibus, iisque vel ſterilibus vel fructiferis foliis, inter ſe diuerſis, praeditam eſſe. Immo a nonnullis Muntingii iconismus pro ficto habitus fuit, ſicuti et plures alii eodem opere contenti, verbi gratia *Maceris arboris antiquorum*, *Lunariae Chymiſtarum*, *Serpentariae mirabilis montanae* &c. In fingendis enim plantarum iconibus veterum herbariorum deſcriptionibus accommodatis, Muntingius Mathiolo vix cedere creditur. Iniuſte tamen hic criminis incuſatur. Praeterea adhuc male Raius in Hiſtoriae Plantarum App. ſeu Tom. III. pag. 70. Struthiopteridem Muntingii, quam Struthioferam ſcribere debuiſſet, pro Lonchitidis aſperae vulgaris ſpecie habet. Peius fecit Florae Ienenſis auctor pag. 277. dum Filicem paluſtrem maximam C. B. et Filicem tenuiſſime dentatam, Rhaeticam I. B. 3. pag. 740. pro vna eademque planta exhibet, quamquam toto caelo inter ſe diſtinctae ſint.

Tab. XVIII. FILICASTRI foliis ramoſis in plures pinnas ſimplices diuiſis vnicam noui ſpeciem, uimirum.

20.

20. FILICASTRVM Americanum foliis ternis, anguſtis et ſerratis. Phyllitis ramoſa trifida Sloane Cat. plant. Inſul. Iamaicae pag. 19. Eiusd. Hiſt. Nat. Iamaic. Tom. 1. pag. 88. Tab. 45. Lingua Ceruina triphylla anguſta et leuiter ſerrata Plum. de Filic. Amer. pag. 123. Tab. 144.

Huic peculiare eſt, quod folia ſterilia in tres ſemper pinnas ſerratas diuiſa ſint, fructifera vero tantum in duas anguſtiores et minime ſerratas. Ill. Sloanii figura ſterilia tantum repraeſentat.

FILICASTRI tandem foliis ramoſis in pinnulas diviſis ſequentes ſunt ſpecies.

21. FILICASTRVM Americanum minus, foliis ramoſis, hirſutis.

Haec prorſus noua eſt ſpecies, circa Veram Crucem in Noua Hiſpania a Gul. Houſtono M. D. lecta et mecum communicata. Integra planta vix quinque aut ſex vnciarum altitudinem ſuperat. Radix parua, multis fibris nigris capillata, ex qua folia enaſcuntur plura, ramoſa, hirſuta, ex coſta pallide flaueſcente, in dorſo gibba, in facie canaliculata, valde tenui, et quinque aut ſex alarum coniugationibus conſtantia. Hae ex coſtae modo dictae lateribus ad ſesquipollicarem praeter propter a radice diſtantiam enaſcuntur, modo coniugatae, modo alternae, in varias minores diuiſae, quae mox in pinnulas ab anguſta baſi paulatim latiores redditas, extremo plerumque trifidas, dentatas, ad oras, et in ſuperficie vtraque, ſparſa albicante lanugine obſitas, diſſecantur.

Ex ipſa radice in medio foliorum ſterilium alia ſurgit coſta, vtplurimum ſingularis, tenuis admodum, ex vi-

viridi flaueſcens; canaliculata, longe ſupra reliqua folia protenſa, quatuor, quinque aut ſex vncias alta, verſus extremitatem leuiter lanuginoſa, et in plures ramulos folioſos diuaricata, quibus adnaſcuntur capſulae ſeminales non admodum frequentes, ſphaericae, ex ſquamoſis membranulis compoſitae, et annulo elaſtico geniculato cinctae, vt Tab. XIX. in congeneribus. Vide Tab. XIX. Fig. 1. plantam humiliorem integram demonſtrat. Fig. 2. folium ſterile maioris et elatioris plantae repraeſentat. Fig. 3. coſtam ſeminiferam eiusdem.

22. FILICASTRVM Americanum verticillatum. Osmunda verticillata Plum. de Filic. Amer. pag. 137. deſc. Tab. 160. Fig.

23. FILICASTRVM Americanum Filiculae folio. Osmunda Filiculae folio altera Plum. de Filic. Amer. pag. 138. Tab. 161.

24. FILICASTRVM Anglicum, Adianthi folio et facie. Adianthum album floridum, ſeu Filicula petraea criſpa Ray Hiſt. Plant. pag. 153. Filix botrytis minima, ſiue Filicula petraea florida, Anglica, foliis pluriſariam diuiſis Bobart. Hiſt. Ox. Tom. III. pag. 593. Sect. 14. Tab. 4. Osmunda Weſtmorlandica, foliis tenuiſſime diſſectis Mus. Pet. n°. 792. Huius deſcriptio vid. apud Raium et Bobartum.

25. FILICASTRVM ſaxatile corniculatum minimum. Filicula ſaxatilis corniculata Inſt. r. h. pag. 542. Filix ſaxatilis corniculata C. B. P. pag. 358. Filix ſaxatilis Tragi I. B. 3. pag. 755.

Haec

Haec et praecedens planta ad hocce genus pertinent, quoniam ambae coſtulas habent, alias ſteriles et mere foliosas, alias fructiferas a mere folioſis plane diuerſas.

Hae ſunt plantae, de quibus certus affirmare poſſum, huc referri debere. Nullus autem dubito, quin aliae adhuc dentur, ad idem genus pertinentes; verum cum earum ſtructura nondum mihi ſatis cognita ſit, malui eas, tanquam dubias praeterire.

Quoniam hucusque de Filicibus actum eſt, non alienum erit aliarum aliquot minus, aut plane non cognitarum ſpecierum icones et deſcriptiones ſimul exhibere. Prima ſit

PHYLLITIS iuxta neruum fructifera, pinnis breuioribus et latioribus, Americana.

PHYLLITIDEM appello Filicum genus, cuius folia in pinnas tantum oblongas, non auriculatas, integras vel laciniatas, ope pediculi coſtae mediae adnexas, aut ſeſſiles diuiſa ſunt. Species autem ſubdiuiduntur in tales, quae ſemina, vel in globoſos vel oblongos aceruulos, aut iuxta neruum medium, aut ad oras pinnarum, certo aut nullo ordine, vna continua ſerie vel interrupta, dispoſita habent; et eas, quarum auerſa pinnarum ſuperficies in totum capſulis ſeminalibus obtecta eſt. Differt ergo hocce genus ab Hemionitide, Lingua Ceruina, Polypodio et Asplenio, foliis in pinnas diuiſis; a Trichomane pinnis oblongis; a Lonchitide pinnis non auriculatis; a Filice ſtricte ſic dicta foliis tantum pinnatis, non alatis, ſiue pinnis non in diſtinctas pinnulas, ſed ſubinde in lacinias tantum ad neruum medium non pertingentes diuiſis.

Haec autem ſpecies vix dimidii pedis altitudinem obtinet. Coſtae glabrae ſunt, extus conuexae, intus canaliculatae, quibus ad trium circiter vnciarum a radice diſtantiam adnaſcuntur pinnae oblongae, glabrae, neruoſae, rigidae, craſſiusculae, in ambitu aſperae, ſi digiti deorſum ducantur, ſesquipollicem longae, dimidiam vnicam latae, ſeſſiles, vndecim aut duodecim in vnoquoque latere. Priores harum pinnarum vtplurimum coniugatae, latiori et rotundiori baſi reliquis praeditae, ope nerui medii tantum pediculi vicem gerentis rachi vel coſtae mediae adhaerent; e contra ſuperiores integra baſi eidem adnaſcuntur. Facies omnium in medio ſulcata eſt. In dorſo autem iuxta neruum medium admodum extantem, vna continua ſerie a baſi ſere ad apicem vsque vascula ſeminalia gerunt valde numeroſa, denſe congeſta, ruffa, congeneribus ſimilia.
Tab. XX. vid. Tab. XX.

Sponte circa Veram Crucem in Noua Hiſpania prouenit.

Differt a Lonchitide iuxta neruum pulueruIenta Plum. de Filic. Amer. pag. 48. Tab. 62. lit. B. pinnis craſſioribus, breuioribus et rigidioribus, et omnibus partibus minoribus. De Plumeriana planta dubitat Petiuerius, num Filix Malaccenſis, pinnis longiſſimis, neruo medio pulueruIento Mus. Petiu. n°. 543. eadem ſit planta, nec ne? eſt autem omnino diuerſa, elatior, pinnis longioribus, anguſtioribus, craſſioribus, nitidioribus, ſubtus aureis ſplendentibus, quarum venae ex neruo medio verſus oras egredientes minime ramoſae ſunt, ſed rectae et fere parallelae.

Tab. XXI. 2da. eſt PHYLLITIS minor, hirſuta, pinnis variis. Filix minor Brittannica, pediculo pallidiori, alis inferioribus deorſum ſpectantibus Bobart. Hiſt. Ox. Tom. III. pag.

pag. 575. qui eam ſic deſcribit: pediculos e radice emittit pedales vtplurimum, nunc breuiores, nunc longiores, graciles, pallidos, lanugine fuſca ſparſim aſperſos. His in ſuperiori parte adnaſcuntur alae, modo non e regione poſitae, laciniis profundis ad neruum vsque propemodum diviſae, in vetuſtioribus modice, ſed tenerioribus nequaquam ſerratis. Quaelibet denticulatio, pinnulaue binis punctorum puluerulentorum aureorum ordinibus in dorſo notatur. Breui, tribus notis potiſſimum compertam hanc habeas ſpeciem: 1°. alae primae inferius naſcentes, deorſum ſpectant: 2°. coniugationes ſecundae longiores baſin pyramidalem ſuppeditant. 3°. alae omnes praeter infimas lata baſi ſeſſiles, ſibi inuicem contiguae, Polypodii fere in modum coſtam mediam conueſtiunt. Haec Bobartus. Verum, quantum hactenus obſeruare potui, pinnarum prima coniugatio non ſemper deorſum ſpectat, in iunioribus praeſertim foliis; nec ſecundae coniugationis pinnae infimis ſemper longiores ſunt, ſaepiſſime aequalem fere obtinent longitudinem. Praeterea integra foliorum facies pilis tenerrimis et ſubtiliſſimis, in ambitu imprimis obſita eſt. Capſulae ſeminales admodum paruae ſunt, ſphaericae, inſtar margaritarum in initio ſplendentes, annulo ſemipellucido et quaſi geniculato praeditae. De reliquis ſynonymis mihi valde dubiis, videatur Bobartus loco ſupra citato. Vid. Tab. XXI. Tab. XXI.

Non ſolum pulchra haec planta in Angliae ſeptentrionalibus prouinciis creſcit, ſed copioſe quoque prouenit in Alnetis Betuletisue Inſulae S. Baſilii, vulgo Baſili Oſtrow, ad arborum radices.

3^am. voco FILICEM pumilam Americanam, incanam et lanuginoſam. Tab. XXII. Fig. 1.

Tab. XXII. Fig. 1.

Ad hanc quam proxime accedere videtur: Filix criſpa lanugine hepatici coloris veſtita, ex Inſulis Fortunatis Pluk. Alm. 150. Tab. 281. F. 4. Verum cum figura loci citati valde imperfecta et manca ſit, et quod lanugo, qua folia veſtita ſunt, hepatici coloris eſſe dicatur, ſecus ac in noſtra, quae potius incana eſt, non audeo aſſerere, num eadem, aut diuerſa ſit ſpecies.

Ex radice craſſiuſcula, repente, ſquamulis furfuraceis, fuſcis, penitus obtecta, et multas fibras longas, nigras, tenaces emittente, ſurgunt plurimi pediculi, teretes, nigro-fuſci, ſplendentes, tres aut quatuor circiter vncias longi, quibus ad pollicarem aut ſesquipollicarem a radice diſtantiam adnaſcuntur alae paruae, vix dimidiam vnciam longae, in baſi vbi latiſſimae, duas tresue lineas latae, exinde paulatim anguſtiores factae, in apicem obtuſum deſinentes, in pinnulas oblongas, minime dentatas, obtuſas, diuiſae, numero decem vel vndecim in vnoquoque latere. Pinnularum par primum, quod baſin alae conſtituit, non raro quoque ſecundum, ad medium vsque neruum diſſectum eſt. Reliqua alae pars ad inſtar Polypodii in lacinias tantum ad neruum medium non pertingentes diuiditur. Sunt autem hae alae modo alternae, modo coniugatae. Inferiores ad duarum aut trium linearum interualla diſpoſitae ſunt, ſuperioribus minus a ſe inuicem remotis. Omnium vero tam exterior, quam interior, nec non et ipſius pediculi verſus extremitatem ſuperficies griſea et ſubinde ad ruffum paululum vergente lanugine obducta eſt, interior tamen ſeu facies minus quam exterior ſeu dorſum. Sponte

cres-

creſcit circa Buenos Ayres in America. Vid. Tab. XXII. Fig. 1. Tab. XXII. Fig. 1.

Ad Filicis ſtricte ſic dictae genus refero omnes plantas capillares, quae folia obtinent non ramoſa, ſed in alas tantum diuiſa, ad neruum medium vsque in pinnulas diſſectas.

4ta. mihi audit: THELYPTERIS minor, pinnulis dentatis. Filix ramoſa minor pinnulis dentatis C. B. P. 358. Filix minor ramoſa I. B. 3. pag. 741. Filix minor paluſtris Ray. Hiſt. Pl. pag. 146.

Cum elegantis huius ſpeciei nondum laudabilis icon in Botanicorum operibus proſtet, accuratiorem exhibemus, eum in finem, vt Botanophili melius iudicare poſſint, quid ſentiendum ſit de aliis Filicibus, diuerſis quidem nominibus praeditis, tamen tanquam ſynonymis ad eandem hancce ſpeciem a pluribus rei herbariae Scriptoribus et Vaillantio inprimis, relatis; ex huius enim Auctoris ſententia in Botan. Pariſ. pag. 53. haec et Filix querna C. B. P. 358. Filix ſaxatilis ramoſa, nigris maculis punctata Ei. ibid. et Filix ramoſa minor, Polypodii facie Pyrenaica Inſt. r. h. 536. vna eademque ſunt planta. Vid. Tab. XXII. F. 2. Tab. XXII. Fig. 2.

Thelypterides autem voco omnes Filices ſic dictas ramoſas.

In inſula St Baſilii et paſſim circa Petropolim cum ſequente copioſe prouenit ad arborum radices.

5ta. eſt THELYPTERIS minor pinnulis argute denticulatis et molliter ſpinoſis. Filix Alpina, Myrrhidis facie, Cambro-Brittannica Pluk. Alm. Phyt. Tab. 89. Fig. 4. et Bobart. Hiſt. Oxon. Tom. III. pag. 584.

 Fi-

Filix montana ramoſa minor, argute denticulata Ray Syn. 49. Filix ſaxatilis omnium minima elegantiſſima H. R. P. Pluk. Alm. Phyt. Tab. 89. F. 3. ex ſententia Vaill. Et huius quoque figuram Pluckenetianis multo perfectio-
Tab. XXIII. rem damus. Vid. Tab. XXIII.

6ta. vocatur FILICVLA Americana villoſa, tenuiſſime diuiſa, pinnulis ſubrotundis.

Elegans haec et rariſſima ſpecies pediculos habet teretes, pedales, ima parte glabros, ſplendentes, coloris badii, a medio vero ad extremitatem vsque ſquamulis ruffeſcentibus obtectos. Ad quatuor aut quinque vnciarum a radice diſtantiam alae ex hisce pediculis oriuntur ſescunciales, aut biunciales, in plurimas alias minores diuiſae, quae mox trifariam vtplurimum in pinnulas ſubrotundas minutiſſimas diſſecantur. In iunioribus foliis integra ſuperficies auerſa omnium pinnularum tenui, fulua, muſcoſaque lanugine obducta eſt. In adultioribus autem haec lanugo paulatim euaneſcit. Sponte prouenit circa Buenos Ayres ſiue Fanum Sanctae Trinitatis, vrbem Hiſpanicae ditionis in America meridionali ad ripam vaſti iſtius flumi-
Tab. XXII. Fig. 3. nis Rio de la Plata dicti ſitam. Vid. Tab. XXII. F. 3.

DE

DE
FRIGORE ET CALORE GLACIEI, NIVIS ET AQUAE

AVCTORE

J. G. Gmelin.

Cl. Weitbrechtus, vt cognoſceret, quantum experimenta thermometrica, a ſe hic Petropoli capta, concordent cum iisdem, alibi terrarum inſtitutis, litteras ad me dedit, in quibus petiit, vt ad ſequentes quaeſtiones ſoluendas obſeruationes in Sibiria inſtituerem. 1°. Qualis terminus ſit mercurii rigida hieme in aqua? An ſit idem, quem ipſe deprehendit, gradus 152. (*) 2°. an ſit conſtans, quamdiu ſuperficies aquae glaciata eſt. 3°. an ſit idem et conſtans, ſi relicto in aqua inſtrumento, illa tota in glaciem vertitur. 4°. an ſit idem in niue, et 5°. quousque calor aquae augeatur in fluminibus et riuis, quos tranſiturus ſim.

Non

(*) Omnia illa thermometra, quae obſeruationibus in Sibiria inſtituendis, ab Academia conceſſa mihi ſunt, mercurium continebant, et ad normam Reaumurianorum, in Comment. Acad. Paris. 1730. p. 452. deſcriptorum, dirigente Cl. de L'Iſlio confecta fuerunt. Igitur ipſis conveniebat cum illis, quae Cl. Weitbrechtus adhibuit.

Non licuit hisce animum intendere, antequam in Kirengenſe munimentum, ad Lenam ſitum, appellerem. Ibidem tota fere hieme, dictum annum et ſequentem intercedente, moratus obſeruationibus peragendis opportunum tempus nactus ſum. Antequam initium earum faciebam, ſingula thermometra, quae mecum habui, literis *a. b.* et *c.* notata die 3. Nouembris 1737. aquae ſuper igne ebullienti immiſſa et per quadrantem horae ibi relicta ſunt, quo factum eſt, vt mercurius in thermometris *a.* et *b.* vno et in thermometro *c.* duobus fere gradibus ſupra *o.* eleuatus fuerit.

Eodem die hora 10. *a. m.* in vaſe e cortice betulae conſuto et aqua fluuiali repleto thermometrum *a.* hac ratione ſuſpenſum fuit, vt totus eius amplior cylindrus vna cum ſesquipollice tubuli in aqua immergeretur, ibidemque relictum eſt, donec aquae ſuperficies rigeret, quo facto mercurius paullo infra 150. ſubſtitit. Cruſta glaciali ad 3^{am} vsque horam *p. m.* notabiliter aucta mercurius immobilis ſtetit. Tum exemptum fuit thermometrum, et interpreti noſtro, Eliae Iachontowio, conceſſum, vt Ircutiae cum eo experimenta caperet.

Die 14. Nouembr. thermometrum *b.* in vaſe *e* cortice betulae conſuto, cuius diameter erat $6\frac{1}{2}$. poll. altitudo 9. poll. ſuſpenſum fuit. Aqua vaſi infuſa altitudine occupabat $8\frac{7}{10}$. poll. Vix cruſta glaciali aquae ſuperficiei inducta mercurius ſubſtitit ad gradum 151. et perſtitit in eodem gradu in noctem vsque ſequentis diei. Sed die 16. hora 6. *a. m.* mercurius ad 166. gradum depreſſus fuit. Quoniam haec depreſſio coniecturis Cl. Weitbrechti minime fauebat, coepi dubitare, an non thermometrum

metrum, quod glacie totum incruſtatum erat, ruptum eſſet. Suspendi igitur illud vna cum vaſe, in quo glacie incruſtatum haerebat, in conclauis quodam loco, in quo aliud thermometrum, glacie liberum, gradus 122. monſtrabat. Breui factum eſt, vt mercurius ad 151. gradum eleuaretur; isque gradus conſtanter locum ſeruabat, quousque inferior thermometri amplior cylindrus glacie tectus manebat. Prout vero glacie denudari coepit, eadem fere ratione mercurius ascendit, donec cum altero thermometro, libere ibidem ſuspenſo, gradu congrueret, ex quo haud difficulter coniiciebam, thermometrum labe omnino carere, nec a frigoris vi ruptum fuiſſe.

Die igitur 17. Nouembr. obſeruationes denuo capturus, idem vas aqua repleui, idemque ei thermometrum immiſi ad talem profunditatem, quae cum gradu thermometri 271. congruebat, adeoque duos circiter pollices ſupra ampliorem eius thermometri cylindrum. Vix riguit aquae ſuperficies, et mercurius ad 151. gradum ſubſtitit, quem ſeruauit ad mediam vsque noctem. Die ſequenti monticulus glaciei, a frequenti pertuſione glaciei circa thermometrum facta generatus, ad eum ſcalae gradum eleuatus erat, qui 240. reſpondet. Quas vero mercurius in thermometro incluſus durante hac in glacie immerſione mutationes ſubierit, e ſequenti conſignatione patebit, cui ad melius de re iſta iudicium ferendum addidi, quid in aëre libero paſſus ſit.

Q q 1737.

1737.

Menſis et dies	Tempus obſeru.	In aëre	in glacie
Nouembr.			
18	6. a. m.	185	155
	2. p. m.	175	157
	12. noct.	173	161
19	6. a. m.	175	165
	10. a. m.	183	174
	3. p. m.	181	176
	Glacies in vaſe magnam rimam egit, et thermometrum paullo oblique preſſit.		
	12. noct.	188	180
20	6. a. m.	195	185
	2. p. m.	183	184
	12. noct.	188	182
21	6. a. m.	200	197
	9. a. m.	190	183
	2. p. m.	186	184
	12. noct.	185	183
22	6. a. m.	183	182
	1. p. m.	177	178
	12. noct.	172½	174
23	6. a. m.	170	172
	2. p. m.	168	168
	12. noct.	167½	167
24	6. a. m.	167	168
	2. p. m.	167	168
	12. noct.	185	173
25	6. a. m.	197	183
	3. p. m.	200½	195
	11. p. m.	218	200
26	5. a. m.	218	205½
	10. a. m.	218	209
	3. p. m.	218	207
	11. p. m.	218	205

1737.

Menſis et dies	Tempus obſeru.	In aëre	in glacie
Nouembr.			
27	6. a. m.	218	204
	12. m.	270	202
	2. p. m.	195	200
	11. p. m.	176	188
28	6. a. m.	170	179
	3. p. m.	167	172
29	1. a. m.	165	167½
	8. a. m.	168	168
	2. p. m.	163	186
	11. p. m.	166	186
30	6. a. m.	168½	188
	2. p. m.	166	188
	12. noct.	172	188
Decembr.			
1	6. a. m.	175	195
	2. p. m.	178	198
	12. noct.	192	205
2	6. a. m.	183	205
	3. p. m.	177	201
	12. noct.	175	198
3	6. a. m.	171	195
	2. p. m.	168	192
	11. p. m.	169	189
4	7. a. m.	169	191
	2. p. m.	167	190
	12. noct.	168	190
5	12. m.	169	190
	11. p. m.	178	196
6	6. a. m.	182	200
	2. p. m.	181	200
	11. p. m.	190	205
7	8. a. m.	182	204
	2. p. m.	179	202
	12. noct.	185	203

1737

Menſis et dies	Hora	In aë-re	In gla-cie
Decembr.			
8	8. a. m.	181	202
	2. p. m.	180	201
	11. p. m.	181	200½
9	6. a. m.	185	203
	2. p. m.	184	203
	12. noct.	196½	210
10	8. a. m.	203	216
	2. p. m.	199	218
	11. p. m.	203	219
11	8. a. m.	210	223
	3. p. m.	252	221
	12. noct.	197	214
12	7. a. m.	189	205
	3. p. m.	179	205
	12. noct.	178½	193
13	7. a. m.	169	192
	2. p. m.	168	191
	12. noct.	175	194
14	7. a. m.	177	196
	3. p. m.	176	197
	12. noct.	175	197
15	8. a. m.	172	195
	3. p. m.	168	193
	12. noct.	166	190
16	8. a. m.	163	188
	3. p. m.	161	185
	11. p. m.	165	184
17	8. a. m.	164½	186
	2. p. m.	161	185
	12. noct.	163	184
18	8. a. m.	161	183
	2. p. m.	159	183
	12. noct.	163	182½
19	7. a. m.	155	182

1737

Menſis et dies	Hora	In aë-re	In gla-cie
Decembr.			
19	4. p. m.	155	181
	12. noct.	162	185
20	8. a. m.	167	187
	4. p. m.	169	192
21	4. a. m.	174	195½
	12. m.	177	199
	11. p. m.	186½	201
22	8. a. m.	176	202½
	4. p. m.	172½	199
	12. noct.	172	198
23	8. a. m.	170	196
	4. p. m.	164	194½
24	3. a. m.	167	193
	12. m.	169	193
	11. p. m.	163	193
25	8. a. m.	167	193
	4. p. m.	165	192
	12. noct.	163	189
26	6. a. m.	165	190
	4. p. m.	189	208
	12. noct.	192	209
27	8. a. m.	196	214
	4. p. m.	196	215
	12. noct.	206	227
28	8. a. m.	206	230
	4. p. m.	200	226
	12. noct.	202	226
29	8. a. m.	213	227
	4. p. m.	263	226
	6. p. m.	217	226
	12. noct.	201	226
30	6. a. m.	206	228
	5. p. m.	206	228
	12. noct.	206	233

1737

Menſis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Decembr.			Qu ia ☿ infra
31	8. a. m.	206	monti-
	6. p. m.	198	culum
	12.noct.	196	glacia-
1738			lem
Ianuar.			ſubſti-
1	8. a. m.	197	tit, ob-
	5. p. m.	196	ſeruari
	11.p.m.	196	non po-
2	7. a. m.	197	tuit.
	4. p. m.	195½	226
	12.noct.	191	221
3	8. a. m.	187	216
	4. p. m.	184	212
	12.noct.	184	210
4	7. a. m.	182	109
	4. p. m.	180	207
	12.noct.	196	215
5	7. a. m.	216	223
	5. p. m.	212	223
	12.noct.	212	227
6	7 a. m.	212	227
	4. p. m.	195½	223
	12 n ct.	201	223
7	7. a. m.	201	226
	4. p. m.	198	226
	12.noct.	217	229
8	8. a. m.	217	234
	5. p. m.	216	230
	12 noct.	217	232
9	7. a. m.	217	235
	4. p. m.	217	231
	12.noct.	275	229
10	7. a. m.	196	225

1738

Menſis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Ianuar.			
10	4. p. m.	187	218
	12.noct.	195	218
11	8. a. m.	220	226
	4. p. m.	197	223
	12.noct.	226	226
12	7. a. m.	226	230
	4. p. m.	187½	222
	12.noct.	181	213
13	8. a. m.	185½	213½
	4. p. m.	172½	202
	11.p.m.	171	202
14	7. a. m.	170	199
	11 p.m.	176	200
15	7. a. m.	169	200
	3. p. m.	163	195
	12.noct.	164	193
16	7. a. m.	161½	192
	3. p. m.	158½	190
	12.noct.	162	190
17	7. a. m.	163	190
	4. p. m.	163	189
	12.noct.	166	193
18	8. a. m.	164	192
	6. p. m.	165	192
	12.noct.	165½	193
19	7. a. m.	170	196
	4. p. m.	170	196
	12.noct.	168	196
20	7. a. m.	166	195
	12.noct.	186	204
21	7. a. m.	198½	216
	5. p. m.	188	216
	12.noct.	188	214
22	7. a. m.	199	222

1738

1738

Menſis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Ianuar.			
22	6. p. m.	186	214
	12. noct.	192	216
23	8. a. m.	191	217
	5. p. m.	178	210
	11. p. m.	172	206
24	7. a. m.	174	203
	5. p. m.	162	196
	12. noct.	161	193
25	7. a. m.	158½	189½
	12. noct.	154	183
26	7. a. m.	159	185
	4. p. m.	157	184
	12. noct.	162	188½
27	7. a. m.	164	192
	11. p. m.	186	204
28	8. a. m.	190	213
	12. noct.	175	197
29	7. a. m.	179	205
	5. p. m.	164	196½
	12. noct.	184½	204
30	7. a. m.	186½	211
	5. p. m.	164	196½
	11. p. m.	163	194
31	7. a. m.	160	191
	4. p. m.	153	186
	12. noct.	154	183
Februar.			
1	7. a. m.	155	183½
	5. p. m.	149	191
	11. p. m.	149	205
2	7. a. m.	149	205
	5. p. m.	147	204
	12. noct.	1[illegible]0½	205
3	7. a. m.	156	205

1738

Menſis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Februar.			
3	12. noct.	164	212
4	8. a. m.	170	218
	5. p. m.	153	210
	12. noct.	168	214
5	7. a. m.	179	223
	4. p. m.	161	217
	12. noct.	178	223
6	7. a. m.	187	232
	6. p. m.	166	222
	12. noct.	178	225½
7	7. a. m.	168	225
	5. p. m.	161	218
	11. p. m.	165½	219
8	7. a. m.	172	223
	5. p. m.	177	227
	12. noct.	195	235
9	7. a. m.	212	Infra
	monticu	lum	glaci-
	alem.		
	5. p. m.	188	240
			Infra
	11. p. m.	201	monti-
			culum
10	8. a. m.	240	glacia-
			lem.
	5. p. m.	188	239
	22 noct.	188	239
11	7. a. m.	186	237
	5. p. m.	167	223
	11 p. m.	170	221
12	7. a. m.	182	227
	5. p. m.	167	220
13	7. a. m.	170	221
	4. p. m.	163	218

1738

Menſis et dies	Hora	In aëre	In glacie
Februar.			
13	12.noct.	167	218
14	7. a. m.	164	218
	6. p. m.	162	214
	12.noct.	165	215½
15	7. a. m.	169½	220
	6. p. m.	167	217
	11.p.m.	173	221
16	7. a. m.	175	223
	5. p. m.	164½	218
17	7. a. m.	168	222
	5. p. m.	167	218
	12.noct.	186	228
18	7. a. m.	199	240
	5. p. m.	177	231
	12.noct.	191	236
19	7. a. m.	194	239
	5. p. m.	176	229
	12.noct.	191	235
20	7. a. m.	189½	239

1738

Menſis et dies	Hora	In aëre	In glacie.
Februar.			
20	6. p. m.	172	227
	12.noct.	187	232
21	7. a. m.	198	239
	5. p. m.	176	230
	12.noct.	203	infra
22	7. a. m.	220	monticulum
	11.p.m.	203	glacialem.
23	7. a. m.	241	
	5. p. m.	177	
	12.noct.	179	
24	7. a. m.	179	230
	12.noct.	188	232
25	7. a. m.	195	239
	5. p. m.	171	226
	12.noct.	186	230
26	7. a. m.	194	239
	6. p. m.	169	224
27	7. a. m.	191	336

Quoniam inſtans iter ſuadebat, vt thermometrum glacie eximerem, hinc illud vna cum vaſe, quo continebatur, in conclaue translatum fuit, vt glacies, qua incruſtabatur, in aquam reſolueretur. Qua translatione facta mercurius paullatim aſcendit, glacie eadem ratione circa tubulum euaneſcente. Poſtquam vero omnis, quae tubulum circumdederat, glacies diſparuiſſet, vidi tubulum a globo abruptum fuiſſe, quod ſine dubio exinde factum eſt, quia tubulus a glacie liber, calore conclauis incaluit, ſed eodem tempore globus thermometri glacie frigidiſſima occupatus permanſit. Contigit enim hic idem, quod in vaſe alio vitreo calefacto, cui ſumme frigidi quid admouetur.

Vt

Vt concluſiones, quae ex hisce obſeruationibus erui poſſunt, meliori cum fiducia eliciantur, addam obſeruationes Ircutiae ab interprete Elia Iachontow factas, circa quas notandum, gradum frigoris aërei indicatum eſſe a thermometro, quod meteorologico Ircutiae obſeruatori relictum fuit, quodque aquae bullienti immiſſum mercurium exacte ad o ſuſpendit, alterum vero thermometrum, quod me Iachontowio conceſſiſſe ſupra innui, ad illud Ircutenſe demptione mercurii exactum fuiſſe. Vas thermometrum fouens, e betulae cortice confectum, altum erat dimidiam vlnam, eiusque diameter quadrantem vlnae aequabat. Aqua Angarae fluuii ad obſeruationes adhibita.

1737

Menſis et dies	Tempus obſeru.	In aë-re	In gla-cie
Decembr.			
17	1. p. m.	163	150
	veſpera	$162\frac{1}{2}$	150
18	mane	160	150
	1. p. m.	164	150
	veſpera	166	150
19	mane	159	150
	1. p. m.	156	$150\frac{1}{2}$
	veſpera	155	151
20	mane	161	151
	1. p. m.	165	$151\frac{1}{2}$
20	veſpera	166	152
21	mane	174	$157\frac{1}{2}$
	1. p. m.	175	159
	veſpera	174	163
22	mane	181	175
	1. p. m.	181	175
	veſpera	178	176
23	mane	181	177
	1. p. m.	181	178
	veſpera	181	178

Thermometrum glacie incruſtatum in conclaue transportatum eſt, et ibidem relictum fuit, donec omnis glacies in aquam reſolueretur, captaque poſtea alia experimenta, de quibus infra dicendi locus erit. D. 28. idem thermometrum priori vaſi, Angarenſi aqua repleto, immiſſum, ſequentes mutationes paſſum eſt.

1737

Menſis et dies	Tempus obſeru.	In aë-re	In gla-cie
Decembr.			
28	1. p. m.	183	150
	veſpera	171	150
29	mane	176	150
	1. p. m.	173	151
	veſpera	172	155
30	mane	178	161
	1. p. m.	177	170
	veſpera	174	172
31	mane	175	174
	1. p. m.	174	174
	veſpera	173	173

1738

Menſis et dies	Tempus obſeru.	In aë-re	In gla-cie
Ianuar.			
1	mane	176	174
	1. p. m.	176	175
	veſpera	176	175
2	mane	196	188
	1. p. m.	191	191
	veſpera	191	190
3	mane	203	197
	1. p. m.	196	198
	veſpera	195	195

Poſt hanc obſeruationem thermometrum in conclaue rurſus transportatum fuit, vt glacie reſoluta illud libere eximi poſſet, ſed contigit illi, quod meo, vt calore conclauis tubulus thermometricus a globo abrumperetur.

Obſeruationes igitur habentur, quae indicant, frigus glaciei plurimam partem intenſum aut imminutum fuiſſe eodem tempore, quo frigus aëris, aut in eodem gradu manſiſſe, in quo äer conſtitutus erat. Patet porro, glaciale frigus interdum augmenta cepiſſe, dum aëreum mitius euaſit, interdum vero decreuiſſe, dum aëreum intenſum fuit, quin et nonnunquam in eodem ſtatu permanſiſſe, dum aëreum intendebatur, aut mitius reddebatur, denique auctum et imminutum fuiſſe, aëreo interim eodem permanente; Quae conditiones, vti plures poſſibiles non dantur, ita maxime videntur eſſe anomalae, et naturam frigoris maioribus difficultatibus inuoluunt, quam adhuc creditum fuit, tantum abeſt, vt in maiori luce ponant.

Ad maiorem vero euidentiam eorum, quae aſſerui, lubet ſingulas mutationes, quae ſub eodem genere comprehendi poſſint, in ſingulas tabulas referre. Mu-

Mutationes Kirengae factae.

I.

Exempla aucti frigoris glacialis cum aucto ſimul frigore aëreo.

Menſis et dies.	Hora	Menſis et dies	Hora	Menſis et dies.	Hora
Nouemb.		Ianuar.		Februar.	
19	tota die	4	12. noct.	5	7. a. m.
20	6. a. m.	5	7. a. m.		12. noct.
21	6. a. m.	7	12. noct.	6	7. a. m.
24	12. noct.	8	12. noct.		12. noct.
25	tota die	11	8. a. m.	7	11. p. m.
29	8. a. m.		12. noct.	8	tota die
30	6. a. m.	13	8. a. m.	9	7. a. m.
Decembr.		14	11. p. m.		11. p. m.
1	tota die	17	12. noct.	12	7. a. m.
5	11. p. m.	18	12. noct.	13	7. a. m.
6	6. a. m.	19	7. a. m.	14	12. noct.
	11. p. m.	20	12. noct.	15	7. a. m.
7	12. noct.	21	7. a. m.		11. p. m.
9	6. a. m.	22	7. a. m.	16	7. a. m.
	12. noct.		12. noct.	17	7. a. m.
10	8. a. m.	26	7. a. m.		12. noct.
	11. p. m.		12. noct.	18	7. a. m.
11	8. a. m.	27	tota die		12. noct.
13	12. noct.	28	8. a. m.	19	7. a. m.
14	7. a. m.	29	7. a. m.		12. noct.
19	12. noct.		12. noct.	20	12. noct.
20	tota die.	30	7. a. m.	21	7. a. m.
21	tota die.	Februar.			12. noct.
26	tota die.	1	7. a. m.	24	12. noct.
27	8. a. m.	2	12. noct.	25	7. a. m.
	12. noct.	3	12. noct.		12. noct.
29	8. a. m.	4	8. a. m.	26	7. a. m.
30	6. a. m.		12. noct.	27	7. a. m.

Mutationes Kirengae factae.

II.

Exempla imminuti frigoris glacialis cum imminuto ſimul aëreo.					
Menſis et dies.	Hora	Menſis et dies.	Hora	Menſis et dies.	Hora
Nouembr.		Decembr.		Ianuar.	
20	2. p. m	22	tota die	26	4. p. m.
21	9. a. m.	23	tota die	28	12. noct.
	12. noct.	25	4. p. m.	29	5. p. m.
22	tota die		12. noct.	30	5. p. m.
23	tota die	28	4. p. m.		11. p. m.
27	2. p. m.	Ianuar.		31	7. a. m.
	11. p. m.	2	tota die		4. p. m.
28	tota die	3	8. a. m.	Februar.	
29	1. a. m.		4. p. m.	2	5. p. m.
Decembr.		4	7. a. m.	4	5. p. m.
2	3. p. m.		4. p. m.	5	4. p. m.
	12. noct.	6	4. p. m.	6	6. p. m.
3	6. a. m.	8	5. p. m.	7	7. a m.
	2. p. m.	10	7. a. m.		5. p m.
4	2. p. m.		4. p. m.	9	5. p. m.
7	8. a. m.	11	4. p. m.	10	5. p m.
	2. p. m.	12	4. p. m.	11	7. a. m.
8	8. a. m.		12. noct.		5. p. m.
	2. p. m.	13	4. p. m.	12	5. p. m.
11	12. noct.	14	7. a. m.	13	4. p. m.
12	7. a. m.	15	3. p. m.	14	6. p. m.
	12. noct.	16	7. a. m.	15	6. p. m.
13	7. a. m.		3. p. m.	16	5. p. m.
	2. p. m.	18	8. a. m.	17	5. p. m.
15	tota die	20	7. a. m.	18	5. p. m.
16	8. a. m.	23	5. p. m.	19	5. p. m.
	3. p. m.		11. p. m.	20	6. p. m.
17	2. p. m.	24	5. p. m.	21	5. p. m.
18	8. a. m.		12. noct.	25	5. p. m.
19	7. a. m.	25	tota die	26	6. p. m.

Muta-

Mutationes Kirengae factae.

III. Exempla aucti frigoris glacialis aëreo imminuto.

Menſis et dies.	Hora
Nouembr.	
18	2. p. m.
	12. noct.
19	3. p. m.
21	2. p. m.
24	6. a. m.
	2. p. m.
29	2. p. m.
Decembr.	
10	2. p. m.
14	3. p. m.
17	8. p. m.
Ianuar.	
23	8. a. m.
Februar.	
1	5. p. m.
20	7. a. m.

IV. Exempla imminuti frigoris glacialis, aucto ſimul aëreo.

Menſis et dies.	Hora
Nouembr.	
26	12. noct.
27	12. m.
Decembr.	
3	11. p. m.
8	11. p. m.
11	3. p. m.
16	11. p. m.
17	12. noct.
18	12. noct.
24	3. a. m.
29	4. p. m.
Ianuar.	
9	12. noct.
15	12. noct.
24	7. a. m.
31	12. noct.
Februar.	
11	11. p. m.

V. Exempla permanentis frigoris glacialis, aucto aëreo.

Menſis et dies.	Hora
Nouembr.	
29	11. p. m.
30	12. noct.
Decembr.	
4	12. noct.
5	12. m.
24	12. m.
25	8. a. m.
28	12. noct.
Ianuar.	
6	12. noct.
10	12. noct.
16	12. noct.
17	7. a. m.
18	6. p. m.
Februar.	
3	7. a. m.
13	12. noct.

Mutationes Kirengae factae.

VI. Exempla permanentis frigoris glacialis, imminuto aëreo.		VII. Exempla aucti frigoris glacialis, permanente aëreo.		VIII. Exempla imminuti frigoris glacialis, permanente aëreo.		IX. Exempla permanentis frigoris glacialis, aëreo etiam permanente, licet gradu diuerſum fuerit.	
Menſis et dies.	Hora	Menſis et dies	Hora	Menſis et dies.	Hora	Menſis et dies.	Hora
Nouembr.		Nouembr.		Nouembr		Nouembr.	
30	2. p. m.						
Decembr.		26	5. a. m.	26	3. p. m.	24	
2	6. a. m.		10. a. m.		11. p. m.		
6	2. p. m.			27	6. a. m.	Decembr.	
9	2. p. m.	Decembr.					
12	3. p. m.			Decembr.		30	
14	12. noct.	4	7. a. m.				
18	2. p. m.	27	4. p. m.	19	4. p. m.	Ianuar.	
24	11. p. m.	28	8. a. m.			5	Ki-
29	6. [illegible] m	30	12. noct.	Ianuar.		6	ren-
	12. noct.					19	gae.
Ianuar.		Ianuar.		3	12. noct.	Februar.	
5	5. p. m.						
7	4. p. m.	5	12. noct.	9	4. p. m.	1	
13	11 p. m.	7	7. a. m.			2	
15	7. a. m.	8	8. a. m.	17	4. p. m.	10	
19	12. noct.	9	7. a. m.				
21	5. p. m.	12	7. a. m.	21	12. noct.	Decembr.	Ir-
22	6. p. m.						cu-
Februar.		Februar.				22	tiae
14	7. a. m.	1	11. p. m.			23	

Inter

Inter Ircutenſes obſeruationes, quae Dec. d. 20. 1. p. m. et veſpera 21. tota die 22. porro 23. 30. et 31. vt et Ianuar. 1. 2. et 3. quouis mane factae ſunt, de frigore glaciali cum aëreo eodem tempore aucto teſtantur, Dec. vero 31. veſpera et Ian. 3. veſpera frigus glaciale vna cum aëreo imminutum eſt. Frigus glaciale auctum fuit, aëreo eodem tempore imminuto, Dec. 19. 22 et 29. d. veſpera, 30. 1. p. m. et veſpera 31. p. m. Ian. 2. et 3. hora 1. p. m. Frigus glaciale in eodem ſtatu permanſit, dum aëreum intendebatur d. 20. Dec. auctum vero fuit, dum aëreum idem permanſit Dec. 23. 1. p. m. et Ian. 1. 1. p. m. imminutum etiam, aëreo eodem modo diſpoſito Ian. 2. veſpera.

Inter Kirengenſes obſeruationes, quae exempla imminuti frigoris glacialis, aucto ſimul aëreo, exhibent, eae, quae 27. Nou. 11. et 29. Dec. vt et 9. Ian. factae ſunt, omnino e cenſu bonarum obſeruationum eliminandae ſunt, tam repentina enim immutatio frigoris aërei prae glaciali, nullis adparentibus cauſſis, conceptu perdifficilis eſt, et cum die 9. Ian. teſtantibus meteorologicis obſeruationibus vel ſenſibus diiudicari potuerit, frigus eo tempore augmenta non cepiſſe, dum mercurius in thermometro libere ſuſpenſo tantopere depreſſus fuit, maxime probabile eſt, frigus aëreum, vti glaciale, tunc temporis imminutum potius fuiſſe, id quod et collatione ſequentium obſeruationum thermometricarum, quae in aëre factae ſunt, vlterius confirmatur. Idem fere iudicium ferendum eſt de exemplis imminuti frigoris glacialis, aëreo in eodem ſtatu permanente, quae habentur inter obſeruationes 26. et 27. Nou. factas, vt et de exemplis frigoris glacialis permanentis, imminuto aëreo, ex obſeruationibus 29. Dec. elicitis.

Ex

Ex obſeruationibus igitur, quae reſtant, haec corollaria fluunt.

1. Quando aëris frigus augetur, plerumque etiam glaciei frigus augmenta capit. Hoc vero augmentum illi aëreo raro aequale eſt, rariſſime maius, plerumque vero notabiliter minus.

2. Quando aëris frigus minuitur, glaciei frigus plerumque ſimul minuitur. Raro vero decrescunt in eadem ratione, ſed plerumque aëreum multo plus decreſcit ac glaciale. Certe mercurius ex eo tempore, quo vltra 240. gradum in glacie depreſſus fuit, ab 31. nimirum Decembr. ad 27. vsque Februar. nonniſi ſemel talem altitudinem attigit, quae aëris temperaturae reſpondebat, reliquum temporis perpetuo depreſſior ſtetit. Ex quo elicitur

3. Glaciale frigus, reſpectu aërei intenſum, plerumque tamen magis intendi, quando aëreum acrius fit, licet cum intenſione hac aëreum nondum ad eum gradum accedat, quo gaudebat ante hanc mutationem glacies. Hoc admodum conforme eſt experimentis Fahrenheitianis, quae cum ſpiritu nitri concentratiſſimo inſtituta ſunt; Termini igitur frigoris in glacie nondum cogniti habentur. An non etiam exinde ſequitur, quod exiſtat materia, modo magis, modo minus abundans, quae, dum corporibus ſe inſinuat, frigus producit?

4. Viciſſitudines et mutationes caloris et frigoris perpetuae ſunt, tam in aëre, quam in glacie. In tanto enim obſeruationum Kirengenſium numero tantum contigit 30. Nou. ab hora 6. a. m. ad 5. p. m. inter 5. et 6. Ian. nocte, die 19. Ian. a 7. a. m. ad 4. p. m. inter 1. et 2. Febr. nocte et 10. Febr. ab h. 5. p. m. ad me-

mediam noctem, vt frigoris gradus tam in aëre, quam glacie non mutati deprehenſi fuerint. Ircutiae, vti ex ſupra recenſitis obſeruationibus patet, idem factum eſt d. 22. et 23. Dec. vt et 1. Ian. Sed aër citioribus ſubiectus eſt mutationibus ac glacies. Multo enim plura exempla habentur permanentis frigoris glacialis, tempore, quo aëreum vel imminutum vel auctum fuit, quam aërei frigoris permanentis, dum glaciale mutatum fuit.

5. Datur talis tam aëris quam glaciei ſtatus, qui a cauſſa, quae frigus producit, affici nequit, aliusque, qui nec a cauſſa frigoris efficiente, nec a cauſſa contraria affici valet. Vid. Tab. III. – VIII.

Et haec quidem ſufficere videntur ad 3.am quaeſtionem Cl. Weitbrechti ſoluendam. De niue ob maximam, qua laboraui, thermometrorum penuriam paucae apud me ſunt obſeruationes. D. 23. Nou. anni ſuperioris, hora 2. p. m. thermometrum, libero aëri expoſitum, niue obrui ad gradum vsque 275. Frigus aëris tunc temporis mercurium ad 168. gradum, niuis vero ad 164. gradum depreſſum tenebat, qui gradus per duas horas continuas nihil omnino mutatus fuit. Ircutiae d. 27. Decembr. matutinis horis, cum frigus aëris mercurium ad 182. gradum deprimeret, nix illum ad 174. tantum gradum depreſſit. D. 13. porro Ian. mercurius in aëre ad 179. gradum ſuſpenſus fuit, in niue vero ad 182, et ſequenti die in aëre ad 178, in niue ad 180. E quibus hoc ſaltem elicitur, quod niuale frigus admodum variet, et infra gradum 152. deſcendat.

In aqua, cuius ſuperficies glacie tecta eſt, fluat illa, an quieta ſit, gradum caloris conſtantiſſimum obſeruaui,

qui

qui nec vnquam mutatur, quamdiu aqua fluxum ſeruat, licet frigus aëris et glaciei ſumme intendatur. Kirengae d. 3. Nou. ab hora 3. p. m. ad 4. p. m. eiusdem menſis 12. ab 11. a. m. ad. 1. p. m. Dec. 6. a 9. a. m. ad 11. a. m. et 28. a meridie ad 3. p. m. Ian. 5. a meridie ad 4. vſque horam p. m. 27. a 10. hora a. m. ad 2. p. m. Febr. 9. a meridie ad 3. vſque p. m. thermometrum b in Lena fluuio ſuſpenſum fuit, in quo mercurius conſtanter ad 151. gradum adeoque ſecundum correctionem, qua opus eſſe immerſiones in feruidam factae teſtantur, 152. ſtetit. Lena fluuius eo in loco, vbi obſeruationes factae ſunt, omni hoc tempore glacie riguit et ſeſquiulnam profundus fuit. Curſus aquarum ibidem lentus. Fundus et ripae fluuii arenoſae, ſilicibus immixtis. Locus porro talis ſelectus erat, vbi glacies ad ſuperficiem vſque aquae fluentis exſciſſa erat, vt illi thermometrum commode immergi poſſet. Ad faciliorem huius rei effectum bacillus ad oras hiatus glacialis implantatus fuit, qui ope claui ferrei thermometrum in aqua fluuii ſupra globulum ſeſquipollicem adhuc immerſum tenuit. Inſtitui etiam eadem experimenta diuerſis temporibus in aquis Kirengae fluuii, non procul ab oſtio, paullo ſupra monaſterium, vbi maxima aquarum rapiditas eſt, in loco fluuii, quatuor vlnas profundo, et fundo ripisque lapidoſis gaudente, verum eodem omnino euentu. Nec cruſtam glacialem, aquae ſuperinductam, craſſa illa ſit, an tenuis, momentum adferre cognoui. Vidi enim eadem phaenomena, cum cruſta eſſet duorum pedum, ac eo tempore, cum dimidium pedem tantum aequaret. Hisceque omnibus ſatis conuenit cum experimentis, a laudato

Iachon-

Iachontowio factis, quorum vi tam aqua ſtagnans, cuius ſuperficies glacialis erat, quam aquae fluentes mercurium ad 150. gradum perpetuo ſuſpenderunt. Et quod animaduerſione dignum eſt, aquae Angarae id praeſtiterunt tam eo tempore, quo cruſta glacialis iis nondum inducta erat, nimirum d. 27. Dec. et 5. Ian. quam poſtea, cum tota ſuperficies glacie rigeret, ſcilicet 11. Ian. Hae obſeruationes in loco fluuii factae ſunt, vnam vlnam profundo, et a ripa duas vlnas diſtante. Fundus erat lapidoſus. Quod mercurius perpetuo ad 150. gradum ſtetiſſe dicitur, pro nulla differentia habendum eſſe exiſtimo, quia obſeruationes factae ſunt cum thermometro, Ircutiae obſeruationum meteorologicarum cauſſa relicto, quod in ſcala non quosuis, ſed ſingulos quinque tantum gradus expresſos ſignat, vt adeo vnus duoue gradus diſtincte diſcerni non poſſint. Forte etiam paullo plus mercurii continebat, forte et incommodus ſitus, quo obſeruator, pronus ſuper glacie procumbens, ſe inflectere cogitur, in culpa eſt.

Quousque calor aquae aeſtate in fluminibus et riuis augeatur, exiſtimo plurium annorum et integrarum aeſtatum obſeruationibus opus eſſe, ſi quid explorati dicendum ſit, cui opportunitati vitae meae ratio haud fauet. Dignas inprimis indagatione cenſerem Angarae fluuii aquas, quae, ſi fides adhibenda eſt incolis, vel feruidiſſima aeſtate hominem eas ſubeuntem frigore concutere valent. Sed propter varia impedimenta praeter ſequentes nullas cum iis hanc in rem obſeruationes inſtitui. Thermometrum in ipſo fluuio ſuſpenſum fuit.

1738.

Menſis et dies.	Hora	In aëre.	In aquis Angarae fl.
Iulius.			
25	12. m.	130	138
26	11. a. m.	130	140
27	7. a. m.	134	139
28	7. a. m.	134	139
	4. p. m.	121	135
29	8. a. m.	132	136
	4. q. m.	116	134
30	7. a. m.	127	136
	3. p. m.	120	135
31	8. a. m.	130	137

Hic finis eſt diſſertationis, cIↄIↄccxxxviii. ad Academiam transmiſſae. Cum vero Cl. Müllerus, fidiſſimus itineris et laborum Sibiricorum ſocius cIↄIↄccxlii. Werchoturiae in Tura fluuio, cuius aquae cruſta glaciali non coopertae erant, me rogante, obſeruationes thermometricas caperet, e re viſum eſt, eius obſeruationes, tempore quidem poſteriores, propter materiae ſimilitudinem huiusque tractationis vſum addere.

Menſis et dies.	Hora	In aëre	In Tura fl.
Septembr.			
15	3. p. m.	120	131
16	6. a. m.	144	141
	3. p. m.	122	131
17	6. a. m.	135	137
	3. p. m.	122	131
18	6. a. m.	136	135½
	3. p. m.	134	135½
19	6. a. m.	144	140
	3. p. m.	139	136

Menſis et dies.	Hora	In aëre	In Tura fl.
Sept.			
20	6. a. m.	147	139
	3. p. m.	136	135
21	6. a. m.	144	141
	3. p. m.	131	137
22	6. a. m.	140	139
	3. p. m.	137	137
23	6. a. m.	150	145
	3. p. m.	141	139
24	6. a. m.	155	145

Menſis

Menſis et Dies.	Hora	In aë-re	In Tu-ra fl.
Septembr.			
24	3. p. m.	145½	142
25	6. a. m.	140½	142
	3. p. m.	133	139
26	6. a. m.	144½	143
	3. p. m.	130	139
27	6. a. m.	149	144
	3. p. m.	134½	140
28	6. a. m.	147	144
	3. p. m.	137½	141
29	6. a. m.	136	141½
	3. p. m.	138	140½
30	6. a. m.	143	144
	3. p. m.	137½	140
Octobr.			
1	7. a. m.	149½	145
	3. p. m	144	141½
2	7. a. m.	153	149
	3. p. m.	145	144
3	7. a. m.	143	146
	3. p. m.	135	142
4	7. a. m.	147	146
	3. p. m.	138	144
5	7. a. m.	149	146½

Menſis et dies	Hora	In aë-re	In Tu-ra fl.
Octobr.			
5	3. p. m.	134	142½
6	7. a. m.	139	145
	3. p. m.	134	142½
7	7. a. m.	137	144
	3. p. m.	135	142½
8	7. a. m.	139	144
	3. p. m.	128½	141
9	7. p. m.	141½	145½
	3. p. m.	132	141½
10	7. a. m.	138	142½
	3. p. m.	133	140½
11	7. a. m.	140½	144
	3. p. m.	135	141
12	7. a. m.	140	143
	3. p. m.	136	142
13	7. a. m.	136	141½
	3. p. m.	134	139
14	7. a. m.	139½	142½
	3. p. m.	139½	141
15	7. a. m.	146	144
	3. p. m.	133½	142½
16	7. a. m.	148	145
	3. p. m.	146½	144
17	7. a. m.	155	149
	3. p. m.	150	146
18	7. a. m.	152	148
	3. p. m.	148	148

Fluuii ſuperficies inter vltimo recenſitam et penultimam obſeruationem glacie riguit, et licet eaedem obſeruationes in tertium vsque Nouembris fluuio rigente ſedulo continuatae fuerint, eas tamen hic ſilentio premere conſultius viſum eſt, cum ex iis nihil aliud concludi poſſit, quam quod ſuperius ſtabiliuimus, calorem aquarum ſuperficie rigente conſtanter eundem eſſe. Nullus enim alius gradus obſeruatus eſt, quam 148. 149. 150. quae diuerſitas, vti iam monuimus, magis aut minus profundae thermometri in aquam immerſioni aut ſitui obſeruatoris diuerſo adſcribenda eſt.

Tam ſecundum Ircutenſes quam Werchoturenſes obſeruationes calor aquarum fluentium plerumque intenditur aut remittit, quando calor aëris easdem viciſſitudines patitur, augmentum vero illud et decrementum in aëre notabiliter maius eſt, quam in aquis; Nimirum dimidia fere parte graduum minus in aquis, quam in aëre. Saltem inter Werchoturenſes obſeruationes vix quarta pars maiorem aut minorem differentiam dedit, nec niſi bis, ſcilicet d. 13. Octobris ab hora 7. a. m. ad 3. p. m. vt et ab hora 3. p. m. diei 17. Octob. ad 7. a. m. d. 18. accidit, vt calor aquarum totidem circiter gradibus increuerit, quam aëris. Adeoque aquae fluentes, quod ad gradum caloris attinet, nec tam inſignibus nec tam ſubitaneis mutationibus obnoxiae ſunt.

Angarenſes aquae diebus Iulii, in quibus obſeruationes captae ſunt, aëre erant frigidiores. Verum Werchoturenſes menſibus Septembris et Octobris ſaepe aëre calidiores fuerunt. Id plerumque accidit, quando mercurius thermometri in aëre infra 135 gradum depreſſus fuit.

Veri-

Veriſimile itaque eſt, ſi frigus aëris non maius eſt 135. gradibus, aut ſi minus eſt, aquas fluentes plerumque frigidiores eſſe, calidiores autem, ſi aëreum frigus huncce gradum ſuperat. Cui quidem ſententiae vulgi etiam experientia conſentit, contactum ab aquis fluuiorum aeſtatis tempore frigidiusculum, hieme et autumno reſpectu aërei frigoris tepidiusculum ſentientis.

Equidem inter Werchoturenſes obſeruationes tales etiam habentur, quae demonſtrant, gradum caloris aquarum autumnalibus et hibernis diebus, ſubinde etiam minorem eſſe quam in aëre, ipſos hos gradus ſaepe etiam congruere, in vtrisque porro obſeruationibus exempla habentur caloris aërei interdum in eodem gradu perſiſtentis, dum aquarum calor decreſcebat, permanentis etiam aquarum caloris, dum aëris calor intendebatur, et remittentis caloris aërei, aquarum ſimul remittente, quin et videmus, vti ſupra iam de glaciei et aëris calore animaduerſum eſt, calorem aëris et aquarum, diuerſis licet gradibus conſtituti fuerint, per ſatis longum temporis ſpatium permanſiſſe eundem. Saltem hinc patet, non adeo facile calorem aëris cum calore aquarum communicari. Quod autem reliquas attinet anomalias, ſitus fluuiorum in locis patentibus aut intra montes ſiue ſiluas, varius incidens ventus, ſolis varia actio et permultae aliae minoris momenti circumſtantiae eiusmodi phaenomenis, naturae non reſpondentibus, occaſionem praebere poſſunt, in quae omnia iam inquirere temerarium foret, cum conſtantes naturae effectus nondum cognitos habeamus.

DESCRIPTIO CAMELI BACTRIANI

BINIS IN DORSO TVBERIBVS,

E SCRIPTIS

D. G. MESSERSCHMIDII

COLLECTA

A

I. Ammanno.

Cum iuſſu *PETRI MAGNI* ante viginti circiter annos Daniel Gottlieb Meſſerſchmidt, Gedanenſis Medicus, in Sibiriam rerum naturalium inueſtigandarum cauſa iter faceret, praeter plantarum rariorum plurimas etiam animalium quadrupedum et auium deſcriptiones exarauit, quarum paucae in eius ſcriptis Academiae traditis poſt reditum, extabant, plurimae vero deſiderabantur. Poſt mortem Viri Clariſſimi Academia ſcripta etiam reliqua, nempe Diarium eius partim Germanico, partim Latino idiomate conſcriptum, et volumina plura auium deſcriptiones continentia ſibi comparauit. Haec Illuſtri Praeſidi noſtro, vt attente examinarentur, digna viſa ſunt. Iubente eodem illa perlegi, et quae mihi notatu digna videbantur, excerpſi, diſperſasque non raro pluribus voluminibus obſeruationes collegi et in ordinem adduxi. Harum eas, quae ad rem herbariam ſpectant, Tractatui de ſtirpibus huius Imperii rarioribus inſerui, quae ad animalium hiſtoriam illuſtrandam et augendam idoneae mihi

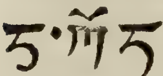
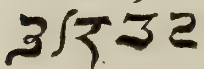
mihi viſae ſunt, Academiae Commentariis paulatim inſerendas, in conuentibus noſtris, ſi ita placet, praelegam. (*) Deſcriptiones omnes non aeque perfectae erunt. Sunt, quae prolixa dictione et minutiſſimarum quoque partium dimenſione nauſeam fortaſſe nonnullis mouebunt. Satius autem eſt, vt opinor, in rerum naturalium hiſtoria nimia accuratione, quam nimis obſcura breuitate errare. Praeſtat etiam deſcriptiones minus perfectas exhibere quam nullas. Incipiam a deſcriptione Cameli Bactriani binis in dorſo tuberibus, cuius Plinius iam mentionem fecit Hiſtoriae ſuae naturalis Libro 8. Cap. 18.

Camelo per Aſiam et Africam non datur notius et ad onera ferenda aptius et vtilius animal. Duae eius ſunt ſpecies, altera, quae vnico in dorſo tubere ſeu gibbo, altera, quae duobus praedita eſt. Prior in Africa et Aſiae prouinciis occidentalibus praeſertim reperitur; poſterior per vniuerſam Tatariam, apud Perſas, Bactrianos, et Mogulos frequens eſt. Cameli vnico in dorſo tubere praediti deſcriptionem ſatis accuratam dederunt Academici Pariſienſes: Cameli vero Bactriani duobus in dorſo tuberibus accurata nondum extat. Quare eo gratiorem hancce ſequentem Meſſerſchmidii deſcriptionem iis fore ſperamus, quos animalium hiſtoria iuuat.

Camelus Bactrianus maſculus, annoſus, cuius deſcriptio hic exhibetur, A. 1724. in Dauria pro Mercatoribus Ruthenis Pekinum, Sinarum Imperii caput, petituris, a Mo-

(*) B. Ammannus in Camelo Bactriano ſubſtitit, impeditus aliis negotiis et morte praematura. Curabit autem Academia, vt vtiliſſimum hoc deſideratiſſimi Collegae inſtitutum continuetur, ne fructibus locupletiſſimis tanti itineris, quale b. Meſſerſchmidius ſuſcepit, publicum fraudetur.

Mogulis emtus, mortuus libras Ruthenicas 1350, ſeu minas medicinales 1156, ℥x, cum ʒij pondere aequabat.

Nomen. A Ruthenis vocatur Велблудъ Bhelblud, a Tataris. Tobolskoenſibus Thauwáh; ab Arabibus Ibil; a Perſis Schetur; a Mogulis Taemaegaeh goerogaeſſu; a Burathis Taemae göroſſu; a Taniutis et Indis extra Gangem  Ngagodt; ab Indis intra Gangem vulgo  Uriuth.

Caput. Caput huius Cameli in multis ad equinum accedit, Labia. in multis ab eodem diuerſiſſimum eſt. Labia ampla ſunt, craſſa, mollia, foris vndique pilis breuibus e ruſo incanis denſe obſita; labium ſuperius in medio ad dimidium fere ſui latitudinem fiſſum, inde vero vsque ad naſi columnam integrum, ſulcoque ſuperficiali vel foſſula cutacea, nuda, nigricante, inſignitum eſt; inferius omnino integrum in medio adductum vel tantillum aſſurgens, quantum occludendae ſuperioris labii crenae, quam idcirco ſubintrat, ſufficere poteſt. Labium ſuperius latum eſt ab imo margine ad fiſſurae finem 1°. pollic. 2′. lin. 5″. Scalae Rhinlandicae, idem ab imo margine ad columnam naſi 2°. 9′. Sulcus labii depilis longus 1°, 6′, 5″, ab imis labiis ad oris ſraenum 6°; oris latitudo per ſraenum ſeu angulos vtrinque maxima eſt 5°, 5′, Rictus oris inter gingiuae ſuperioris edentulae et dentium inciſorum inferioris Buccae. maxillae aciem 6°. Bucca circa molares praecipue villoſiſſima eſt, papillis, fere pollicem transuerſum longis et denſe congeſtis praedita, ſaliuam inter mandendum vberrimam eructantibus.

Ma-

Maxilla ſuperior dentibus inciſoriis caret, anterius edentula eſt et caninis ab vtroque latere ternis et quinque molaribus inſtructa. Maxilla ſup.

Palatum tunica liuente, craſſa, admodum laxa, turgidiſſima, rugis inter caninos vbi anguſtiſſimum eſt, transverſalibus amplis inaequali, inter molares vbi latiſſimum et in fornicem excauatum, ſenſim magis ſtricta, laeui, ſubalbente veſtitum eſt, longum a gingiua anteriore ad rimam 14°, 5′, latum inter caninos dentes 1°, 5′, inter molares primos 2°, inter molares vltimos 3°, 8′, 5″. Palatum.

Lingua carnoſa, pallens eſt, prope radicem turgida et craſſa, papillis maioribus inaequalis, verſus medium gracillima, papillisque minoribus aſperis denſe conſita, inde a ranula vel fraeno ſublinguali in apicem ellipticum deſinendo depreſſior, plana, tantisper latior laeuiorque, longa ab apice ad radicem in oſſiculo hyoidaeo terminatam 18°, ab apice ad ranulam ſeu fraenum 4°, 5′. eadem lata ante ranulam pariterque circa radicem 2°, 6′, 5″, in medio autem 1°, 6′, 5″; eadem alta anterius circa fraenulum 9′, 5″, circa radicem vero 2°, 1′. Lingua.

Maxilla inferior dentibus inciſoriis anterius ſenis, caninis a ſingulo latere tantummodo binis, molaribus denique quinis vtrinque inſtructa eſt. Maxilla inf.

Naſus neutiquam gibboſus eſt, vt perperam in omnibus fere huius animalis iconismis repraeſentatur, ſed dorſo penitus recto, anguſtiore paululum, in apicem deinde triangularem aequilaterum decliuis, orbiculi apice in columnam denique naſi breuiſſimam vix notabilem ſubſidente, totus vndique pilis breuibus ſed denſis fuſceſcentibus veſtitus: nares in columna omnium maxime conuergentes, Naſus.

 retro

retro circa ſui ſinum poſticum ſumme diuergentes, amplae ſunt, parum patulae, alis ſcilicet tantisper ſubſidentibus, longae a columna narium ad earundem ſinum poſtremum 2°, 7′, 5″; eaedem latae ſeu patulae 9′, 5″; earundem conuergentium intercapedo ad columnam minima 4′, diuergentium per ſinus poſtremos maxima 3°; Naſi longitudo a columna et orbiculi apice ad ſepti cartilaginei verticem inter nares 2°. eadem ad oſſium naſalium et frontis commiſſuram ante oculos 10°. 5′; latitudo qualis in Equo eſt.

Oculus. Oculus in orbita ſua paululum extantiore, mediocriter protuberans et quaquauerſum mobilis eſt; palpebris vtrisque mobilibus, inferiore tamen minus, intus albis, foris vndique pilis fuſcis veſtitis, ſolo tarſo parum emarginato, tenui, pilis nudo, nigricante, ciliaribus tamen pilis longiusculis, rigidis, rufis cincto; latus in diametro ad canthos ſumpta 1°, 5′, 5″. Lacuna lachrymalis nulla eſt, deſunt et ſupercilia. Diſtantia ab imis labiis ad oculi canthum internum ſeu maiorem eſt 12°; ab iisdem ad externum ſeu minorem 13°. 5′. Oculorum intercapedo ad canthos internos eſt 8°. 6′. Eadem ad oculi axem oblique antrorſum vergentem 11°. eadem ad canthos externos 10°. 7′.

Auris. Auris externa in pinnam retrorſum exporrecta eſt capiti appreſſam, parum mobilem, cartilagineam, valde patulam et admodum latam, apice minus acuto praeditam craſſam, duram, foris et intus piloſiſſimam; concha amplior paulo ad meatum ducit in infimo eius receſſu anguſtum, tubuloſum, oblique antrorſum vergentem: diſtantia ab imis labiis ad aurium radicem eſt 18°. 6′. ab iisdem

iisdem ad auriculae ſinum 20°. 2′. ab iisdem ad pinnae apicem 23°. 7′. Auris externa a radice ad apicem longa eſt 5°. 1′. ab auriculae ſinu ad apicem 3°. 6′. eadem citra tenſionem lata 3°. tenſa vero 3°. 3′. Aurium intercapedo per ſinum meatui obuerſum eſt 10°. 3′. eadem per libere arrectarum apicem 13°. 5′.

Frons non admodum prolixa eſt, inter oculos tantisper concaua et latiſſima; vertex propemodum rectilineus, vix ac ne vix conuexus eſt, lanugine denſa et longiſſima, ſurſum rigente, fuſca in ima radice tenuiſſima, molli, verſus apicem in pilos fere decuplo craſſiores ſetarum rigidiuscularum ſimiles degenerante veſtitus. Frons.

Capitis altitudo a vertice pone ſuturam coronalem ad maxillae inferioris dorſum eſt 12°. 1′. 5″ eadem per oculum ad maxillae dorſum 10°, 5′. 5″. per medium naſi dorſum 8°. 8′. per oris fraenum et angulum menti 8°. 2′. per narium columnam et dentes inciſores 4°. 5′; longitudo ab imis labiis ad ſuturam lambdoideam occipitis 22°. 5′. ad proceſſum occipitis globoſum ſeu Nucham 20°. 5′. Capitis dimenſiones.

Collum gracile eſt, longum, ſerpentina ſinuoſitate inflexum, rigidae ceruicis, iuba per decurſum ceruicis lanuginoſa, denſa, non tamen penſili, aliaque ſimili per anterius collum procurrente praeditum, longum 36°. latum in diametro minima 7°. in maxima 7°. 3′. idem in perpendiculo minimo neglecta iubarum lanugine altum eſt 10°. in maximo autem verſus axillas 15°. Collum.

Axillae anguſtae ſunt et clauiculis carent; earum intercapedo ad ſcapularum et humeri capita eſt 14°. ab imis labiis ad axillas ſeu ſcapularum et humeri capita 56°. Axillae.

Pedes antici. Pedes antici ab axillis pendentes, ex humero muſculis toroſo et lana vberiore prolixaque deformiter veſtito, cubito cum radio, carpo, metacarpo digitisque triphalangiis geminis, vnguiculatis, ſubſtantia adipoſo-tendinoſa, tertium fere pollicem transuerſum craſſa, turgida ſingulari ſeorſim, ſuffultis, ſoleaque vltra ſecundae phalangis medium vsque, vtrisque communi, inde vero ad tertiae phalangis apicem vsque fiſſa, calloſa, digitum transuerſum craſſa, molli, flexili, ſubalbida munitis, compoſiti ſunt; longi ab humeri capite ad vnguis apicem 54°, ab imis labiis ad pedum anteriorum ſub expanſione directa oris apicem non contingentium extimos vngues 17°; humerus enim directe antrorſum extendi nequit, vnde ingens illud interuallum reſultat, quod addita humeri longitudine 13°. 5′. reſidua, extendi neſcia, ſaltem 4°. foret: iidem pedes retrorſum horizontaliter iuxta corporis longitudinem extendi nullo modo poſſunt, quamuis in fiſſi pedibus digitatis pentadactylis aliisque, quibus clauiculae conceduntur, illud ſecus obſeruetur. Pedum anticorum ſolea propemodum orbicularis eſt, craſſa 4°. 7′. longa lataque in diametro 7°. eius fiſſura inter digitorum apices longa eſt 2°. 5′. 5″.

Pedum anticor. dimenſiones.

Solea.

Thorax. Thorax e ſpina dorſali gibboſa, coſtis et ſterno pariter gibboſo compoſitus vaſtae molis eſt. Gibber interſcapulare tota ſua ſubſtantia ſebaceo-tendinoſum, molle, flexile, inter corporis motum quaquauerſum a latere nutans, ſub ſpecie monticuli in conum faſtigiati conſpicuum ſextae potiſſimum dorſi vertebrae, tum etiam proximarum vtrinque adiacentium proceſſum poſteriorem ſpinam vulgo nuncupatum, obſidet, cuius lateribus oſſium deinde ſcapula-

Gibber interſcap.

pularium teſtudo poſtrema eiusdemque cartilago vtrinque preſſius accumbit.

Gibber pectorale, eiusdem ſubſtantiae ſebaceo-teudinoſae ſaltem denſioris compactiorisque, gibberi interſcapulari fere perpendiculariter oppoſitum, ſuperque ſterni osſiculo potiſſimum ſexto et proxime vtrisque adiacentibus, idcirco inſigniter dilatatis, inſtar culcitrae triangularis complanatae ſubnatum, trianguli ſui apicem quarto ſterni internodio obuertit, baſi interea cartilaginem xiphoidem proxime ſtringente. Diſtantia ab imis labiis ad ſextam thoracis vertebram et gibber interſcapulare eſt 77°. 5′; Gibberis interſcapularis altitudo in perpendiculo ab eius vertice ad dorſi ſpinam reliquam 7°. 9′. ab imis labiis ad ſterni caput 59°. ab iisdem ad gibberis pectoralis medium 74°. 5′. Gibber pectorale in perpendiculo ab apice trianguli ad baſin 7°. 5′. eiusdem altitudo a planitie, inter procumbendum detrita, depili, calloſa, ad oſſium ſterni ſuperficiem 2°. 7′, ab imis labiis ad xiphoidis et ſterni finem 81°. Thoracis altitudo a ſpina ſubſidentiore ad ſternum 3°. 5′. eadem a gibberis interſcapularis vertice ad gibberis ſuperficiem 40°. Animalis perpendiculum a ſpina thoracis ad vngues 69°; idem a gibberis interſcapularis vertice ad vngues 76°. 9′. Thoracis diameter ſeu latitudo per coſtas maxima eſt 24°. Gibber pectoral.

Abdomen ſub lumbis et coxis, inter diaphragma thoracis et anum, paululum thorace magis diſtentum eſt, gibbereque lumbari, quartae potiſſimum lumborum vertebrae et proximarum deinde vtrinque adiacentium ſpinam obſidente, interſcapulari per omnia ſimili, onuſtum. Vmbilicus in abdominis medio ſitus eſt, ſolliculo vmbilicali, Abdomen. Vmbilicus.

 qua-

qualis in Moſchifera et Seren vel Ohn Mogulico deſtitutus. Lumbi latiſſimi ſunt, Coxae in Ilii ſpina tamen latiores.

Lumbi.

Penis. Penis ingens, validus et robuſtus eſt. Scrotum nullum. Teſticuli inter muſculos peni vtrinque accumbendo abſconditi ſunt.

Teſticuli.

Mammae. Mammariae papulae binae tantum ſunt. Diſtantia ab imis labiis ad lumborum et dorſi confinia eſt 90°, 5′, ab iisdem ad gibbereis lumbaris perpendiculum per medios lumbos 100°, 5′, ab iisdem ad vmbilicum 91°, ab iisdem ad penis apicem 105°. Gibberis ſcapularis et lumbaris intercapedo per ſingulorum vertices eſt 24°, ab imis labiis ad lumborum et Oſſis ſacri confinia 110°, 5′, ab iisdem ad mammas 111°. Abdominis altitudo in perpendiculo a ſpina dorſi inter gibbera ad vmbilicum demiſſo eſt 29°, eadem a gibberis lumbaris vertice ante penis apicem demiſſo perpendiculo 36°. Animalis altitudo in perpendiculo a gibberis ſcapularis vertice ad vngues poſticos eſt 79°, 5′. Abdominis latitudo maxima eſt 24°. Mammariarum papularum intercapedo 4°, 6′. Lumborum latitudo maxima 15°. Diſtantia ab imis labiis ad coxarum initium ſeu oſſis Ilii ſpinam 107°, 5′, ab iisdem coxarum acetabulum Iſchii 116°. Coxarum latitudo inter Ilii ſpinam vtrinque 18°, eadem inter Iſchii acetabulum vtrinque 9°, 7′.

Pedes poſtici. Pedes poſtici ab Iſchii coxarum acetabulo pendentes, e femore muſculoſo lanaque extrinſecus prolixa denſe veſtito, patella deinde ante genu, tibia, fibulam non reperi, tarſo heptoſtiode, metatarſo ſimplici, digitisque triphalangiis, vnguiculatis, culcitra ſebaceo-tendinoſa, admodum ſpiſſa

ſpiſſa ſuffultis geminis, ſolea calloſa, digitum manus transverſum craſſa, molli tamen et flexili ſubalbida, vtrisque communi, orbiculari, vltra ſecundae phalangis medium vsque ligatis, inde vero ad extremos vngues vsque fiſſis, compoſiti ſunt; longi a ſemoris capite ad vngues 58°, eorundem ſolea orbicularis, anterius fiſſa, craſſa eſt 4′, 5″, longa lataque in diametro 6°, ſoleae fiſſura inter digitorum apices longa eſt 1°, 8′, 5″. Ab imis labiis ad pedum poſticorum retro extenſorum extremos vngues 170°. Intercapedo inter pedum anticorum antrorſum, poſticorum retrorſum extenſorum extremos vngues in animali nondum diſſecto eſt 153°, eadem in diſſecti ſceleto 171°. Genuum poſticorum diuaricatio maxima eſt, citra ſectionem, 50°, eadem inter genuum patellas in ſceleto 52°, 2′.

Clunes pro vaſtiſſima corporis mole anguſtae valde ſunt; cauda Aſininae ſimilis eſt. Diſtantia ab imis labiis ad anum eſt 123°, ab iisdem ad oſſis ſacri et coccygis in caudam abeuntis confinia 119°, ab iisdem ad extremam caudae vertebram 138°, 5′, ab iisdem ad pilorum in extima cauda finem 145°. **Clunes.** **Cauda.**

Pellis denſa et craſſa eſt, potiſſimum circa genua, in quae procumbere ſueuit animal, inque ſummo dorſo. Pili ſeu lana potius denſa et mediocriter prolixa eſt, a radice vltra ſui mediam longitudinem cinerea, tenera, ſubtilis, inde in apicem vsque durior paulo e fuſco brunnea eſt, recta non criſpata, humano capillo parum diſſimili, vſibusque humanis inſtar ouilis lanae impendi apta; vnde etiam euelli ab Aſiaticis ſolet, tanto magis quod ſua ſponte ſtatis anni tempeſtatibus cadere per alopeciam quandam, naturalem minimeque morboſam, in totis gregibus ſine diſcrimine obſeruata fuerit. **Pellis.** **Pili.**

Do-

Domeſticum caeteroquin animal eſt et manſuetum; circa libidinis tamen aeſtum ſaepe ferociens; vnde nares retro columnam ſpiculo vel clauo ligneo transfigi mature iunioribus ſolent, vt habena vel ſimplici ſaltem loro, clavi huius cuſpidi praeligato, regi facilius queat. Eius lacte veſcuntur Moguli, neque a carne abſtinent, quoties ſenio morbisue confecti pereunt; vegetum enim victus cauſa occidere nefas eſt.

Conſideratis partibus externis, internarum deſcriptio-

Larynx. nem aggrediamur. Larynx ſeu tracheae vel aſperae arteriae caput, tertia propemodum parte minor eſt illa Caprae gutturoſae hydrophobae Seren Burathis, Ohn Mogulis dictae de qua infra agetur, quamuis differentia molis inter vtriusque ferae cadauer eſſet, vt 1 ad 16, tantisper ipſa trachaea craſſior ampliorque, e quinque cartilaginibus et epiglottide conſtans, longa ab epiglottidis apice ſua mole pendulae ad cricoidis finem 6°, ab epiglottidis apice pendulo ad glottidis apicem 3°, 2′, a fiſſura ſeu crena thyroidis vel ſcutalis ad cricoidis vel annularis finem 3°, 7′, lata vero per epiglottidem 1°, 8′, circa arytaenoides latiſſima 2°, 5′, 5″, cricoidis fine in diametro 2°, 1′, 5″, eiusdem altitudo maxima in perpendiculo per arytaenoides demiſſo eſt 2°, 7′. Structura cartilaginum aliorum brutorum ſimilis eſt.

Trachaea. Trachaea ſeu aſpera arteria ex annulis cartilagineis, non omnino integris, octuaginta et quod excurrit, a parte poſtica Oeſophago accumbente et inter ſe mutuo membranarum ope connexis compoſita, in interna ſuperficie membrana longitudini totius trunci coextenſa aequabili, laeuiſſima veſtitur, atque proxime quidem a larynge tantisper

tiſper amplior, ſub reliquum ſui progreſſum aequabiliter teres et recta, longa a primo annulo ad vltimum circa diuaricationem ad pulmones 50°, ſcilicet ſub maxima tenſione, lata in diametro circa laryngem maxima 2°, 1′, in diametro verſus pulmones minima 1°, 7′, 5″, Ante tracheae ingreſſum in thoracem glandula conglobata utrinque vna, circa infimam colli vertebram conſpicitur, ipſis muſculis incumbens, ouo gallinaceo maior, cuius ſimilem in auibus quoque obſeruaui. Tracheae glandulae.

Pulmones maximam thoracis partem occupant, ſuntque bilobi, lobis ſuperne in pinnam praelongam abeuntibus plerumque retroflexam et cordi ſuperiniectam, cum pinnula in dextri lobi margine interno circa tracheae immerſionem, mauuscula, et vtriusque denique lobi margine polyſchido, fiſſuris minus profunde penetrantibus. Eorum lobi interni quamplures, per tracheae ramificationes ſucceſſiue et ſeorſim ſufflati eleganter conſpicui ſunt, ab inuicem diſcernendi faciles, diſſecandi minus. Bronchia, ſeu vltimae ramificationes tracheae, in veſiculas pulmonales denique terminantur, ſanguinis recrementa, verba ſunt Auctoris, ex arteriis, bronchiae ramos ab alterutro latere perpetuo comitantibus accepta, ſub ſpumae lentae, niue candidioris ſpecie, adeo vbertim, etiam poſt mortem animalis, eructabant, vt tota trachaea ad laryngem vsque oppleta ſpumam ori infunderet. Vnde non latebat amplius, qui animalia haec eandem paſtui herbaceo in ore permiſtam ſub indignationis feruore euibrare in obuios ſibi moleſtos, vltra paſſus circiter ſeptem vel octo, obſeruentur: neque in equis non caſtratis generoſioribus, ſub leui curſu vel motione corporis, ore ilico ſpumantibus, di- Pulmones. Bronchia.

uerſam eius ſpumae originem fore, licebat iamiam ſuſpicari. Pulmonum longitudo a tracheae immerſione ad loborum infimum apicem vsque eſt 20°, 5′, ab eadem immerſione ad pinnarum maiorum deſuper exporrectorum extimum apicem 12°, 5. Vtriusque lobi tota longitudo a pinnae maioris apice ſuperno ad lobi ipſius infimum apicem 33°, 5′. Loborum ſingulorum latitudo maxima eſt 12°, 3′.

Cor. Cor ingens eſt, valde acuminatum vel trochiforme, pueri decennis capite maius, biventre, binis inſtructum auriculis, pericardioque obuolutum. * Pericardium intus laeue et humore pauciſſimo refertum erat, foris copioſo adipe perfuſum et inaequale; Superius vaſis communibus cordis, inde vero Mediaſtino ſui duplicatura illud forinſecus veſtiente, adnatum eſt, circa conum tamen, vt in omnibus brutis hactenus cognitis, omnino liberum. Dexter cordis ventriculus breuior quidem, ſed multo amplior ſiniſtro, parietem externum habebat altero tanto tenuiorem ſiniſtro, internum vero a ſepto cordis formatum, gibboſum ſeu conuexum, vtrosque tandem circa medium ope trabis carneae inſignioris, cygnei calami craſſitiem ſuperantis, connexos; Valuulas praeterea ante Cauae orificium tricuspides latiſſimas, ternas, infinitis propemodum lacertulis tendineis, in columnas ventriculi carneas deſinentibus, expanſas. Arteria pulmonalis orificium ab eodem ventriculo procedens, rurſus valuulis Semilunaribus ternis ampliſſimis inſtructum, latum eſt in diametro 1°, 2′, vt proinde facile conſtet, quanta ſanguinis moles ab hocce ventriculo ad pulmones deriuetur, indeque ad ſiniſtrum per pulmonalem venam remeet. Siniſter cordis ventricu-

(Margin: Pericardium. — Valuulae tricusp: — Valuulae ſemilun.)

lus

lus dextro longior atque ad infimum vsque cordis conum pertingens, ſed multo anguſtior, parietem externum habebat duplo craſſiorem externo dextri; internum a Septo formatum concauum, nulla inter utrosque mediante trabe carnea conſpicua. Valuulae ante pulmonalis venae orificium mitrales binae minores cum tertia, in homine non occurrente, vt in tauris., cum ſuis lacertulis et columnis, illarum Venae cauae in dextro ventriculo ſimiles. Arteria aorta ſuis pariter ſemilunaribus valuulis ternis inſtructa eſt, in quibus nodulus fibrillaris tendineus, limbi valuulae medium occupans, et ſemen fere Coriandri aequans conſpicuus erat. Sub iisdem valuulis arteriarum coronariarum orificia gemina, cygneo calamo longe patentiora occurrebant, quemadmodum Venae coronariae orificium in Caua apparuerat. Auriculae tandem geminae, ſingulo ventriculo ſingula, a venarum exteriorum latere, Venae ſcilicet cavae iu dextro et Pulmonariae venae in ſiniſtro ventriculo praefectae, amplae ſatis erant, ſiniſtra tamen dextra notabiliter minori. Septum cordis binis fere digitis manus transuerſis craſſius eſt.

Valuulae mitrales.

Aortae valuulae Semilun.

Auriculae Cordis.

Diaphragma a ſterni cartilagine ad lumbares vertebras oblique deſcendendo thoracem a ſubiecto abdomine diſſepiens, muſculoſo tendinoſum eſt, ambitu ellipticum, plano ſuperiore convexum, iuferiore concauum, muſculis inſtructum geminis. anteriori tenui, lato, poſteriore autem craſſo et ob tranſeuntem Oeſophagum perforato; venoſis denique ramis pariter binis, a Cauae inferioris trunco eius partem tendineo neruoſam dextram tranſeunte abſcedentibus, ſuperius pleura, inferius peritonaeo veſtitum. In eius centro ſingulare erat oſſiculum planum irregularium

Diaphragma.

 laterum

laterum cartilagine vndique tectum, in quod muſculorum tendines vel caudae concurrentes inſerebantur; Cuius ſimile aliquod Ao. 1645. in Angli cuiusdem anatome obſervavit Celeb. Bartholinus Cent. 2. Obs. Anat. 85. Oſſiculi noſtri diameter maxima fere erat 1°, 1′, 5″, minima 7′, craſſities 1′, 8″.

Hepar. Inter abdominis tandem viſcera primarium Hepar immediate ſub diaphragmate hypochondrium dextrum potiſſimum occupabat, firmiterque ope ſuspenſorii tenuisque membranae propriae a peritonaeo oriundae eiusque ſubſtantiam inueſtientis, et Venae demum Cauae inferioris, diaphragmati adnatum erat, in gibboſa parte laeue, et omnino monolobum, a ſima facie concaua laciniolam vel pinnam potius maiusculam unicam exhibendo, tota reliqua ſuperficie rimis et fiſſuris vltra pollicem transuerſum ſubinde penetrantibus quamplurimis, ſi non laciniosum ſaltem ad modum inaequale. Eius ſubſtantia parenchymatica valde ſpongioſa, poroſa, mollis et quaſi diſſoluta, ſeu minus vtique quam in ſanis vulgo ſolet, compacta erat, morboſa, cum abſceſſu purulento, ouum fere gallinaceum aequante, verſus cauae immerſionem; tum hydatibus quibusdam paſſim intercurrentibus, morbi forſan et lentae animalis mortis cauſis. Longitudo eius erat 15°, latitudo

Cyſtis fellea. 10°, 5, craſſities 2°, 4′, 5″. Cyſtis fellea nulla omnino conſpicua fuit.

Pancreas-Lien. Pancreas diffuſum ampliſſimum erat; Lien in ſiniſtro hypochondrio ventriculi prolobo maiori ſtricte adhaerebat, eratque planus, ſemilunaris, vel ſoleae equinae faciem gerens, latus in diametro maxima 12°, 3′, ſpiſſus fere 1°, 2′.

Oeſo-

Oeſophagus a pharynge tantillum ampliore, reliquo ſui progreſſu inter colli thoracisque vertebras et trachaeam medius, ſere aequabiliter teres et rectus, membranaceus, diaphragma, per muſculi poſterioris carnoſi medium caput perforando, ad ventriculi prolobum maiorem tendit, longus à pharynge ad prolobum 76°, 5′. **Oeſophagus.**

Ventriculus ſtupendae molis eſt, reſpectu ad hepatis ſitum, in ſiniſtro hypochondrio locatus, ceteroquin tamen maximam fere abdominis partem ſub diaphragmate occupans, conformationis valde peculiaris. Eius prolobus primus maior Κοιλία Ariſtoteli, tantae vaſtitudinis erat, vt ſolus omne animalis abdomen, expulſis viſceribus et inteſtinis reliquis occupare inflatus queat; Figura eius propemodum oualis eſt, ſubſtantia membranacea et tenuis, faſciis idcirco ligamentoſis eius ſuperficiem fere decuſſatim transuerſantibus munita et circum antra celluloſa ob emittenda eorundem ligamenta reticularia longitudinalia tendinoſa, digito transuerſo manus craſſior, foris ac intus omnino laeuis penitusque rugis carens. Tunica eiusdem tertia ſeu intima prorſus laeuis et albiſſima circa antri celluloſi angulum, ab Oeſophago auerſum remotiſſimum, dehiſcendo, ſui portiunculas geminas omnino deſerit, quarum altera ſub orbicularis areolae albae figura circiter 1°, 1′, 5″, in diametro, altera vix piſo maior, inſularum more in tunicae ſubiacentis mediae, vndique circa easdem per hiatum huncce proſpectantis, interiore lamella ſubrubente, conſpicitur. Antrum deinde celluloſum maius ſeu parallelogrammum, Κεκρυφαλώδης graecis, longum eſt fere 18°, latum 8°, et ſuper prolobi maioris parietem dextrum forinſecus exturgeſcendo altum 2°, 5′, totum con- **Ventriculus.** **Κοιλία.** **Κεκρύφαλος.**

ſtans ex concamerationibus maiuſculis, ſorinſecus Pomi ſere Aurantio diametro haemiſphaerice convexis, intus concauis a ligamentorum longitudinalium et ſeptorum transuerſorum decuſſatione efformatis, et in prolobum Κοιλιδην proſpectantibus, rurſusque per lamellas cutaceas, ſingularum parietibus reticulatim appenſas, in plures cellulas minores dispertitis, iterumque diuiſis, intra quos alimenta ingeſta ſub prono animalis ſitu, ſua mole ex Κοιλιδη illabentia praeparantur vlteriori transfretationi ad prolobum minorem. Antrum celluloſum minus ſeu faſciale, ob faſciae ſimilitudinem, ſola figura et ſitu a maiori diuerſum eſt, longum, 20°, 5′, latum 3°, 3′, altum ſere 2°, 5′, ceteroquin ſtructura ſimile, ſuisque concamerationibus in eundem prolobum maiorem ſeu Κοιλιδην hians, ac proinde Κεκρυφαλωδης alterius minoris vicem gerens. Porro prolobus ſecundus minor, Εχίνος graecis dictus, in prolobi maioris dextro latere ſorinſecus, inter duo antra Κεκρυφαλωδα et Stomachum ηνυςρωδην medius, ellipticae eſt figurae, altero ſui extremo in apiculum breue protuberans, et antro celluloſo maiori accumbens, altero vltra ſtomachum exporrecto, tota ſuperficie externa laeuis et aequabilis, interna in concamerationes celluloſas plurimas, illarum in antris duobus ſimiles, ſed multo minores dispertita, ceteroquin a ſiniſtro ſui latere, qua prolobi maioris dextro adhaeret, circulo ligamentoſo, tendineo, circiter 6°, 5′, in diametro laxe conſtrictus in orificium, ſibi cum Κοιλιδη commune, et breui ab eodem interuallo. aliud praeterea orificium ſimili circulo, ſed vix 1°, 7′, 5″, in diametro, arctius conſtrictum, ſibique cum Stomacho ηνυςρωδη commune aperiens. Eius prolobi

Εχίνος.

longi-

longitudo per axin ellipticum eſt 13°, 5′, latitudo ſeu diameter 6°, 3′, Stomachus tandem ſeu veri nominis Ventriculus Ηνυςρωδης Graecis vocatus mole et figura Elephantino proboſcidi ſimilis, longus erat a collo ſuper prolobum echinoden exſerto, ad pylorum et duodenum 35°, 5′, in diametro minima latus 3°, 6′. Eius collum ſuper prolobo minore exſertum breue et anguſtum, vix ſpatio 6°, 5′, pollicum ab Oeſophago diſtans, in cellulam ſimplicem bullae ſimilem, a latere exturgeſcebat. Ipſe Stomachus mox a collo inflexus, ampliſſimus, ſub medium ſui progreſſum, deorſum tendendo verſus renes, ſtrictior, iterumque proxime ante pylorum reflectendo ampliatus in vtriculum, tandem in pylorum deſinebat. Eius ſubſtantia membranacea tenuis eſt, foris omnino laevis et aequalis, neutiquam celluloſa, duobus tamen ligamentis longitudinalibus ſuper eius dorſo procurrentibus vix pollicum 2°, interuallo a ſe mutuo remotis, inſigniter roborata, intus rugis transuerſalibus a collo ad vtriculum vsque tenuibus, in ipſo autem vtriculu digito manus craſſioribus, inaequalis. Pylorus ſeu Stomachi orificium ſibi cum duodeno commune, circulo vel ligamento nerueo tendinoſo conſtrictum, latum fuit in diametro 1°, 1′, 5″. Prolobi maioris longitudo maxima erat 30°, latitudo vero 24°, 5′.

Ἡ'νυστρον.

Pylorus.

Omentum vaſtum, indeterminatae extenſionis, membranaceum, tenue, adipe in poſteriori pariete craſſa obueſtiente perfuſum eſt, vaſis epiploicis et gaſtro-epiploicis pluribus pertextum.

Omentum.

Inteſtina, facta animalis comparatione cum aliis ruminantibus quamuis longe minoribus, non admodum prolixa erant, vbique aequabiliter fere teretia, nullibi cellu-

Inteſtina.

loſa ;

loſa; tenuia quidem tracheae circiter diametrum aequantia, ligamen o longitudinali craſſiusculo, ceu axi ſuo ſpiraliter Duodenum. circumuoluta, inque his Duodenum mox a pyloro in ampullam quadruplo ſere reliquis tenuibus capaciorem ampliatum, nihil praeterea peculiare exhibebant, longaque erant a pyloro ad Ilii in Caeco finem, iuxta axin menſurata, 585°, 5′, iuxta ſpirae ſuae ambitum certe tantun-Ileon. dem longiora. Inteſtinum Ileon Caeco lateraliter implantatum, huiusque ſuperficiem internam tantiſper tranſcendendo, ſuarum fibrarum conſtrictione valuulam circularem Valuula Coli. conſtitui, Ilii vel Coli valuulam vulgo dictam. Craſſo-Caecum. rum princeps Caecum non celluloſum ſed foris et intus laeue, ſimplex, et neglecta falcis curuatura, quam ſub violenta flatus tenſione aſſumit, propemodum aequabiliter teres, in obtuſum apicem deſinit; longum vero eſt ab Ilei inſertione ad apicem 22°, 5′, latum in maxima dia-Colon. metro 3°, 5′. Colon in prima craſſorum flexura, paucorum digitorum interuallo cis Ilei inſertionem exordiens, Caeco contiguum quidem eſt, ſed notabiliter ſtrictius et propemodum aequabiliter teres, nullibi celluloſum neque ſpiraliter conuolutum, in flexuras potius vltra citraque recurrentes ope meſocoli collectum et colligatum, atque Rectum. nulla finium diſterminatione indicata in Rectum transmigrans, Colo ſolum notabiliter amplius; longum autem eſt ab Ilei inſertione ad anum vsque 525°, Craſſa vero collectim a Caeci apice ad anum longa ſunt 547°, 5′; Omnis inteſtinorum Canalis a pyloro ſcilicet ad anum longus 1133°, et tota denique prima chymi via a pharynge ad anum vsque longa eſt 1251°, 5′.

Renes

Renes proxime ſub coſtis ſpuriis et diaphragmate, dexter ſub hepate, ſiniſter ſub liene intra peritonaei duplicaturam, vtrinque lumbaribus vertebris, ille Cauae inferiori, hic aortae deſcendenti, adcumbentes, fabae figura, mole Struthionis oua propemodum aequantes, longi circiter 6°, 5′, lati 3°, 8′, tunica foris adipoſa a peritonaeo orienda et huic ſubiacente vaginali, vaſorum ſobole, veluti folliculo obducti, rubicundi, glanduloſo-vaſculoſi, vaſculis in carunculas collectis papillares, viginti circiter circum peluis peripheriam diſtributas, vrinam e dictis vaſculis glanduloſae ſubſtantiae excretoriis hauſtam per totidem fiſtulas membranaceas ſeu ſiphunculos vel tubulos vrinarios breues, calamo tamen columbino facile ſuppares, hianti pelui, indeque vreteribus infundentes, iucundo oculis ſpectaculo exhibebant. Vreteres a renibus progreſſi inter peritonaei duplicaturam cum laeui flexuoſitate ad veſicae collum pergendo eidem oblique inſeruntur. **Renes.** **Vreteres.**

Veſica vrinaria in pubis pelui intra peritonaei duplicaturam, Recto firmiter, colli ſui ope, inhaerens, fundi autem, mediante Vracho et arteriis vmbilicalibus in ligamenta exſiccatis, ipſi vmbilico, bubulam mole tantiſper ſuperabat. Vrethra ſubſtantiae intus membranaceae, foris ſpongioſae, poroſaeque, a veſicae collo ad penem properando huius corporum nerueo-ſpongioſorum ſepto membranoſo ſeſe ſubiiciens totique penis longitudini coextenſa, ad eius apicem vsque percurrit, inque via ſenſim ſtrictior reddita, tandem in oſſiculum admodum tenue terminatur, communem vrinae et ſemini, illi quidem a veſica, huic a proſtatis et ſeminalibus veſiculis irruenti, tranſitum praebens. **Veſica Vrinaria.** **Vrethra.**

Teſticuli. In genitalibus ſcrotum omnino nullum apparebat. Teſticuli ſub externa inguinis cute abſconditi erant, gemelli, peni vtrinque adiacentes, vterque ſuis tunicis, extima quidem erythroide, ſeu muſculo potius ſuſpenſorio, Cremaſtere nuncupato, et ab oſſis Ilii ligamento deſcendente, media porro vaginali, burſulae laxioris ſimili, et tertia denique albuginea ipſam teſticuli ſubſtantiam ſtrictiſſime obueſtiente, foris lubrica, muniti, ſinguli ouo gallinaceo ſuppares ſed longiores erant.

Vena Spermatica. Arteria Spermatica. Paraſtatae. Vena ſpermatica ſiniſtra ab eius lateris emulgente, dextra a Cauae trunco, arteria vtraque a trunco aortae ad teſticulos deferebantur. Paraſtatae ſeu Epididymides, teſticulorum dimidiam fere ſuperiorem circumferentiam occupantes, e pluribus teſtium ſeminalibus vaſculis coalitis in ductum efformatae, ab initio anfractuoſum varicoſumque, tunica tamen propria, albugineae ſobole, coercitum, abſolutis tandem ſuis anfractibus recta ſurſum, durioris inſtar nerui reuertendo, ſub nouo tandem Vaſis deferentis vel eiaculantis nomine, per peritonaei proceſſum verſus vrinariae Veſicae poſteriora, eiusque ceruicem deorſum protendebantur, ibidem poſt breuem, ſatis tamen inſignem dilatationem, rurſus coarctatae, ſemen aduectum in veſicularum ſeminalium ceruicem eructaturae.

Veſiculae ſeminales. Veſiculae ſeminales geminae, pone vrinariam veſicam, tantillum tamen a latere adcumbendo, eiusque collo deinde firmiter adnexae, pollices 3°, 8′, et quod excurrit longae, circiter vero 1°, 5′, latae, tota ſubſtantia membranaceo-celluloſa a leui flatu per ſiphunculum intromiſſo admodum exturgeſcentes, in ductulum tandem a ceruice dimiſſum ipſique vrethrae, haud procul a Veſicae vrinariae

riae collo lateraliter paulo inoſculatum, terminabantur, osculis ductulorum eiaculantium vtrinque ſua ſeorſim caruncula valuulari intra vrethram munitis; ab inuicem vero ope ſeptuli breuioris, vrethram perpendiculariter bipertientis, capitisque Galli gallinacei nomine inſigniti, diſcretis, inſtructae.

Proſtatae collo vrinariae veſicae ſibique mutuo accumbentes, gemellae, ſingulae ſeorſim oualis figurae, gallinaceique minoris oui molem fere aequantes, ſubſtantiae glanduloſo-ſpongioſae, rubentis, ductulis ſuis excretoriis in vrethram circa veſicularum ſeminalium oſcula ſeu dictos capitis gallinacei ocellos, vtrinque ſeſe exonerando, humorem ſub leui compreſſione fundebant aquoſiorem paululum ſemine, et ſubalbicantem, vrethre lubricationi, ſeminisque proinde vehiculo aptum hactenus addictumque vnice exiſtimatum. Proſtatae.

Penis denique integumentis ſuis communibus cute ſcilicet et panniculo carnoſo denudatus, non quidem teres comparebat, ſed ingentis inſtar ſtili a craſſiſſima baſi, quae 1°, 6′, lata, ſenſim ſenſimque gracilescendo in apicem tandem cygneo calamo anguſtiorem terminabatur. Apicis extremitas dimidium circiter pollicem longa, primum quidem ad angulum rectum inflexa, deinde ſecunda directione falciformi incuruata ſex pollices fere a collo penis, cui praeputium adnectitur, diſtabat. Glans in capite nulla erat. Vrethrae orificium in extremi apicis angulo interno vel ſinu curuaturae falciformis tam ſtrictum, vt vix aciculam admitteret; vnde etiam ipſa vrinae columna inter mingendum parum Coruini calami craſſitiem ſuperante, eius tenuitatem mictu diuturniore compenſare ſolet. Inter pe- Penis.

 nis

nis internas partes eius integumentum proprium denſum validumque, e tribus tunicis, binis ſcilicet neruoſis et inter has media Ruyſchiana, celluloſa, extra actum penitus ſubſidente, intromiſſo aëre eximie turgida, compoſitum eſt. Remoto integumento corpora comparebant neruoſo-ſpongioſa, gemina, inde ab oſſis pubis infimo margine exorta, digiti manus craſſitiem ſuperantia, ope ſepti a tunica integumenti tertia demiſſi diſcreta, iuxta ſe mutuo autem decurrendo ſenſim graciliora et circa penis collum, ceſſante ſepto in vnum coaleſcente, tandem in extimo penis apice terminata; eorum ſubſtantia admodum ſpongioſa eſt, leuique flatu enormiter intumeſcit, aëre etiam vrethram permeante. Vrethra ſub eorundem ſepto proſerpit, qualis ſuperius deſcripta eſt. Ligamentum penis ſuſpenſorium validum ab oſſis pubis commiſſura deſcendit. Muſculorum bina paria, ſeu penis erectores gemini, ab oſſe Iſchii orti, corporum nerueo-ſpongioſorum membranae exteriori inſerti, totidemque vrethrae dilatatores ab ani ſphinctere orti, funiculorum inſtar teretes, vix calamo anſerino craſſiores, ſibi mutuo iuncti ſub vrethra procedendo, demum ante penis collum eidem inſerebantur.

Muſculi penis.

Caput e cranio et maxillis; Cranium ex oſſibus propriis quaternis et communibus duobus conſtat.

Sceleti deſcriptio.

Primum e cranii propriis Os frontis ab humano figura trigonali diuerſum, ob ſuturam ſagittalem obliteratam ſimplex erat, circa oculorum orbitas valde tenue, foraminibus exterioribus binis pro neruo quinti paris, et proceſſibus pro numero canthorum orbitae oculi quaternis inſtructum longum in perpendiculo a trianguli ſui et fontanellae apice, ad baſin oſſibus naſalibus conterminam 5°, 5′, latum inter

Os frontis.

ter oculorum canthos externos 10°, 5′. Fontanella longa erat in perpendiculo ab apice ſui trianguli ad baſin 1°, 5′, lata in baſi ſua 2°.

Secundum e Cranii propriis Os Syncipitis quadrilaterum, parallelogrammum, parum conuexum, iuxta ſuturae ſagittalis et lamdoideae quoque decurſum, in ſpinam vomeri ſimilem admodum exſurgens, cum fontanellae veſtigiis longum erat a fontanellae baſi ad ſuturam lamdoideam 7°, 8′, 5″, ſub minima intercapedine ad ſuturas ſquamoſas latum 2°, ſub maxima inter easdem 4°, 1′. **Os ſyncipitis.**

Tertium e Cranii propriis Os Occipitis, triangulare fere eſt, anguſtum et inſigniter reſupinatum, ſinubus externis magni foraminis lateralibus, valde profundis, aliisque binis in eminente occipitis parte, tendines muſculorum digito humano craſſiores, capitisque reſupinationi inſeruientes, ſuſtinentibus; et quinque demum foraminibus, proceſſibusque globoſis cartilagine obductis praeditum, altum in perpendiculo a ſuturae lambdoideae vertice ad ſphenoidei coaptationem 5°, 8′, latum inter ſuturae lambdoideae crura maxime diuergentia 5°, 6′, 5″, Oſſicula Wormiana nulla aderant. **Os Occipitis.**

Quartum e Cranii propriis et vltimum Os temporale, figurae quadantenus circularis, tribus ſuis finibus, condyleo, mammillari et meningio, proceſſibusque quaternis, mammillari zygomatico, petroſo et ſtiloide, foraminibus denique tribus communibus quaternis propriis aliisque praeterea innominatis pluribus praeditum erat; eius diameter minima per ſquamas cranii fornicem conſtituentes ſyncipiti iunctas erat 4°, 7′, 7″, eadem inter meatus auditorios 6°, 1′, eadem denique maxima inter externos proceſſus zygomaticos 10°. **Os Tempor.**

Os baſilare. E communibus Cranii binis primum Os baſilare ſeu ſphenoides baſi breuiore paululum ſed craſſa, proceſſibusque quater geminis pterygoide, aliformi, ephippiali anteriore poſterioreque, et foraminibus demum vulgo ſeptenis inſtructum eſt, longum in baſi 2°, 2′, 5″.

Os cribiforme. Alterum e communibus Os cribriforme ſeu Ethmoides cum proceſſibus ſuis, criſta ſcilicet ſepto et ſpongioſis geminis, (aliisque binis, ſuperciliari ſingulari, ſub quo neruus opticus diuaricat, et vulgo ad os baſilare eiusque proceſſum ephippialem anteriorem referri ſolet, quamuis ſit vere ethmoidis) et auriculari gemino, priori a latere vtrinque inter frontis proceſſus innominatos medio, foraminuliſque primi paris neruos olfactorios transmittentibus conſtat.

Maxilla ſuperior. Maxillarum ſuperior immobilis, e quatuor oſſibus dizygis et quinto azygo, quibus ſextum brutis proprium, geminatum, adiiciendum, cum octenis dentium paribus compoſita eſt. Horum primum Os malae dizygon, arcuatum cum proceſſibus ſuis ternis, canthino ſcilicet interno, canthino externo et zygomatico, quos in homine anteriorem, ſuperiorem et poſteriorem vocant anatomici, ipſam malam ſeu genam vix a limine attingebat, longum autem erat 5°, 9′, latum 1°, 7′, 5″. Secundum Os Naſi dizygon eſt, quadrangulum, parallelogrammum, neutiquam gibboſum, vt Ionſtono placuit, ſed rectum, longum 4°, 6′, latum ſub maxima diametro 1°, 6′, ſub minima 6′, 5″, Vtriusque vero intercapedo maxima eſt 3°, 2′, 5″, minima 1°, 3′. Tertium Os maxillare vel palati maius dizygon, figurae irregularis, proceſſibus quaternis frontali, odontico vel dentali, palatino ſeu transuerſo et lacrymali, non denominatis in homine, et foraminibus binis, lachrymalis

Os Malae. Os Naſi. Os maxillare.

malis ſcilicet ductus et nerui quinti, inſtructum eſt; hoc ipſo ab aliorum brutorum maxillaribus diſcrepans, quod proceſſus odonticus longe retro oculi orbitam terminetur, cum in aliis in ipſa orbitae cauitate deſinere ſoleat; longum 10°, 9′, latum 4°, 5′. Quartum os palatinum ſeu palati minus, dizygon, tribus proceſſibus ſuis, transuerſo ſcilicet, columnari, et parietali inſtructum, iunctum eſt ope proceſſus transuerſi ſibi mutuo et cum proceſſu transuerſo oſſis palati maioris, ope vero columnaris cum proceſſu oſſis maxillaris odontico, et proceſſu frontis innominato orbitae oculi cauum efformante, quem columnae inſtar ſuffulcire videtur; ope parietalis denique cum eodem oſſis frontis proceſſu innominato, oſſis ethmoidis baſi et oſſis baſilaris tandem proceſſu pterygoideo; foraminibus praeditum binis, altero maiori pro vaſis ſanguiferis, altero minori pro neruo quinto ad palatum ſecedente; longum inter transuerſalis et parietalis extrema 5°, 1′, 5″, latum in maxima intercapedine per proceſſus transuerſales 2°, 9′, in minima per vtroſque parietales 1°, 5′ Quintum Vómer dictum azygon vel ſine pari, planum, non omnino tenue niſi circa aciem, qua proceſſibus palatinis transuerſis inſiſtit, dorſo oſſibus naſi obuerſo, craſſiore, canaliculato, pro ſepto narium ſuffulciendo, anterius cum ſpina oſſis labialis palatina iunctum eſt, poſterius in binos proceſſus myrtiformes deſinendo, eorumque cum corpore ethmoidis et baſi oſſis ſphenoidei commiſſum, longum a proceſſuum myrtiformium cuſpide ad apicem cum ſpina labiali iunctum 11°, 5′, ab eorundem proceſſuum ſinu 10°, 8′, eius vero latitudo maxima eſt 2°, 2′, 5″, craſſities dorſi canaliculati maxima 5′. Sextum Os labiale biiugum vel

Os palati.

Vomer.

Os labiale.

vel dizygon, brutis proprium, paucis quibusdam exceptis, tribus inſtructum eſt proceſſibus, anteriore ſcilicet, poſteriore externo et interno, ſibi mutuo ope proceſſus anterioris et interni iunctum; ope poſterioris vero externi cum oſſis maxillaris proceſſu odontico anteriori, et denique ope interni cum Vomeris apice ſeu mucrone. Foramen in eo notatur vnicum, proceſſum internum ab externo, anterioremque a proceſſu transuerſo palati maioris disiungens, ſatis magnum, longum 6′, latum 2′, 5″, oſſis labialis longitudo maxima eſt 6°, latitudo maxima 1°, 1′, vtriusque intercapedo exterior maxima eſt 2°, 6′, eadem minima 1°, 6′, ab eiusdem apice proceſſus anterioris ad interni proceſſus mucronem Vomeris mucroni iunctum 3°, 2′.

Os vnguis. Septimum Os vnguis dizygon, figurae triangularis, in ipſo oculi cantho interno ſitum, tranſitumque praebens ductui lachrymali, quantumuis breuem, ſuperiori latere ſuo oſſi frontis, inferiore oſſi malae et maxillari, interno ſeu apice trianguli potius oſſi naſi obuerſo, non tamen id contingente; externo in oculi orbitam et canthum internum cedente, neque tenue admodum, neque fragile, ſed ſatis craſſum eſt, longum 1°, 1′, 5″, latum 1°.

Os planum. Octauum et vltimum Os planum dizygon, partem orbitae oculi concauam potiorem conſtituens, irregularium laterum, oſſi malae, maxillari, vnguis et oſſis ethmoidis proceſſui ſpongioſo in oculi fundo, ſimulque ibidem proceſſui oſſis palati minoris columnari et parietali iunctum eſt ſuturis ſeu coaptationibus non vbique ſatis manifeſtis.

Dentes. Inter dentes XVI. ſuperioris maxillae, inciſores, primores Plinio dicti prorſus nulli conſpiciebantur. Caninorum tria paria, ſeu tres in ſingulo latere, ſpatioſo interuallo ab

ab inuicem remoti erant, quorum primus ſeu anterior alueo in oſſis labialis proceſſu anteriore per gomphyſin infixus, omnium minimus longus fuit qua extra alueum prominet 7′, 7″, latus prope alueum 4′, 7″; Secundus ſeu medius oſſis maxillaris proceſſui odontico infixus, omnium maximus, qua extra alueum propendet longus erat 1°, 5′, 5″, latus prope alueum 9′. Tertius poſtremus primo tantillum maior eſt, longus, qua prominet 8′, 7″, latus 5′, 7″. Molarium quinque ſunt paria, ſeu in quouis latere quini; quorum primus ſeu anterior omnium minimus, corona gaudet propemodum ſimplici, vel ſaltem imperfectius ſerrata, longus autem eſt extra alueum 7′, latus 6′, 3″. Secundus praecedenti maior, cum corona manifeſtius ſerrata, longus erat extra alueum 7′, 4″, latus 9′. Tertius inſigniter maior praecedentibus, corona perfecte ſerrata, longus fuit extra alueum 1°, latus 1°, 2′, 5″. Quartus praecedenti ſimilis, tantillum maior erat, longus 1°, 4′, latus 1°, 7′, Quintus ſeu ultimus omnium maximus, ſerratus binis tantum cuſpidibus praeditus erat, longus extra alueum 1°, 7′, latus 1°, 9′, 2″. Omnes praecipue molares, cruſta tartarea nigra obducti fuerunt.

Maxilla inferior, mobilis, ex oſſe conſtat vnico, ſed dizygo, firmiſſime cum ſuo compari coalito, nedum harmoniae liniola ſuperſtite, proceſſibus tribus donato, corona ſcilicet condylode et hypocondylode, denticulo ſerrae ſimili, foramine praeterea gemino interno et externo ſeu nerui quinti paris admiſſorio et emiſſorio; denisque tandem dentium paribus ſeu totidem in ſingulo crure ſingulis. Inter hos primi ſunt inciſores ſeu primores ſeni, in tria paria diſtributi, quorum par medium longum eſt ex- tra

Maxilla inferior.

Dentes inciſorii.

Canini. tra alueum 1°, 4′, latum 6′, 8″, reliqui parum minores erant. Caninorum, ſecus ac in ſuperiore maxilla, bina tantum paria erant, ſeu totidem in maxillae ſingulo crure ſinguli, per ſpatioſa interualla locati, ſuperiorumque interſtitia ſubintrantes, quorum prior ſeu anterior maximus, qua extra alueum prominet longus eſt 1°, 5′, latus 8′, 5″. Poſterior, minimus, qua alueum ſupereminet longus erat 8′, latus 5′. Molarium quinque ſunt paria ſeu in quouis crure quini, ſuperioribus ſatis ſimiles, ſaltem minus extra alueolos prominentes, quorum vltimus corona ſerrata tricuſpide praeditus, omnium latiſſimus eſt extra alueum longus 8′, 3″, latus 2°, 3′, 5″. Tota molarium ſeries, prope alueos primi et vltimi, longa eſt 7°, 1′, ſeries vero ſuperioris maxillae molarium longa 6°, 5′. Dentes autem in vniuerſum ſunt XXXVI. Maxilla inferior longa eſt ab apice ſeu acie dentium inciſorum ad angulum menti 5°, 3′, ab eodem ad proceſſum hypocondylodem 17°, 5′, alta in perpendiculo a corona demiſſo 9°, 2′, 5″, a condylode 6°, 8′, 5″, ab hypocondylode 5°, 3′, a molaribus poſtremis 3°, 5′, 5″, a molaribus primis 2°, 3′, a caninis poſterioribus 1°, 8′, a caninis anterioribus 1°, 6′. Eiusdem intercapedo per inciſores extimos 2°, 5′, per caninos priores 2°, 6′, per caninos poſteriores omnium minima 1°, 9′, per molares primos 2°, 3′, per molares vltimos 4°, 8′, per coronae apicem 7°, per condylodes maxima 7°, 6′, 5″.

Molares.

Maxillae inferioris dimenſiones.

Os hyoides. Os denique hyoideum ſeu bicorne, oſſium capitis vltimum, e capitulo ſeu baſi, cornubus et cruribus compoſitum, cum ouium hyoide ſatis conuenit, nec niſi internodiorum quorundam coalitione ob ſenium et mole diuerſum

uerſum eſt. Eius capitulum ſeu baſis, fere oſſeum erat, roſtello ſeu tuberculo verticis omnino carens, vertice ſuo anterius linguae corpori, poſtica facie ſinuoſa epiglottidi et laryngis capiti obuerſum, longum in perpendiculo à vertice ad ſinum poſticum demiſſo 8′, latum circa cornuum ſynchondroſin obliteratam 1°, 5″, craſſum 3′, 7″. Eiusdem cornua dizyga humani hyoidis ſatis ſimilia, capitulo ſeu baſi firmiter ſine motu continuo, nullisque internodiis ſiue per naturae leges ſiue per ſenium diſcreta erant, inde a capitulo verſus laryngis latera vbi ſuperioribus thyroidis proceſſibus per ſyneuroſin connectuntur, exporrecta, longa a poſtico capituli ſinu ad apicem 2°, 3′. Eorundem diuaricatio maxima ad apices eſt 2°, 8′. Eius denique crura brutorum generi propria, vel etiam cornua ſuccenturiata dizyga, hyoides cornubus altero tanto, imo duplo maiora, triphalangia, ſeu e tribus internodiis et cum capituli fronte et inter ſe mutuo cartilaginum ope, cum motu leuiori, connexis, conſtant, alteroque extremo verſus os petroſum et occipitium exporrecto, iisdem ligamentorum ope affixa ſunt. Eorum internodium primum oblique antrorſum exporrectum, breuiſſimum eſt, longum circiter pollicem cum dimidio. Secundum retro ſurſum vergens longum eſt 3°, 4′. Tertium omnium maximum, in duos proceſſus ſuperiorem et inferiorem terminatum, longum erat ab altero extremo ad proceſſum ſuperiorem 2°, 7′, ab eodem extremo ad proceſſum inferiorem 4°, 3′, latum vero circa proceſſum ſuperiorem 8′. 5″.

Oſſicula auditus in meatu auditorio interno deliteſcentia, Malleus ſcilicet, Incus, ſtapes et orbiculus cum ſuis ſinubus et proceſſibus, perioſteoque a Ruyſchio primum Auris oſſicula.

 de-

Numerus oſſium capitis. detecto, vt in aliis perexigua erant. Numerus ergo oſſium capitis inter ſe diuerſorum eſt XLII, adiectis vero paribus in vniuerſum LXXVIII.

Thorax. Thorax late dictus e collo, thorace ſtricte ſumto et artubus ſuperioribus, pedibus ſcilicet anterioribus, a thorace pendentibus compoſitus, oſſa ſub vulgato vertebrarum, coſtarum, ſterni internodiorum, clauicula porro carentis ſcapulae, humeri, cubiti radiique, carpi oſſiculorum, metacarpi, digiti articulorum ſeu dactylo-condylorum et ſcutulorum denique tendinalium vel rotularum nomine et ordine, (dizygon comparibus nouem et triginta ſub cenſum non vocatis) ab inuicem diuerſa complectitur LV, illis vero ad computum accerſitis in vniuerſum XCIV.

Collum. Atlas. Collum e vertebris ſeptem conſtat, quarum prima, Atlas dicta, occipitis proceſſibus globoſis ope ſinuum ſibi inſculptorum iuncta, ſex proceſſibus, ſeu tribus dizygis, ſuperiore ſcilicet, inferiore et transuerſo donatur, ſeptimo, ſeu quarto azygo, poſteriore ſcilicet et ſpeciatim ſpina

Epiſtrophus. dicto carens. Secunda ſeu Epiſtophus iisdem proceſſibus tribus dizygis et quarto azygo inſtructa, praeterea quintum azygon ſibi peculiarem habet, quem denticulum vel axin vocant, omnium non ſolum colli, ſed totius etiam ſpinae longiſſima eſt. Tertia cum reliquis, quaternis proceſſibus vſitatis ſuperiore, inferiore et transuerſo dizygis,

Foramina vertebrarum Colli. et poſtico azygo praeditae ſunt. Foramina omnibus colli vertebris duo communia ſunt, alterum ſcilicet in ſingularum baſi pro medullae ſpinalis tranſitu, alterum dizygon per ſingularum proceſſum transuerſum vtrinque pro arteriarum ceruicalium tranſitu ad Occiput, quod quidem ſolis colli vertebris proprium eſt. Singularum dimenſiones ſequentes fuerunt:

1*.

Vertebrarum Colli dimenſiones.

1ª.	alta	3°, 1′, 5″.	lata	5°, 8′, 5″.	longa	4°. — —
2ª	—	4, 8, 5.	—	4, 4 —	—	7°, 4′, 5″,
3ª.	—	5, 1, —	—	5, 6, 5.	—	6, 4, —
4ª.	—	5, 5, —	—	5, 3, —	—	6, 3, 5,
5ª.	—	6, 2, —	—	5, 6, —	—	6, 2, —
6ª.	—	7, 2, 5.	—	5, — —	—	5, 6, —
7ª.	—	6, 8, —	—	6, 1, —	—	4, 7, —

Tota vero vertebrarum compages longa eſt 36. 7′, —

Thorax ſtricte ſumptus e vertebris dorſi duodecim, totidemque coſtarum paribus, et pectoris ſterno e ſeptem oſſiculis coalito, compoſitus eſt, clauiculis vero ſcapulas cum ſterno connectentibus, in quadrupedum non niſi pauciorum quorundam genere obſeruabilibus, omnino caret; ſcapulis autem geminis poſticae ſuperiorum coſtarum parti, inſtar ſcuti incumbentibus donatur. Vertebrae dorſi duodecim, inferioribus colli longitudine et latitudine multo minores, ob ſpinae vero acutioris longitudinem inſigniter altiores vel eleuatiores ſunt proceſſuum numero et foramine magno in baſi pro medullae tranſitu, ſimiles; earum dimenſiones hae erant: Thorax.

Vertebrarum Thoracis dimenſiones.

1ª.	alta	9°, 3′, —	lata	5°, 1′, 5″,	longa	3°, 5′, 5″.
2ª.	—	10, 5, —	—	4, 7, —	—	3, 2, —
3ª.	—	11, 1, —	—	4, 5, —	—	3, — 5″.
4ª.	—	11, 3, 5″,	—	4, 4, —	—	3, — —
5ª.	—	11, 5, —	—	4, 4, —	—	2, 9, —
6ª.	—	10, 7, —	—	4, 4, —	—	2, 8, 5.
7ª.	—	10, — —	—	4, 4, —	—	2, 8, —
8ª.	—	9, 3, 5,	—	4, 4, 5,	—	2, 7, 5.
9ª.	—	8, 6, —	—	4, 4, 5,	—	2, 7, —
10ª.	—	6, 7, —	—	4, 3, —	—	2, 6, 5.
11ª.	—	6, 2, —	—	3, 9, —	—	2, 6, 3.
12ª.	—	5, 7, —	—	3, 5, —	—	2, 6, —

Igitur ſpina ſeu vertebrarum dorſi compages erat 34°, 7′. —

Coſtae. Coſtarum paria duodecim ſeu totidem vtrinque pro vertebrarum numero ſingulares ſunt, quarum ſeptem ſuperiores legitimae ſternum contingebant, quinque inferioribus ſenſim ſenſimque ab eo deficientibus ſpuriis. Prima omnium breuiſſima eſt, longiſſima nona, ambae absque epiphyſibus cartilagineis menſuratae. Contra duodecima omnium anguſtiſſima, latiſſima ſexta erat. Omnes proceſſibus binis, baſilari ſcilicet et transuerſali donatae ſunt, quorum ope ſinui vertebrarum baſilari per ſynchondroſin, earundemque proceſſui transuerſo per ſyneuroſin ſeu ligamenta cum motu inarticulantur, quamuis in vltimis hi proceſſus minus diſtincte conſpiciendi ſint. Omnes praeterea epiphyſibus ſuis cartilagineis, inſtructae ſunt, quarum ope legitimae ſeptem totidem ſterni oſſiculis arctius, quinque ſpuriae autem longo tractu coalescendo inter ſe mutuo connectuntur. Sinus marginalis pro vaſorum intercoſtalium tranſitu in ſingulis vnicus erat. Singularum dimenſiones ſequentes ſunt.

Coſtarum dimenſiones.

1ª.	longa	8°, 2′, –	lata	1°, 5′, –	Cartilago longa	– 4′, –
2ª.	—	9, 5, –	—	1, 5, 5″,	—	– 1°, – –
3ª.	—	11, 7, –	—	2, – –	—	– 1, 6′, –
4ª.	—	15, – –	—	2, 2 5	—	– 2, 4, –
5ª.	—	17, 3, –	—	2, 3, –	—	– 3, – –
6ª.	—	18, 2, –	—	2, 3, 5,	—	– 4, – –
7ª.	—	18, 7, –	—	2, 3, –	—	– 7, 8, –
8ª.	—	19, 4, –	—	2, 1, 5,	—	– 9, 4, –
9ª.	—	19, 5, –	—	2, – –	—	– 9, 3, –
10ª.	—	19, – –	—	1, 9, –	—	– 9, 1, –
11ª.	—	18, 5, –	—	1, 7, 5,	—	– 8, 8, 5,
12ª.	—	16, 3, –	—	1, 3, –	—	– 8, 3, –

Ster-

Sternum in anteriore Thoracis parte pectus conſti- Sternum.
tuens, oſſeum ſed fungoſum ex oſſiculis ſeptem et cartilagine xiphoide ſeu mucronata, quatuor ſuperioribus oſſiculis prorſus a latere compreſſis anguſtis et propemodum teretibus, tribus inde ſequentibus inferioribus depreſſe planis, tantillum concauis, latiſſimis, quamuis ſuperioribus breuiora ſint, compoſitum eſt; ſingula oſſicula cum vtrinque adiacente proximo per ſynchondroſin iuncta ſunt, iuncturis tamen ob ſenium animalis fere vbique in oſſeam ſubſtantiam coalitis. Cartilago exigua erat vix 1°. 8′. longa. Sternum integrum a capite ſupremi oſſiculi ad xiphoidis finem longum eſt 22°, latum vero 4°, 5′.

Scapularum par vnum, ſeu a ſingulo ſpinae latere Scapulae.
vnica, figurae triangularis, latiuſcula, plana vel parum conuexa, tenuiſque, poſticae ſuperiorum coſtarum parti adinſtar ſcuti incumbit; intus caua eſt, exterius in teſtudine ſeu dorſo leuiter conuexa, et ſpinae inſigniter eminentis interuentu, in duo teſtudinis interſcapulia, dorſale ſcilicet et humerale, ſeu inferius et ſuperius, diuiſa in poſteriori limbo ſeu baſi, vertebris inſigniter obuerſo, in epiphyſin cartilagineam amplam terminata. Proceſſus ei ſunt tres quorum primus ſpinae teſtudineae Acromium dictus, breuis, rectus, neutiquam reflexus erat, vt in bidentibus herbiuoris, Marmota, Lepore, Cuniculo. &c. Secundus coracoides ſeu anchoreus, minor praecedenti fuit; tertius demum Ceruix, ſinu ſuperficiali inſtructus erat cui humeri caput inſerebatur. Scapulae autem longitudo a ſumma ceruice ad baſeos epiphyſin cartilagineam eſt 20°, 1′, 5″. Eius autem latitudo minima in ceruice 3°, maxima circa teſtudinis extremam baſin 9°, 7′, alta ve-

vero erat in perpendiculo ab Acromii extremo per ceruicem demiſſo 4°.

Pedes anteriores. Artus ſuperiores ſeu pedes, in brutorum genere anteriores dicti, a ſcapularum ſinu ceruicali pendentes, ex humero, cubito ſeu vlna radioque, et pede extremo, ſeu carpo heptaſtiode, metacarpo ſimplici et digitis triphalangiis binis, conſtant, longi ab humeri capite ad infimum digitorum apicem 54°. Humerus μονοςώδης, dizygos, breuis, ſed craſſiſſimus eſt, inaequaliter teres, ſcaber, intus fiſtuloſus, medulla farctus, ſuperius capite praeditus magno, globoſo, foſſulis ſeu ſinubus anterius binis profundis, pro tendinoſo muſculi forſan bicipitis principio traducendo, exculpto; circa ſcapi medium admodum inaequalis pro recipienda muſculi deltoidis cauda, inferius proceſſibus geminis interno maiori et externo, ſinubus ternis, ſemilunari ſcilicet, externo maiori et interno, inſtructus, longus 15°. 5′, latus in capite ſuperius 4°. 8′. in ſcapo tenuiori 2°. 3′, per proceſſus inferiores denique 4°. 4′.

Os humeri.

Cubitus. Vlna. Cubitus ex Vlna et Radio ſibi mutuo a latere adcumbentibus componitur; Vlna et Radio et Humero longior eſt, ſuperius capite craſſo, binis in capite proceſſibus roſtriformibus, externo ſcilicet ſeu Olecrano et interno innominato, totidemque ſinubus, ſemicirculari ſcilicet et laterali pro recipiendo radii capite praedita, in progreſſu adeo arcte coaleſcit cum radio, vt nec ſcapus eius, nec inferior proceſſus ſtiloides, a quo ligamenta Carpi in aliis procedunt, vllo modo dignoſci a Radii ſcapo queant; longa a capite ſuo ad Radii cum ea coaliti finem 20°, 7′.

Radius. Radius breuior eſt vlna, humero autem inſigniter longior,

gior, ſuperius capite praeditus rotundiuſculo, lato, ſed a vertice depreſſo exſculptoque in ſinum, cui humeri proceſſus externus inſeritur; Scapi cum vlna coaliti teretis plani, pars ima admodum craſſa erat et lata, in proceſſum exiguum internum lateralem protuberans, ſinubusque ternis, inferius leuioribus, exſculpta; radii longitudo eſt 18°, latitudo in capitulo 3°, 8′, in ſcapo 2°, 3′, in imo denique extremo 3°, 7′.

Pedis extremi carpus heptaſtodes, ex oſſibus anonymis ſeptem, in duplici ſtrato, quaternis nempe in ſuperiore et ternis in inferiore collocatis componitur primo tantillum ab interno latere, cum radii proceſſu laterali interno paruuli ſinus ope iuncto, reliquis ſuperioribus ternis, totidem in radii extremitate ſinubus exceptis; tribus autem inferioris ſtrati ſuperioribus connexis, ſingulis mole et figura ab inuicem diuerſis, inter ſe mutuo tamen vinculis valide conſtrictis, externoque ligamento colligatis. Carpi, longitudo eſt 2°, 5′, 5″, latitudo autem 3°, 2′. **Carpus.**

Metacarpus, ouillo proxime ſimilis, ex oſſe conſtans vnico ſimplici, capite lato plano, ſinubus tamen leuioribus ternis, totidem carpi oſſa inferioris ſtrati excipientibus exſculpto; ſcapo tereti plano, recto ne hilum arcuato; infimo extremo lato craſſoque, crenae maioris ope in epiphyſes geminas, trochleae cylindricae non canaliculatae vel ſinuatae ſimiles, diuiſo, quibus totidem digiti cum ſcutulis tendinum oſſeis inarticulantur; longus autem erat 12°, 6′, latus in capitulo 3°, 1′, in ſcapo medio 1°, 6′, 5″, in imo per Epiphyſes 4°, 1′. **Metacarpus.**

Digiti triphalangii bini e tribus articulis, ſcutulo tendinum oſſeo, quod ſeſamoideum in homine vocatur, mu- **Digiti.**

nitis componuntur, ſuntque inter ſe aequales, et plantam huic quadrupedum generi propriam abſoluunt. Primae phalangis articulus omnium maximus eſt, capite ſeu nodo ſuperiore craſſo, pro recipienda metatarſi epiphyſi, leuiter ſinuato; Scapo breui, nodo inferiore minore, vix a metatarſi epiphyſi abludente. Scutulum tendinis oſſeum, oſſiculi ſeſamoidei nomine in homine inſignitum, Caſtaneam mediocrem aequans, articuli capitulo adcumbit, et ſimul cum eo epiphyſi metatarſi inarticulatur. Articulus longus erat 3°, 8′, latus in capitulo 2°, in ſcapi medio 1°, 1′, in nodo inferiore 1°, 7′. Secundae phalangis articulus, priori ſimilis, ſola mole diuerſus eſt, longus 2°, 5′, latus in capite 1°, 4′, in ſcapo 1°, 1′, 5″, in nodo denique inferiore 1°, 3′, 5″. Tertiae phalangis articulus vltimus, omnium minimus erat, fere pyramidalis, trilaterus, in baſi leui ſinu exsculptus pro inarticulatione praecedentis, binis in lateribus antrorſum in apicem digiti conuergentibus, vngue corneo munitis, tertio plantae inſeruiente praeditus, et ſcutulo tendinum oſſeo paruulo inſtructus, longus 1°, 2′, latus in baſi 9′, 5″. Vnguis corneus fuſcus parum politus eſt et ſcaber, conuexus, fere trigonalis.

Venter infimus ſeu Abdomen e ſpina lumbari ſeu Lumbis, oſſe ſacro et coxis, artubus inferioribus ſeu pedibus in brutis poſterioribus a coxa vtraque pendentibus, et Coccyge tandem ſeu cauda oſſi ſacro contigua conſtans, oſſa ſub vulgato vertebrarum legitimarum, ſpuriarumque, oſſis inde Ilii, Iſchii et Pubis, porro Femoris, Patellae, Tibiae fibula deſtitutae, oſſiculorum Tarſi, Tali, Calcis nempe, Scaphoidis, Cuboidis et innominatorum; Metatarſi digitalium articulorum ſcutulorumque tendinalium, nomine

et

et ordine, dizygon comparibus duobus et triginta ad cenſum non vocatis, ab inuicem diuerſa quinquaginta, illis vero ſub computum cadentibus, in vniuerſum duo et octuaginta complectitur. Spina lumbaris e vertebris legitimis vltimis ſeptem conſtat, omnes totius ſpinae reliquas minima eorum latitudine ſuperantibus, maxima vero longitudine neque colli vllam neque primas dorſi duas aequantibus, altidudine maxima vix niſi ad tres dorſi infimas comparandis, proceſſuum numero et ſitu, exceptis figura et mole transuerſi proceſſus et ſpinae, dorſalibus ſimilibus, ſpina reuerſa, qualis in Leporibus obſeruatur, deſtitutis: Harum dimenſiones ſequentes ſunt.

Spina lumbaris.

Vertebrarum ſpinae lumbaris dimenſiones.

1ª.	alta 6°,	2′,	5″,	lata 9°,	—	—	longa 3°.	—	—
2ª.	— 6,	4,	—,	— 11,	5,	—	—	2, 9′,	7″,
3ª.	— 6,	5,	5,	— 14,	—	—	—	2, 9,	3,
4ª.	— 6,	7,	—,	— 15,	—	—	—	2, 8,	5,
5ª.	— 5,	8,	—	— 13,	7,	5,	—	2, 8,	—
6ª.	— 5,	3,	—,	— 13,	3,	—	—	2, 6,	5,
7ª.	— 5,	—	—	— 11,	5,	—	—	2, 4,	5,

Ergo ſpinae lumbaris totius vertebrarum compages eſt . . . . . . 19, 6, 5.

Os ſacrum e vertebris ſpuriis primis ſeu ſuperioribus quinque diuerſae magnitudinis, tam firmiter ſine motu inter ſe mutuo coalitis, vt vnicum os triangulare fingant, compoſitum eſt, ſuperius vltimae vertebrae lumbari, inferius primae Coccygis ſeu caudae cum motu, vtrinque oſſibus Ilii ope proceſſuum transuerſalium ſine motu connexum, proceſſibus vertebrarum admodum imperfectis, ſuperiore in ſola prima, inferiore in vltima manifeſte, in mediis obſcure comparentibus, transuerſo et ſpina in omnibus, illis qui-

Os ſacrum.

quidem inter ſe mutuo coalitis, his valde ſubſidentibus, inſtructum; Sinubus praeterea ſuperiore et inferiore, aliisque in ſingulo latere binis poſticis et foramine denique magno pro medullae tranſitu, cum quatuor internis, pro medullae eiusdem propaginibus nerueis, more aliis animalibus vſitato praeditum. Eius vertebra prima ſeu ſuprema longa eſt 2°, 1′, lata vero 7°, 7′, alta 3°, 6′, mediae notabili proportione minores ſunt. Vltima quinta longa eſt 1°, 4′, lata. 2°, 8′, alta 1°, 5′, 5″. Tota oſſis ſacri longitudo denique eſt 8°, 3′, 5″.

Coxae. Coxae, abdominis peluim cum oſſe Sacro conſtituentes, oſſis ſacri lateri vtroque appoſitae, eius proceſſibus transuerſis per ſynchondroſin et ſyneuroſin, ſeu cartilaginem et ligamenta, ope Oſſis Ilii firmiſſime connexae ſunt, quarum ſingulae ex tribus oſſibus Ilii nempe, Iſchii et Pubis
Os Ilium. ſolide coalitis, conſtant. Os Ilium amplum fere ſemicirculare et ſatis craſſum, dorſo exterius conuexo, interius concauo, ſpina circumſcripto et tribus in externo dorſo lineis aſperis, ſuperiore, media et infima pro muſculorum femur extendentium et Glutaeorum inſertione praeditum eſt, latum in diametro maxima 11°, in minima circa Iſchii acetabulum 2°, 6′, longum a ſpinae vertice ad acetabulum Iſchii 7°.

Os Iſchium. Os Iſchium anguſtum valde ſed craſſum eſt, praecipue circa acetabulum, medio inter Ilium os et Pubis loco conſtitutum, inde iuxta oſſis pubis longitudinem et foramen maximum deſcendendo in proceſſum externum valde inſignem protenditur, ſimulque circa pubis proceſſum poſteriorem terminatur; latum autem eſt circa acetabulum

3°. 5′.

3°, 5′, longum ab acetabuli ſuperiore limbo ad proceſſum pubis poſteriorem 8°. Acetabuli diameter eſt 2°, 4′.

Os pubis. Os pubis oſſium Coxae minimum, breue et anguſtum, inferiore et antica Coxae parte et cum Oſſe Iſchio ſupra et infra foramen maximum et cum ſuo compari per ſynchondroſin firmiter, ſine motu coalitum, in limbo inferiore proceſſu poſtico praeditum eſt, latum a commiſſura mutua ad foramen maximum 2°, 8′, ab eadem ad proceſſum poſticum 4°, longum in commiſſura mutua 5°, 3′, 5″. Foramen maximum longum eſt 3°. Totius Coxae latitudo maxima ſuperius eſt 11°, latitudo minor inferius a commiſſura pubis ad proceſſum Iſchii externum 7°, 4′. Latitudo minima circa Iſchii acetabulum eſt 2°, 6′, Coxae vero longitudo totalis maxima 15°. Coxae vtriusque in ſitu, ſeu peluis abdominis latitudo inter Ilii ſpinam conuergentium 2°, 5′, eadem inter diuergentes maxima 18°, inter acetabulorum Iſchii limbos internos 6°, 5′, inter externos 9°, 7′, proceſſus externos Iſchii 12°, inter pubis proceſſus poſteriores 6°, 8′.

Pedes poſteriores. Artus inferiores ſeu pedes in brutorum genere poſteriores dicti, a Coxae vel Iſchii acetabulo pendentes, e Femore cum patella, Tibia et pede extremo, Tarſo ſcilicet heptaſtode, metatarſo monoſtode et digitis triphalangiis binis, ſcutulis tendinum ad ſingulos articulos munitis, compoſiti, longi ſunt a femoris capite ad digitorum apices 58°.

Os Femoris. Femur monoſtodes, poſt Cubitum oſſium in hoc ſceleto maximum et craſſiſſimum eſt, ſuperius magna epiphyſi collo nempe cum capite et proceſſibus duobus, trochantere ſcilicet ſuperiore externo et inferiore interno inſtructum, ſcapo craſſo, tereti, gibboſo, intus fiſtuloſo,

 me-

medulla ſarcto, in infero autem extremo duobus proceſſibus globoſis, totidemque ſinubus, anteriore ſcilicet patellari et poſteriore vaſculari praeditum; latum ſuperius in capite 5°, 3′, in ſcapi medio 1°, 9′, inferius in extremo 4°, 8′, longum autem 19°, 5′.

Patella. Patella ante genu vmboni ſeu tuberculo ſimilis, fere rhomboidea angulis ſaltem vbique attritis, tota ſolide oſſea, interiore ſuperficie lubrica cartilagine obducta, femorisque ſinui patellari commiſſa et ligamento proprio firmata; longa eſt 3°, 5′, 5″, lata 1°, 8′, et ſpiſſa denique ſeu alta 1°, 8′.

Os Tibiae. Tibia huic ſceleto monoſtodes, mole femori proxime comparanda, capite praedita eſt craſſo et quaternis in capite ſinubus, verticalibus ſcilicet binis maioribus, totidem proceſſus femoris globoſos ſub articulatione recipientibus, et binis deinde minoribus, laterali ſcilicet externo, prorſus ſuperficiali, cum quarto poſtico, vaſculari; quibus tandem tuberculum verticale inter ſinus maiores medium accedit; ſcapo ſuperius craſſo et prismatico, angulo inclinationis laterum ſeu ſpina, anterius, latere vero ſeu plano ſpinae oppoſito, poſterius conſtitutis, inferius graciliore, magisque terete, intus fiſtuloſo, medullaque farcto; in infimo autem extremo tantisper capite anguſtior eſt, malleolo interno ſinuque inſigni, infimo ſcilicet, Talum excipiente inſtructa, lata ſuperius in capite 4°, 7′, 5″, lata in ſcapo 2°, 1′, inferius lata 3°, 6′, longa 16°, 2′, 5″. Fibula quamuis ſedulo requiſita non comparuit.

Tarſus. Pedis extremi denique Tarſus heptaſtodes e Talo, Calce, Scaphoide, Cuboide et tribus innominatis, inter ſe per ſynchondroſin firmiter cum motu connexis et articu-

latis, vt in aliis brutis quadrupedibus, compoſitus eſt, longus a Tali prima facie ſuprema gibba ad metatarſum 4°, 3′, a Calcis poſteriore extremo ad metatarſum 6°, 5′. Metatarſus monoſtodes, ouillo proxime ſimilis eſt, capite lato in vertice plano, ſinubus tamen leuioribus ternis, totidem oſſa tarſi innominata excipientibus exſculpto; Scapo recto neutiquam arcuato, fere tereti, retro tamen pro transmittendis tendinibus profunde canaliculato, intus fiſtuloſo; infimo extremo latiore admodum craſſo, in epiphyſes geminas terminato, trochleae cylindricae non canaliculatae, niſi retro vnice et leuiſſime pro recipiendis tendinum ſcutulis, ſimiles, inter ſe aequales, ope crenae tamen maioris ab inuicem ſeparatas, quibus totidem digiti in articulantur, longus vero eſt 13°, 3′, latus ſuperius in capitulo 2°, 6′, in ſcapi medio 1°, 3′, 5″, inferius per epiphyſes 3°, 4′. Digiti triphalangii bini, totidem metatarſi epiphyſibus connexi, e tribus articulis, totidemque ſcutulis tendinum compoſiti, inter ſe aequales ſunt, digitis anterioribus vero inſigniter minores, plantam ſpecialem ſeu huic quadrupedum generi propriam abſoluentes. Primae phalangis articulus ſupremus omniumque maximus, capite ſeu nodo ſuperiore praeditus eſt craſſo, vertice pro recipienda metatarſi epiphyſi leuiter ſinuato, retro ſcutulo tendinum, Caſtaneam fere dimidiam minorem aequante, munito; Scapo breui, nodo inferiore parumper minore, trochleae cylindricae non canaliculatae, niſi ſimplici ſinu retro pro ſcutulo tendinum ſecundae phalangis recipiendo, ſimili; longus 3°, 2′, 5″, latus ſuperius in capite 1°, 7′, in ſcapi medio 1°, 1′, 5″, in nodo inferiore 1°, 3′, 5″. Secundae phalangis articulus ſimilis praecedenti ſupremo, ſola

Metatarſus.

Digiti.

ſola mole deuerſus, longus eſt 2°, 4′, latus ſuperius in capite 1°, 3′, in ſcapi medio 1°, 8″, in nodo inferiore 1°, 2′, 5″. Tertiae phalangis articulus infimus, omnium minimus, fere pyramidalis et trilaterus eſt, in baſi pro inarticulatione praecedentis leuiori ſinu exſculpto, duobus inde lateribus antrorſum in apicem conuergentibus, vngue corneo munitis, tertio in plantam cedente, praeditus, ſcutuloque tendinum tertio inſtructus, longus a baſi in apicem 1°, 1′, latus in baſi 1°. Vnguis corneus fuſcus, parum politus, fere ſcaber, conuexus, ad trianguli figuram accedit.

Coccyx. Coccyx denique ſeu Cauda in quadrupedibus, potius abigendis tabanis muſcis et culicibus, quam praecauendae ani procidentiae brutis non familiari deſtinata, quintae oſſis ſacri vertebrae cum motu manifeſto connexa, e vertebris ſpuriis vltimis ſeu inferioribus 18, ſucceſſiue minoribus, inter ſe mutuo per ſynchondroſin et ſyneuroſin cum motu manifeſto connexis, compoſita eſt. Eius vertebra prima longa eſt 1°, 3′, lata 1°, 8′, alta 1°, 4′. Vertebra eiusdem vltima propemodum teres et exigua vix calamum anſerinum craſſitie ſuperat, longa autem eſt 4′, 5″. Tota denique longitudo Coccygis vel Caudae eſt 20°.

Numerus Oſſium in Cameli Sceleto. Oſſa totius ſceleti diuerſae conformationis ſecluſis vbique comparibus ſunt 147, comparia 117, in vniuerſum vero 264.

CLAS-

CLASSIS TERTIA.

CONTINENS

HISTORICA.

GEOGRAPHIA RVSSIAE VICINARVMQVE REGIONVM CIRCITER A. C. DCCCCXLVIII.

Ex Scriptoribus Septemtrionalibus.

AVCTORE

T. S. B.

Quemadmodum in geographia gentium Ruſſiae vicinarum, vt Suendoslaui regis ſub auſpiciis fuerunt, meridionales prouincias et fines executus ſum ſuperiori diſſertatione, ita ſeptemtrionalia nunc pertractare inſtituo. Erit nobis dicendum de Schudis, Eſthonibus, Liuonis, Merianis Iarmenſibus, Ingris, Carelis, Fennis; et quoniam ſeptemtrionalia monumenta Gardarikiam et Holmgardiam illis temporibus celebrant, earum quoque memoria ad hunc locum pertinere viſa eſt: nam de Varagis peculiari diſſertatione dicemus. Auctor Knigae Stepennaiae ad A. M. 6475. A. C. 967. *Eo tempore tributarii fuerunt* чюдь *Gjud vicini Nouogrodiae, Sloueni, vbi nunc eſt Pleſcouia et Nouogrodum, Bielozero, Meria, Roſtouienſis ager ad lacum Kleſzczynum, Murom, Czeremiſa, Mordua, Perm, Peczera, Iem, Lithuania, Semigallia, Kors, Neroua, Liubi, Koſari, Bulgari ad Danubium, Vngari Albi, Czechi, Poloni, Luticzi, Maſouia, Pomerania, Drewliani, Dregouiczi, Polocziani, Sieuera, Kriuiczi, Volhynia, ad Duinam ſiti et alii plures: hi omnes olim vno nomine Slauoni dicebantur, at a Rurici tempore Ruſſi dici coeperunt.* Multum ille vero ſe ipſe ſefellit et alios. Primum eximenda eſt

Pomerania, quam Slaui quidem tenuere, at Ruſſi nulli. Res innumeris teſtimoniis demoſtrari poteſt. Et quemadmodum Czech ſiue Morauia et Bohemia, Polonia et Maſouia vmquam Ruſſiae accenſeri potuere? Ante Ruricum magna Morauorum regum potentia fuit, et deinceps vsque ad Turcarum irruptionem A. C. 893. Neque poſt id tempus quidquam negotii Ruſſis fuit cum Morauis, quorum res per Germanicos ſcriptores non ita ſunt obſcurae, vt ſuſpicionibus locum concedamus. Poloni autem fere iisdem temporibus, quibus Ruſſi, caput extulere: nam vetuſta illa nimis, ſunt penitus commentitia et vana. At Mieſzko dux, qui aequalis Suendoslauo fuit, tantum abeſt vt Ruſſis fuerit ſubiectus, vt potius inter Principes Romani Imperii cenſeretur. Vngari Albi ne Slauonis quidem cognati, multo potentiores fuere, quam vt Suendoslauo parerent. Bulgari ad Danubium a Suendoslauo victi captique: at breuis illa felicitas maiori clade Ruſſorum et interitu Suendoslaui vindicata eſt. Cozari autem atque Kors, vrbs illa in Cherrhoneſo fuit, adeo non Suendoslaui fuerunt, vt etiam Pazinacitae inter Ruſſiam et Chazariam interiecti, magno terrori eſſent Ruſſis. Lithuania et Samogithia, quam Semigalliam dicere videtur, ſerius in poteſtatem Ruſſorum peruenerunt. Quae cum ita ſint, de Czeremiſſa, Mordua, Permia quantum huic auctori ſine metu erroris concedi poſſit, videlicet cuique apparet.

Schiudos, чюдь, ſeu *Giudos* ſeu *Czud* vt Polonico more ſcribam, conſentiunt huic auctori omnes, ad Nouogrodium fuiſſe vicinos et Pleſcouiam: nam ad occidentem harum vrbium *Giudos* collocant. Fuere igitur in hac Liuonia et Eſthonia. Lacus haud procul a Narua, Peipus in-

incolis dictus, Ruſſis adhuc чюдское озеро *Giudicus lacus.* Etiam Carelia et magna pars Fenniae Ruſſis ad hunc diem Чюхонская земля *Giuchonskaia ſemla*, incolae Чюхня *Giuchna* dicuntur. Et ſunt in Ruſſicis monumentis quaedam res ſic tractatae, vt ſatis appareat, *Giudos* fuiſſe Fennos. Ipſa in Siberia ad hoc vsque tempus populus Fennica lingua vtens *Giud* vocatur. Quid autem *Cziud* ſeu *Giud* et *Sziud*, vtcumque ſcribas, eſt aliud, quam ipſum Scythicum nomen? Neque hoc a noſtris rationibus abhorret. Nam ex Herodoto oſtendimus Budinos Neuros et Gelonos ad Pripelium et Boryſthenis occidentalem ripam, Scythico corpori accenſitos fuiſſe, quamquam eorum ſermo a Scythico diſcordaret. Tum in conuerſionibus rerum Scythicarum ſub Mithridaticis temporibus executus ſum, quemadmodum Budini Neuri et Geloni nobis videantur ad Balthicum mare in Pruſſia hac noſtra atque Curonia conſediſſe. Iis autem in locis Aeſtii fuerunt et in vicina Polonia Fenni, illorum, vt puto nepotes, qui vt poſtea Duina traiecto haec ſua littora occupauerint, infra magis idoneo dicam loco. Iam cum etiam populi in Siberia Fennico ſermone vtuntur, et Morduani, qui Conſtantini Porphyrogennetae aetate iisdem in ſaltibus coluere, quibus adhuc continentur, Magiari autem, quos nunc Hungaros vocamus, ob vicinitatem credo Morduanorum aut aliorum populorum Fennici corporis aliquid eius linguae ſuo ſermoni admiſcuerunt, credo equidem totum hoc corpus Fennicum ſuperioribus temporibus ſic coniunctum fuiſſe, vt inde a Balthico mari fere ad Volgam pertinuerint; forte iisdem permiſti alterius quoque corporis populi fuere, quorum omnis memoria quia

intercedit, non ad modum nos morari debet: Sclauos autem, Fennis deuictis, medios deinde conſediſſe inter Eſthones et Fennos ad Balticum mare et iſtos Morduanos Siberiosque, qui fortaſſis magis ad occidentem egerint, antequam a Slauis ſunt fugati. Hungaricae linguae Fennica multa admiſta eſſe Olaus Rudbequius Olai F. egregio nos ſcripto docuit. Nam tametſi Magiarica ſeu haec Hungarorum lingua toto genio ſuo et natura a Fennico ſermone diuerſa eſt, tamen ob vicinitatem, commercia, neceſſitudines alias, forte etiam, quod ſubiecti aliquando Morducanis, aut alteri Fennici corporis populo, fuere Magiari, ea ex lingua innumeras voces recipere potuere in ſuam. Igitur, vt dixi, primum cunctarum gentium, quae eodem ſermone ſunt vſae, cognationem video, tum eiusdem corporis populum non niſi vi et bello diſtractum inter ſeſe exiſtimo: denique ante illud bellum contiguis regionum ſpatiis degiſſe concludo. Vt ita ſentiam alias quoque rationes habeo, non ita graues ad demonſtrandum, tamen, vt hac in cauſſa, ſatis accommodatas ad probabilem coniecturam. Forte quidam victi a Slauis iugo colla ſubiecere, et cum lingua moribusque nomen Slauonicum ſuſcepere, atque deinde Ruſſicum, vt Britanni ab Anglis, a Francis Galli: alii nouas ſedes quaeſiuere conſeruandae cauſſa libertatis, in quibus Morduani fuerint, atque illi in Siberia. Neque ſolum Ruſſi *Giudos* hoſce commemorant, ſed etiam Adamus Bremenſis *Scutos* appellat, cuius locum infra producam.

Et deinde frequens mentio Meriae меря *Meria* regio, populus меране *Merane*. Et fere illi cum Giudis coniunguntur, vbi memoria incidit. Apparet Adami Bremen-

menſis *Mirrhos* eſſe. Hiſtoriographus Ruthenus: (1) *Roſtow Merianorum metropolis.* Eam ille iam Rurico rege ſub Ruſſorum poteſtate fuiſſe ſcribit, et ducem habuiſſe a rege impoſitum. Itaque ex vno hoc loco ſitum regionis tenemus. Iarmenſis Geruaſius Tilberienſis (2) indicauit: *Sed et inter Poloniam et Liuoniam ſunt pagani, qui Iarmenſes dicuntur: ex hinc verſus ſeptemtrionem eſt Liuonia, quae gens paganorum eſt probiſſima.*

At iisdem temporibus, quibus operam damus, ſcriptores Septemtrionales Eſthlandos, ignotum Ruſſis nomen, ponunt, vbi Ruſſi ſuos *Giudos.* Huius regionis ſitum vt accuratius definiam, neceſſe eſt inde a Curonia exordiri et a Pruſſia. Pruſſiae nomen ſerius cognitum, quam prouinciae littoralis Sembiae, cuius incolas Adamus Bremenſis a iuſtitiae, humanitatis, hoſpitalitatisque laude praedicat. Et conſentit vetus memoria populi Pruſſici, quam Chriſtianus Epiſcopus nobis conſeruauit, non modo iam tum potentem populum fuiſſe, ſed etiam multo tempore ante Ruricum regem. Non eſt hic locus de eo argumento dicendi: ſatis eſt, ſi quis ignoret, vt eum admoneam, ſermonem Pruſſorum fuiſſe Lithuanico Curonico Lettico penitus congruentem, vt iſtius corporis gentem fuiſſe, mihi concedat. Diuiſus eſt populus Pruſſicus in gentes et prouincias vndecim. Fuere enim Sambi, Nadrouitae, Sudouitae, Schalauoni, Natangi, Barti, Galindae, Varmi, Pogeſani, Pomeſani, Culmi. Has ego prouincias in tabula non poſui omnes, partem a ſpatio excluſas, partem nihil admodum ad noſtram curam nunc pertinentes, praeſertim cum Caſpar Henneberger totius regni veterem faciem

(1) Ad A. C. 862. (2) p. 765. ed. Leib.

ciem ita accurate et eleganter in tabula pinxit, vt haec res vel noſtro vel alterius ſtudio non indigeat. In his prouinciis ſola Sembia ſeu *Samland* et *Semlant* quia littoralis eſt, nota fuit et celebrata. Inde a Pruſſia Curoni ab Adamo Bremenſi ponuntur. Nota Curonia fuiſſe videtur S. Anſchario, vt ex eius vita auctore S. Remberto (3) concluſit Adamus Bremenſis *Gens quaedam*, inquit, *a Sueonibus longe poſita, vocata Chori, Sueonum principatui olim ſubiecta fuerat: ſed iam tunc diu erat, quod rebellando eius* (iis) *ſubiici dedignabantur.* Gualdo Corbeienſis (4) in vita Anſcharii.

Quaedam, dicta Chori, Scythici gens incola mundi,
Cum foret imperio Sueonum ſubdita, rupto
Foedere diſſenſit, pactumque fidemque reuulſit

Perperam Adamo Bremenſi Chori videntur Curoni. (5) Sunt enim, Kareli, vt dicam poſtea, iidem vero qui Saxoni Grammatico *Curetes*, vt eſſet vocabulum e Marone admiſtum. Olim, vt et Pruſſicis monumentis conſtat Curoni item, vt Lithuani, ad rem publicam Pruſſicam pertinebant, erantque diis et pontifici maximo curae. Eius enim auctoritas late ſemper patuit religionis cauſſa. Petrus Teutoburgicus: (6) *Criue, quem colebant pro Papa, quia ſicut dominus Papa regit vniuerſalem eccleſiam fidelium, ita ad iſtius nutum ſeu mandatum, non ſolum gentes praedictae* (Pruſſi) *ſed et Lethouini, et aliae nationes, et Liuoniae terrae regebantur: tantae fuit auctoritatis, quod non ſolum ipſe, vel aliquis de ſanguine ſuo, verum et nuncius cum baculo ſuo, vel alio ſigno noto, tranſiens terminos fidelium praedictorum a regibus, et nobilibus, et communi populo, in magna*

(3) p. 70. ed. Fabr. (4) p. 108. (5) de Situ Daniae p. 58. (6.) p. 79.

magna reuerentia haberentur. Deinde Curoni ſui iuris eſſe coeperunt, immo ſua ſibi habere ſacra, ſuos pontifices. De ſitu Curoniae Adamus Bremenſis ſic ſcribit: *ſed et aliae inſulae interius* (interiori in ſinu maris Balthici ad orientem) *ſunt, quae ſubiacent Sueonum imperio, quarum maxima eſt illa, quae Curland dicitur, iter octo dierum habens: gens crudeliſſima propter nimium idololatriae cultum fugitur ab omnibus: aurum ibi plurimum, equi optimi, diuinis, auguribus atque nicromanticis omnes domus ſunt plenae, qui etiam veſtitu monachio induti ſunt: a toto orbe ibi reſponſa petuntur, maxime ab Hiſpanis et Graecis.* Regio, vt vides, amplior fuit, quam nunc eſt. Octo enim dierum iter, quod iam Chriſtophorus Hartcnochius vidit; (7) ſine dubio in littore recenſuit Adamus, cum interiora non eſſent nota, vt adeo Samogithia quoque ad Curoniam relata ſit. Et ne quis adhuc dubitet, habemus auctorem alterum Petrum Teutoburgicum, (8) qui circiter A. C. 1326. ita ſcripſit: *Terra Pruſchiae pro terminis ſuis, intra quos conſtituta eſt, habet Viſelam (Viſtulam) Mare Salſum* (Balthicum) *Memelam, terram Ruſchiae: Memela eſt fluuius fluens aqua, deſcendens a regno Ruſſiae circa caſtrum et ciuitatem Memelberg* (nunc *Memel*) *intrans mare, ipſam Ruſſiam Lethouiam et Curoniam diuidens etiam a Pruſchia.* Fuit igitur tum quidem Memela, communis trium regionum limes: Curoni ad ſeptemtrionalem ripam coluerunt, vnde vicinus Memelae fluuio lacus adhuc Curonicus: Ruſſi magis reiecti ad orientem, tamen ad illum fluuium: ad auſtrum fontium Memelae Lettaui ſeu Lithuani. Idem ille Petrus ſcri-

(7) de Curorum et Semigallorum Republica p. 939. (8) p. 68.

ſcribit, ante aduentum Teutonici Ordinis in Pruſſiam ſeu ante A. C. 1230. Ruthenos caſtrum Scalouitarum, populi Pruſſici, ad Memelam prope Ragnitam, nouem annos obſediſſe, donec fruſtra ſe eſſe cernentes receſſerunt. Viciniores igitur Ruſſi fuere Pruſſiae, quam nunc ſunt. Eo etiam tum Adalbertus Pragenſis, tum Bruno, cum Ruſſiam potiſſimum peterent religionis cauſſa, quae mea eſt opinio, per Pruſſiam potius quam per Poloniam Lithuaniamque iter ingreſſi ſunt. Scio Pruſſos vtrumque epiſcopum ſibi ſolis vindicare: at me mea delectat opinio. Sane Dithmarus Merſeburgenſis, qui Brunonis neceſſarius fuit ad A. C. 1009. (9) *tunc in confinio praedictae regionis* (Pruſſiae) *et Ruſciae cum praedicaret, primo ab incolis prohibetur, et plus euangelizans capitur.* Quare non eſt nihili cum Albertus Koialouitius ſcribit: (10) *Fortunam parentis correxit Vlodimirus, finitimis prouinciis ad imperium Ruſſorum adiectis, inter quas Lituania etiam ab aliquibus numeratur.* Cum autem ante Vladimirum Lithuania vtique ſui iuris fuit, huiusce rei commentatio non ad hanc aetatem pertinet, et alio loco inſeruiet magis. Id enim nunc maxime conſtituendum nobis fuit, illis teſtimoniis Curoniam Samogithiae regionem intra ſuos terminos continuiſſe. Cum Adamus Bremenſis dicit, multos religionis cauſſa *ex Hiſpanis et Graecis* in Curoniam veniſſe, Graeci, quod Hartcnochius iam vidit, et ante eum Henricus Bangertus ad Helmoldum, nulli alii ſunt, quam Ruſſi: at Hiſpanos quos dicat, non video. Vereor, ne cum *Supanos* ſeu regulos Lettouiae audiuit, ex eo inciderit in ridiculum errorem de Hiſpanis. Meo autem iudicio rectiſſime ſenſit Matthaeus Praetorius in Orbe Gothico

(9) p. 398. ed. Leibn. (10) Hiſtoriae Lithuanicae parte priori p. 36.

thico, Curoniam a *Cauras* Pruſſica voce, hoc eſt *a planitie* appellatam eſſe; nec minus, qui Semigalliam a *Sceme* et *galle*, quaſi *terrae fines* interpretantur, digni noſtro adſenſu videntur: fuit enim Semigallia, quae Duna flumine continetur, extrema Curoniae terra.

Succebat, Adamo Bremenſi teſte, Eſthonia, cum nondum notum eſſet Liuonicum nomen. Snorro Sturlaeus, qui A. C. 1241. caeſus eſt in Noruagia, frequentem memoriam huiusce littoris celebrans, aliter totam regionem haud vllo in loco nuncupauit, quam *Eyſtland*: eidem Eſthlandus eſt *Eiſtur*. Sic ſaepe in Runicis lapidibus. Apud Adamum Bremenſem, et Helmoldum, et apud Saxonem Grammaticum, *Eſtland*. Hi more magis Danico, et vt Anglo Saxones, *Eaſt* dicebant *orientem*: illi Noruagico et Islandico *Eiſt*, vnde *Eiſtur*, *orientalis*, et *Auſtur* et *Eiſtra*, vt *Eiſtra Sallt* in Jarla ſaga, hoc *mare orientale*, ſeu Balticum. Prima Aeſtiorum memoria apud Cornelium Tacitum: nomen vt puto, non ab ipſa gente, ſed a vicinis Germanis. Sic autem ille: (1) *Dextero Sueuici maris littore Aeſtiorum gentes alluuntur, quibus ritus habituſue Sueuorum, lingua Britanicae propior: matrem deum venerantur: inſigne ſuperſtitionis, formas aprorum geſtant: id pro armis omniumque tuleta, ſecurum deae cultorem etiam inter hoſtes praeſtat: rarus ferri, frequens fuſtium vſus: frumenta ceterosque fructus patientius, quam pro ſolita Germanorum inertia laborant: ſed et mare ſcrutantur, ac ſoli omnium ſuccinum, quod ipſi gleſum vocant, inter vada atque in ipſo littore legunt.* Equidem inuitus finibus meis

 excedo

(1) de moribus Germanorum c. 45.

excedo ad vetuſtiorum memoriam temporum: tamen me neceſſitas cogit ad deuinciendam inter ſe huius populi hiſtoriam, non vt pertractem, ſed vt attingam. Mare Sueuicum Cornelii ſine omni dubio hic Balticus ſinus eſt, neque negari poteſt, apparere ex Tacito, Aeſtios iis in littoribus tunc coluiſſe, vbi ſuccini copia eſt, in Pruſſia, inquam, Samogithia, Curonia: multae enim gentes in populo Aeſtio fuere. At cum Ioannes Henricus Boeclerus (2) Aeſtios Germanicis populis adſcribit, illa quidem vis eſt. Non enim ex ritibus Sueuorum, quos ob vicinitatem et commerica haud difficulter recipi potuiſſe apparet, Aeſtios eum oportuit adiungere Sueuis, ſed ob linguae diuerſitatem ab eorum corpore excludere. Britannicae propiorem Tacitus dixit Aeſtiorum linguam, vt iudicare poterant Romani, neque Britannicae admodum gnari, neque Sueuicae. Itaque fruſtra eſt Cluuerius, cum Aeſtios hoſce ſine aliqua teſtimonii auctoritate ſuo arbitratu e Galliae finibus in coloniam deduxit ad mare Balticum, nempe vt Britannice loquerentur, quando, vt Tacitus in vita Agricolae prodidit, eodem ſermone vſi ſunt Brittanni et Galli. Immo Romani ſermonem audiuerunt in Aeſtiis, quem Sueuicum dicere non poterant, ita ab eo abhorruit: dixere Britannicum, τρὶς ἕξ, ἢ τρεὶς κύβοι. Ita iam Hermannus Conringius et Samuel Schurzfleiſchius ſenſerunt. Nam cum Boeclerus in voce argutatur, qua Tacitus *propiorem Britannicae* dixit, tanquam ſimul non negaret, aliquid Sueuici continuiſſe, in eo ſummi viri iudicio non accedo: notior mihi in Tacito aliisque illorum temporum dicendi ratio

(2) Diſquiſitio de acquiſito et amiſſo imperii Romani Germanici in Liuoniam iure p. 4. Seq.

ratio eſt, quam vt me circumueniat: cum propriorem dicit, puta eum nulla comparatione dixiſſe congruentem. Sic ille inquam, ſic alii, et quidem elegantiſſime. Denique cum concedit nobis doctiſſimus vir, Eſthones hos noſtros eſſe Taciti Aeſtios, quid obſecro in lingua Eſthonica eſt, quin neſcio cui linguae propior videatur, quam Sueuicae ſeu Teutonicae? Nempe Fennica tota eſt. Quis autem noſtrum tam argutus eſt hodie, vt vel tantillum Germanici ſermonis omni in lingua Eſthonica aut Fennica ſentiat? Et Fenni vero Taciti temporibus infra Aeſtios coluere in Polonia, quod me maxime confirmat, vt Aeſtios Taciti hos ipſos Eſthonos fuiſſe credam, vno ſemper cum Fennis corpore. Quoniam autem Fenni nunc altius ſub ſeptemtrione reiecti ſunt, ſequitur, eos ocyus in hanc Lithuaniam atque deinceps ſuperiores in regiones conceſſiſſe, donec a Slauis atque ipſis ab Aeſtiis illum in angulum abſtruſi ſunt. Sed de hac re alias. Aeſtii cum Theodorici Gothorum regis temporibus circiter A. C. D X, vt ex Caſſiodorio multi demonſtrarunt, illis ipſis in regionibus ſuccini feracibus egerunt, et paullo poſt Pruſſi ingreſſi ſunt, vt alias dicam, a nullo alio populo eiecti ſunt illis finibus, quam a Pruſſis, nullo alio tempore, quam circiter A. C. D XIV. Poſt id tempus memoria rerum vel ad ſuſpicandum defecit, donec Eginhardns Abbas Caroli M. temporibus reſtaurauit. Is enim ſic fatus eſt: (3) *Sinus quidam ab occidentali occano orientem verſus porrigitur longitudinis quidem incompertae, latitudinis vero, quae nusquam centum millia paſſuum excedat, cum in multis locis contractior inueniatur: hunc multae circumſident nationes:*

 Dani

(3) In vita Caroli M. p. 6. ed. Reub.

Dani ſiquidem et Sueones, quos Nordmannos vocamus, et ſeptemtrionale littus et omnes in eo inſulas tenent: at littus auſtrale Slaui, et Aiſti, et aliae diuerſae incolunt nationes, inter quos vel praecipui ſunt Velatabi. Sinum dicit Botnicum. At cetera vt intelligantur, velim pro ſe quisque conſideret, quae tum huius incomperti ad orientem maris forma vulgo Germanis perſuaſa fuerit. Ex Adamo Bremenſi, vel magis ex Snorrone Sturlaeo, ſenſi, credidiſſe, Balthicum mare ad orientem deſinere in arctiſſimo angulo, qui hinc littoribus auſtralibus, inde borealibus longo tractu includatur, tamquam extremum arcus Scythici cornu, vt quondam apud Dionyſium Periegeten fuere, qui orbis terrarum duo extrema peracuta ſibi informarunt. Eo non eſt mirandum, Aiſtos ab Eginhardo ad auſtrale littus poni: nam haec ipſa Eſthlandia et Liuonia illis ſcriptoribus in fronte viſa eſt obuerti ſeptemtrioni, ſcamnum obtendi occaſui ſolis. Immo adeo haec littora ignota fuere Germanis, vt vel S. Anſcharius, qui paullo poſt Eginhardum fuit ſub Ludouico Pio Imp. nomen Eſthoniae ignorarit. Apparuit hoc mihi ex priuilegio Hamburgenſis eccleſiae, quod Ludouicus Pius A. C. 834. dedit, in quo dioeceſis Hamburgenſis epiſcopatus deſcribitur, vt eo pertinerent terrae *Danorum*, *Suecorum*, *Norueon*, *Gronlandon*, *Halligalandon*, *Islandon*, *Scrideuindon*, *et omnium ſeptemtrionalium, et orientalium nationum.* Iisdem verbis Gregorius IV. P. R. in bulla vſus eſt, qua archiepiſcopatus huius iura confirmauit. (4) Neque deinde S. Rembertus Anſcharii ſucceſſor cum eius vitam deſcriberet, Aeſtios

(4) Apud Carolum Cointium Annal. Franc. t. VIII. p. 116. In Lambecii Orginibus Hamburgicis p. 36.

Aeſtios cognouit : nam de Gualdone Corbeienſi, qui Rembertum carmine expreſſit, nihil dicam. Si tum omnis his tractus paullo fuiſſet notior, in deſcribenda dioeceſi Hamburgenſi maiorem accurationem adhibuiſſet Imperator: nunc modo haec littora *orientem* dixit. Sic credo audiuerat ab Haraldo Daniae rege, qui ad imperatorem venerat ſupplex, neque enim aliter, quam *Oſtrogard* dixiſſe videtur more Danico.

Tempora ſuccedunt, cum Adamus Bremenſis nobis opem ferre poteſt. Is (5) poſtquam inſulas maris Balthici recenſuit, quas cum teſtimonio auctoris in *Knitlinſagu* (6) conferri velim, Curoniam quoque in numero inſularum collocat et Eſtlandiam. De Eſtandia : *Inſula grandis Eſtland dicitur : non minor illa, de qua prius dixi :* (Curonia) *nam et ipſi deum chriſtianorum prorſus ignorant, dracones adorant cum volucribus, quibus etiam viuos libant homines, quos a mercatoribus emunt, diligenter omnino probatos, ne maculam in corpore habeant, pro qua refutari dicuntur a daemonibus : et haec quidem inſula terrae foeminarum proxima narratur, cum illa ſuperior non longe ſit a Birka Sueonum.* In his tamen extremis mira adhuc eſt geographiae ignorantia, huic ſeculo, quo Adamus vixit, apta. Curoniam Bircae propiorem eſſe, quam Eſthoniam, quid Adamo perſuaſerit, video. Nam Careliam cum Curonia confudit, vt vberius demonſtrabo poſtea. Adamus quoque *Aiſtos* et *Scutos* coniungit : *Aiſti* ex Caſſiodorio et Eginhardo Eſthones : *Scuti* Ruſſorum *Giudi*, iidem illi Eſthones. Inde iam *Foeminarum regio*, Amazonas dicit

(5) Adamus Bremenſis p. Eggehardus Vragienſis ex Adamo p. 282. (6) p. 58. (7) ed. Olai Vormii p. 35.

cit ad Caucaſum, vt geographiae ſummam confuſionem fuiſſe inuectam ſaepe monuimus. Audiuerat Eſthones a Ruſſis *Scutos* dici: Scythae olim ad Caucaſum, iſthic etiam Amazones, reliquum erat, vt Eſthones Scutis, ſeu Scythis, tamquam diuerſis, et Amazonibus et Caucaſo vicini ponerentur; praeſertim cum Caucaſi Sueuiae vicini fidem facerent montes Vergaturii, ad quos Biarmia, quo Sueci frequentes commeabant. Sed has regionum perturbationes iam alibi deſcripſi. At magnitudo Eſthoniae, vt ab Adamo eſt deſcripta, aequalis Curoniae fuit: octo dierum itinere, intelligas, inde vsque ad Duna fuiſſe protenſam ad hunc vsque Neuam. Nam Ingria tum fuit nulla, quod quidem aliquo teſtimonio exſtet et vel ſuſpicione: tum ſi hiſtoriam rerum hoc in littore a Normannis geſtarum videas, tum in Snorrone, tum aliis in ſagis, Eſthoniam his fere terminis finitam fuiſſe inuenies; qua nunc Liuonia, Eſthonia, et Ingria ad Neuam vsque. Inde iam Fenni vsque fere ad oceanum ſeptemtrionalem. (8) Eiusdem populus corporis cum et lingua ita ſit vna, quemadmodum Saxoniae ſuperioris atque inferioris dialecti. Tantummodo obſeruatum eſt, Fennicam linguam multo locupletiorem eſſe Eſthonica et magis cultam, populum ipſum Fennicum liberaliori ingenio. Credo Eſthonibus in extrema ſub Teutonico Ordine ſeruitute, quidquid erectae mentis fuit, periiſſe: Fennorum ſors ſemper mitior fuit. Quare, cum, vt ex ſermone iudicaui, Eſthonum atque Fennorum vnum corpus fuit, recte priſci Ruſſi omnes populos illo in tractu *Cziudos* ſeu *Giudos*, Scythas vocarunt. Eſthlandis hodie nomen Aeſtium ignotum eſt, Fennis

(8) Inſulae Adalſyllo et Dago. Ad Ruſſos Snorro p. 318.

nis Fennicum. Eſthlandis haud aliter hodie Eſthlandia, quam *Meie maa*, *noſtra terra* et popularis *temma on meie maald*, *ille*, *qui ex noſtra terra.* Ab Fennis dicitur Eſthlandia *Pochgieſin.* Fennus Fenno *Suomolainen*, et multitudinis numero *Suomolaiſet*, Fennica regio *Suomen maa.* Eſt autem *maa regio* et *ſuo lacus palus.* Sunt igitur *Suomalaiſet*, populi in paludibus et lacubus degentes. Hoc nomine non videntur vſi, priusquam regionem paludibus et lacubus crebris refertam ingreſſi ſunt. Suiones eos a veteri memorea Fennos vocant. In Hialmari regis hiſtoria, e Runis Latine conuerſa a Peringskioldo, edita ab Hickeſco, (9) dicitur *Binland.* Apud Snorronem et multis in ſagis, *Finland* et *Vinland.* Euindo Skalda pillero, medio ſeculo decimo (10) *Finnar.* Tantummodo cauendum in vocabulo eſt, quod eodem illo priſci *Fioniam* dixerant. Sed de hac re Thormodus Torfaeus in hiſtoria Vinlandiae antiquae accuratiſſime egit. Neque credo ego Suionas in nomine Fennico erraſſe: nam exſtant alii ſcriptores alterius caeli et conditionis, qui eodem in loco Fennos ponunt. Geographus Rauennas, quem alibi demonſtrabo, his fere temporibus, quae illuſtranda ſuſcepi, commentatum fuiſſe, ipſum nomen poſuit: (1) *iuxta ipſam Scythiam litus oceanum, ponitur patria, quae dicitur Rerefrenorum et Sirdifenorum: cuius patriae homines, vt ait Aithanarit Gothorum philoſophus, rupes montium habitant et per venationes tam viri, quam mulieres viuere, cibo vel vino ignari exiſtentes in omnibus: quae patria ſuper omnes frigida eſſe adſcribitur.* Scythiam hic, vt ſaepe mo-

(9) In theſauro linguarum ſeptembr. t. II. p. 147. (10) apud ſnorronem t. I. p. 189. (1) p. 160. ed.

monui, ex praua geographiae cognitione dicit regionem commentitiam, Caucaſo promoto ad ſeptemtrionem. Idem ille: (2) *ad partem ſeptemtrionalem habet ipſa Europa finem oceanum, qui tangit Scythiam eremoſam, item Amazonas, vbi eas, poſtquam egreſſae ſunt de montibus Caucaſis antiquitus fuiſſe legimus: poſtmodum tangit ipſe Roxolanos* (ſic enim vocat Ruſſos) *nec non Sarmatas iterum Scythiam, poſtmodum Rereſennos et Serdeſennos, verum etiam Danos, nec non et Saxones.* Nihil verius, quam quod Hugo Grotius, qui hoc auctore nondum edito, vſus eſt, vidit, *Serdeſennos*, aut vt in codice Vrbinate eſt, *Sisdeſennos*, eſſe *Scridſennos*: at *Rereſennos*, et vt in Vrbinate codice eſt, *Rereſenos* et *Rereſeros*, eſſe *Redeſennos*: illos qui curſu et calopodio, hos qui rhedis ſeu trahis vtuntur. Cum a Procopio Caeſarienſi Scritoſenni in Thule ponuntur, Thule an Scandinauia ſit, Pontanus, Arngrimus Ionas, Thormodus Torfaeus, Olaus Rudbequius, multi alii diſuptarunt. Negari tamen non poteſt, Procopii Thulen has ſub extremo ſeptemtrione regiones eſſe, in quibus Fenni cenſentur. Quare iam Iuſtiniano Imp. iſthic coluere, vt mihi vno quaſi verbo liceat ſuperiorum memoriam temporum reſpicere. Iſthic eos agnouit Iornandes, et Paullus Varnefridus, et denique ipſe Adamus Bremenſis. (3) *Sunt autem Finni vltimi ſeptemtrionis populi, vix quidem habitabilem orbis terrarum partem cultura ac manſione complexi: acer iisdem telorum eſt vſus: non alia gens promptiore iaculandi peritia fruitur: grandibus et latis ſagittis dimicant, incantationum ſtudiis incumbunt, venationibus callent: incerta illis habitatio eſt, vagaque domus*

(2) p. 249. et 293. (3) p. 93.

mus, vbicumque feram occupauerint, locantibus ſedes: pandis trabibus vecti, conferta niuibus iuga percurrunt. De praeſtigiis eorum conſtans fama eſt et vetus, vsque ad Λυκανδρώπων fabellam; quae res nos vehementer confirmat, veterum Neurorum hanc eſſe ſobolem. Hialmari hiſtoria harum incantationum ſpecimen edidit. (4) De ſagittandi vero peritia, multi alii in ſeptemtrione praedicant. (5) Eſt autem Fennicum nomen quam accuratiſſime a Matthia Belio explicatum ex Hungarico, ſeu Magiarico ſermone, (6) in quo *feny* eſt *ſplendor*, *nitor*, *fulgor*, *iubar*, *fenyes*, *ſplendidus fulgidus*, *fenyeſſeg*, *ſplendor*, *fenyeſſen*, *ſplendide*, apud Molnarum.

Poſtquam demonſtraui, inde vsque a Duna populum fuiſſe Eſthonicum iſtis noſtris temporibus, incertum eſt, fuerintne etiam, qui Liuones dicerentur. Nam poſt A. C. 1158. et Bremenſium Lubecenſiumque mercatorum aduentum nusquam inuenio Liuoniae nomen, poſtea toti huic regioni ceſſit: tandem Curonia quoque et Samogithia ab Ordine Teutonico occupatis, paene obliterato Eſthoniae nomine et memoria, totus ille tractus inde a Memela flumine Liuonia fuit. Quomodo occupata ſit ab Equitibus Marianis, dicam infra. Tum vero Eſthlandi his terminis fere, quibus hodie incluſi erant: cetera obtinebant Littae, populus Lithuanicus, vt nomen ipſum eſt, qui pulſis Eſthonis hic colonias deduxerunt. Sed et Lettae ſerius ingreſſi ſunt, vt nihil ad hanc noſtram geographiam eorum memoria pertineat. De nominis Liuonici origine multum diſputari video. Martinus Cromerus, et Matthias Strycouius Oſſoſteuicius, atque Albertus Coialouitius, Libonem

(4) p. 141. 143. (5) V. Snorronem (6) In veteri litteratura Hunno Scythica p. 20.

quendam Romanum bello ciuili cum claſſe ex Italia adueniſſe putant, et ab eo dictam eſſe Liboniam. Exploſa haec de Libone ſunt ab Auguſto Thuano, tamen perplacuere tum aliis, tum Chriſtiano Kelchio in hiſtoria Liuoniae. Tanto eſt difficilius fabulas e mentibus hominum euellere, quam fingere. Aperiam fontem fabulae. Cromerus legerat apud Florum (7) de bello ciuili inter Pompeium et Caeſarem: *quippe cum fauces Adriatici maris iuſſi occupare, Dolabella et Antonius, ille Illyrico, hic Curetico littore caſtra poſuiſſent, iam maria late tenente Pompeio, repente legatus eius Octauius Libo ingentibus copiis claſſicorum circumuenit vtrumque.* Hoc in loco bonus vir duas commoditates ſibi viſus eſt reperiſſe ad coniecturam: *Cureticum* littus, quod putaret eſſe *Curonum* et *Libonis*: nomen dignum *Liuonia*. Et iam Saxo Grammaticus huic errori praeluſerat, cum Karelos diceret *Curetes*, vt etiam hic aliquid ab eruditione admiſceret, cuius intemperantiſſimus fuit: ſic enim Aeneas pater dixerat: (8)

Et tandem antiquis Curetum allabimur oris: deinde alii in Saxone traxere nomen ad Curonos. Iam Octauio Liboni aderat claſſis, teſte Floro, qua peteret Liuoniam. Quid quaeris? nempe *ſunt Apinae Tricaeque, et ſi quid vilius iſtis.* Editiones in hoc *Curetico* vehementer diſcordant: Salmaſius recte emendat *Curictico*, et oſtendit littus in faucibus Adriatici maris fuiſſe, Claudii Ptolemaei Κυρικτα. Bene habet: iterum fabula miſſa eſt exulatum. Alii Liuoniam dictam putant a *Liue*, *arena.* Forte igitur ita accederit, vt cum Bremenſes audirent *littus* ab incolis, quibuscum ſermonem miſcere non poterant, *Liue* nuncupari,

(7) l. IV. c. 2. 31. (8) Aeneid. l. III. v. 131.

pari, populum autem eo nomine Albi fluuio vicinum recordarentur, vt hos veluti cognatos illorum etiam dicerent *Liuos*, et *Liuonos*. Non dico fuiſſe illos ad Albim et hos Lettouos eiusdem ſtirpis, ſed ita videri potuit rudibus nautis et negotiatoribus. Illi haud procul ab Hamburgo. Teſtem habeo Hermannum Cornerum, qui Danorum cum his *Liuonibus*, aut vt alibi vocat, *Liuis*, iam ad A. C. 810. meminit. (9) Sunt adhuc in littoribus Liuoniae *Liui* vulgo dicti, qui Eſtonica lingua vtuntur permiſti Lettis maiori in Liuonia populo, alterius ſtirpis. In illis nimirum error manſit, vbi apparuit, Lettos Liuonum nomen non poſſe ſuſtinere. Et res mira eſt in vetuſtis ſcriptoribus Pruſſicis ineditis multisque ſchedis; Liuonia enim haud fere aliter vocatur, quam *Eyſſland*, Liuoni, *die Eyſſen*. Videtur ſane aliquid corruptelae ex *Eyſtlandiae* et *Eyſtorum* nominibus ortum et excluſum eſſe in Pruſſia ſcribarum oſcitantia. Vnum habeo vetuſtiſſimum Oliuerium Scholaſticum ante A. C. 1227. quo anno, vt Schatenius in Annalibus Paderbornenſibus oſtendit, deceſſit, ſic in Hiſtoria regum terrae Sanctae fatus eſt: (10) *nam gens Liuonum*, *Eſtonum*, *Prutonum* (Pruſſorum) *variis erroribus deluſa*, *ignorans dei filium et incarnati verbi myſterium*, *numina gentilium colebat*, *Dryades*, *Amadriades*, *Oreades*, *Napeas*, *Humides*, *Satyros*, *et Faunos*: *ſperabant enim ſuper lucos*, *quos nulla ſecuris violare praeſumſit*, *vbi fontes*, *et arbores*, *montes*, *et colles*, (Chammen) *rupes*, *et valles venerabantur*: *nunc autem ſanam doctrinam ſecuta*, *ad epiſcopum et paſtorem animarum ſuarum conuerſa Ieſum Chri-*

---

(9) p. 439. 440. et ad. A. C. 1110. p. 632. (10) p. 1396. ed. Eccardi.

Chriſtum, pontificibns ſuis obediens eccleſias aedificat et frequentat, legibus chriſtianis pro magna parte ſubiecta. V. ſupra, vbi Adamus Curoniam Bircae propiorem dixit. Eſtland, Chori. Gloſſae Keronis *chind*, *chamf*, *chiribh chuning* pro kind, kamf, kirich, kuning. Sic *chur* et *churfurſt*, ſcribimus, pronunciamus kur et kurfurſt.

Hoc loco nihil de Ingria, ſeu Igria, dicemus: eſt enim recentius his temporibus nomen. At de Carelia neceſſe eſt vt dicamus. Ericus Rex in hiſtoria Daniae. (1) *Totam Pruciam, Semigalliam, et terram Carelorum, ſubiugauerunt ſibi.* Dubitari poteſt, ſcripſeritne Carelos Ericus, aut eius monachus, vt ſub A. C. 1288. prouincia diceba-tur, an vt Lothenecmuo Erici filio rege, tot ſeculis ante. Sed iſthuc verum eſt potius, quam alterum. A Snorrone vocatur *Iarls riki.* Narrat enim Ingigerdin Olai Regis Suediae filiam, cum deſponſa eſſet Iaroslao Principi, Vladimiri Regis filio, in pactis nuptialibus a ſponſi parte confirmatam accepiſſe. Snorro p. 318. *Aldeiuborg ac Iarls riki dat er dar liggur lit. Aldeiuborg et Iarls regionem, quae ibi ſita.* Olaus Rudbequius p. 19. putat Aldeio et Ladeio per metatheſin dictum, aliaque exempla adfert ſimilia. Ea in regione collocauit neceſſarium ſuum Ragnuald Iarlum. *Ingigerdis regina caſtellum Aldeigoburgum, ſimulque annexam prouinciam cum Iarli dignitate, Ragnualdo dedit, qui etiam diutius multa cum dignitate hic vixit: Ragnualdus Iarlus ex coniuge ſua Ingeburgi filios ſuſceperat Vlfonem Iarlum et Eilifum Iarlum.* (2) Iam nemo ſeptemtrionalium antiquitatum ita ignarus eſt, vt neſciat, quae

(1) p. 267. V. Rudbequius p. 338. ſeq. (2) Snorro p. 517.

quae Iarlorum dignitas in Suecia fuerit. Comitibus ſunt qui aequiparent: poſſis etiam Romani imperii Principibus. Hic Rognualdus fuit Veſtrogothiae Iarlus. Snorro: (3) *Ragnualdi pater Vlfo frater erat Sigridis, cognomento Imperioſae: Olauus vero Suioniae rex et Ragnualdus Iarlus filii erant patrueles.* Scilicet vt alias ex Snorrone conſtat, haec genealogia fuit

Scoglar Toſti priuatus, ſed piraticis celeber.

1. Ericus Victorioſus Rex Sueciae. = Sigridis Imperioſa Regina.
   - Olaus Suecus Rex Sueciae.
     - Ingigerdis Iaroslai Regis Ruſſiae coniux.
2. Vlffo
   - Ragnuald Iarlus Veſtragothiae.

Habuit in matrimonio Ingeburgin filiam Tryguonis, Olai Regis Noruagiae ſororem, vt Snorro nos docit: (4) At animus inclinat in eam opinionem, *Iarls riki* regioni huic antea nomen non fuiſſe, ſed ex eo tempore ortum, cum Ragnualdus Iarlus ab Ingigerdi regendam ſuscepit A. C. 1019. Inde tamen *Iarelia* et *Carelia* corrupto vocabulo fuit, vt mihi aliquando in mentem venit. Verum et vetus Careliae nomen apud Snorronem Sturlaeum occurrit *Kyrialand.* (5) *Ericus Emundi filius Vpſalenſis rex in vigore aetatis conſtitutus, militaribus expeditionibus vt plurimum intentus fuerat, ac quotannis peregre profectus, Finn-*

(3) t. 1. p. 351. (4) p. 350. (5) t. 1. p. 484. 485.

Finnland Kyrialand, *Eyſtland*, *Kurland* (*oc vyda um auſtar laund*) *et porro Orientales regiones ſibi ſubiecit* : *cuius heroicae virtutis praeclara adhuc ſuperſunt monumenta*, *caſtella regiaeque arces eximii operis*. Ex ipſo ordine regionum apparet, *Kyrialand* intra Eſthoniam et Finniam fuiſſe ſitam. Veteri lingua *kyr*, *vacca* apud Snorronem. Vereor tamen, ne nomen plane ſit e Fennico corruptum: et eſt adhuc fluuius *Korl*. *Kyriali* a Normannis per apocopen etiam dicebantur *Kyri*, inde *Kuri* quoque vt eſt in cadice Flateyenſi et in editore hiſtoriae Olai Trigguini parte II. c. 32. p. 140. Torfaeus parte I. p. 160. errorem calami eſſe credidit. Non eſt neceſſe. Hoc eſt iſthuc S. Remberti *Chori* ſeu *Kori*. Nam Germani iis temporibus *ch* aliter, quam nunc, pronunciabant, ſic videlicet vt Itali. Erant autem vt Torfaeus l. c. citato oſtendit, Kyriali non modo ad hoc littus Finnicum ſiti, ſed etiam alii eiusdem corporis et nominis ad Mare Album, vbi littus Carlſtrand. Hi vicini erant Queniae regioni. Congreſſus Quenorum cum Kyrialis in vita Heraldi Pulchri comi c. XVII. vna cum itinere Thoralfi deſcribuntur. Annales Islandici ad A. C. 1271. imperante in Noruegia Magno Hcaconis Senioris filio Kyrialos et Quenos in Halogiam inſuſas crudeliter deſaeuiiſſe. Et iidem Annales ad A. 1301. Karelorum incurſum in Noruegiam, contra quos Hacon rex miſit Augmundum Iungadans cum magnis copiis. Haec quoque Carelia fuit ſub Ruſſis. Hiſtoria Regis Haconis meminit Alexandrum regem Holmgardiae legatos miſiſſe de mutuis Finmarchiae ciuium Noruagiae ac ſubiectorum, et Kyrialorum Ruſſiae creditis. Hoc vt rectius intelligatur, ſcire nos oportet, qui ſitus Finmarkiae Noruagicae

fuerit

ſuerit et Queniae atque Biarmiae. Iuga montium Kiöl Suioniam et Finniam a Naruagia et ceteris ſeptemtrionalibus diſterminarunt. Finmarkia in Noruegiae extremo, vbi nunc quoque exſtat. Scio extendere alios fines Noruegiae ad Ganduichum vsque, neque nego, fuiſſe pro temporum ratione nonnumquam ampliores. Ganduichius ſinus non ſane eſt Bothnicus ad Helſingiam, vt Scheffeurs ſibi perſuaſit de Lapponia c. 11. ſed, vt Torſaeus me docuit, et ante eum Verelius, Schefferi opinione, quam alias ſecutus fuerat, relicta, Ganduicum Album mare eſſe. Inde et Austroich dicitur iam Torſaeus cum ad Duinam fluuium venit, ad orientem eius coſtituit Biarmiam p. 163. *Ganduich*, Biarmia vero a Saxone et Io. Magno in vlteriorem et citeriorem diuiſa eſt. Poſteriorem ſolam recipit Torſaeus, citeriorem explodit. Et amplitudinem regionis, neque Olaus Verelius, neque Torſaeus, auſi ſunt definire. Duina tantum S. Vina et Vimr ab antiquis Biarmiae adſeritur, et ita adſeritur, vt pars Biarmiae etiam ad occidentem fluminis fuiſſe videatur. Hac in regione fuit *Aldeigoburgum*. Oddoni Monacho *Aldaeigiuborg*. In vita Olai Tryguonidis: *a hinum naeſta ſumri for han i Garda auſtr, oc var i Aldaeigiuborg aein vetr. Proxima aeſtate in Gardam orientalem profectus eſt et fuit Aldaeigiuburgi vnum annum.* De Magno S. Olai filio Snorro: (6) *Magnus Olai filius poſt Iolinia ſacra in Holmgardiam Aldeigioborgar profectus, naues iſthic aedificauit.* Olaus Verelius ad Oddonis Monachi ſagam: (7) *Aldejuburg, oppidum Pruſſiae meridionalis ſiue Gardarike.* Ad Heruorar ſaga (8) vbi *Aldeioborg*: *oppidum hoc Gardarike ſiue Ruſſiae meridianalis.* Mox haeret: *mirum videri*

(6) p. 3. (7) p. 16. (8) p. 72.

poſſit, quodnam itineris compendium Andgrimi filiis Bolmum in Smalandia incolentibus et ad condictum cum Hialmaro et Arvar Oddo, in Selandiae inſula Samſoe pugnaturis, Aldeigioburgum in Ruſſia fuerit? parum abeſt quin credam inſulam aliquam inter Sueoniam et Ruſſiam in Baltico mari ſitam iſto nomine deſignari, praeſertim cum mox addat auctor: Andgrimi filiis ad Samſoe inſulam properantibus iter faciendum erat per Aldeigioburgum: niſi forte piratis iſtis mare ſemper oberrantibus illud compendroſiſſimum iter, quod praedandi facultatem ſuppeditabat. Sed nos Heruorar ſagae auctorem nihil moramur, praeſertim cum Aldenburgum in Ruſſia ſitum non ſcribit et aliae illo nomine vrbes in Balthicis littoribus fuere. Snorro de Erico Iarlo (9) *circa initium veris, collectis copiis mare Balthicum ingreſſus et delatus* i riki Valldimars Kong, *in regnum Valdemari regis, late depopulatus eſt, vrbem Aldeiguborgar obſidione cinctam occupauit: caſtellum ſolo aequauit, vrbem exuſſit: deinde in* Gardariki *infeſta ſigna circumtulit.* Idem in Haraldi Hardradii Noruegiae regis rebus tradit, vt apud Iaroslaum Ruſſiae regem fuerit, et ducta filia eius Elizabetha, poſt hyemem abierit ex Holmgardia, et verno tempore *til Aldeigoborgar* profectus inde nauibus circa aeſtatem ſoluerit. Hoc iter ex Ruſſia etiam Magno, Olai filio, fuit; eodem teſte: (10) *til Aldeigu Borgar* naues ſub ver expediri coeptae. Quis mihi nunc negauerit vrbem in Carelia fuiſſe, haud ita longe a mari. Quare iis adſentior, qui ſtadiis Ruthenicis ab Petropoli ſita rudera vetuſtae vrbis ad fluuium haec *Aldaioborg* fuiſſe putant. *Aldaioborg* vi nominis Palaeapolis, ſine dubio *Starogrod* Ruſſis: vt nunc

(9) t. I. p. 318. (10) t. II. p. 74. (11) t. II. p. I.

Veterem Ladogam appellant iſta rudera. Et Ruſſi quoque tradunt metropoles imperii ſui ex ordine fuiſſe, Veterem Ladogam, Nouogrodium, Kiouiam, Vladimiriam, Moscuam. Et cum inde a Rurico rege, nemo Aldaioburgi ſedem habuit, ſequitur memoriam de priſcis ante Ruricum regibus in huius metropoleos mentione contineri. Et vt illa Vetus vrbs dicta fuit, ita Noua vrbs Nouogrodium, altera regni ſedes.

Extant ſcriptores Dani, Noruagi, Germani, Suiones, qui Ruſſiam ad hoc orientale Baltici maris littus protendunt et *Oſtragard* vocant. Incerti auctoris Chronica Sclauica a Lindebrogio edita: (2) *Rutia a Danis Oſtragard, id eſt, in oriente poſita, affluens omnibus bonis vocatur: dicitur etiam Chunigard, eo quod ſedes Hunnorum primo ibi fuerit: huius metropolis Chue* (Kiouia) *id eſt a coge, neſcitur a quibus doctoribus ſit conuerſa: Graecorum magis quam Latinorum obſeruantiam imitatur: nam Rutzenum mare breue id eſt, brachium in Graeciam mittit.* Rutzenum mare dicit hoc ipſum Eſthonicum, breue eius ſeu ſinum, hunc Finnicum, quem abſurda perſuaſione credidere in Pontum Euxinum effundi. Gracciam vero vocarunt partem illam Ruſſiae, vbi Kiouia. Sic demum intelligetur auctor. Eadem fere Adamus Bremenſis (3) et Helmoldus: (4) *Littus auſtrale Slauorum incolunt nationes, quorum ab oriente primi ſunt Ruzi, deinde Poloni, habentes a ſeptemtrione Pruzos. Diu eſt, ex quo Ruzia credidit: Ruſſia autem vocatur a Danis Oſtrogard, eo quod in oriente poſitus omnibus abundet bonis: haec etiam Chunigard dicitur, eo quod ibi ſedes Hunorum primo fuerit:*

 huius

(2) p. 189. ed. Fabr. (3) in H. E. p. 58. (4) l. 1. c. 1.

huius metropolis ciuitas eſt Chue. Quibus autem doctoribus ad fidem venerint, minime compertum habeo, niſi quod in omnibus obſeruantiis ſuis Graecos magis, quam Latinos imitari videntur: nam Rucenum mare breui in Graeciam transmittit. Adamus Bremenſis: *adfirmant Dani, longitudinem huius ponti ſaepe a pluribus expertam, ſecundo flatu per menſem aliquos a Dania peruenisse in Oſtrogard Ruzziae.* Quod ex eo repetiit Eggehardus Vragienſis. (5) Sed haec Adamus etiam planius; (6) mare Balthicum in auſtrali littore accoli primum a Danis et populis aliis: *deinde*, inquit, *latiſſima Polonorum terra diffunditur, cuius terminum dicunt in Ruzia regnum connecti: haec* (Ruſſia) *eſt vltima et maxima Vinulorum* (hoc eſt Slauorum) *prouincia, quae et finem illius facit ſinus.* Finem ſinus dicit ad auſtrum. Nam, vt diximus antea, Balthicum mare ab Adamo in arctum contrahitur ſub oriente, tamquam ſola littora ſeptemtrionalia et auſtralia ſint. Et meridionalia littora inde a Dania vsque ad ſinum Fennicum ponuntur, dum in ſeptemtrionalibus ait, *primos eſſe Nordmannos*, (Noruagos) *Sconiam deinde, poſtea longis terrarum ſpatiis regnare Sueones vsque ad terram foeminarum*: (Amazonum ad Caucaſum montem) *ſupra foeminas*, inquit, *Vilzi, Mirri, Lumi, Scuti et Turcae habitare feruntur, vsque ad Ruzziam, in qua denuo finem habet ille ſinus.* Turcas ſupra Caucaſum, ſeu ad occidentem montis dicit ſeu Chazaros, ſeu Turcas quos in Hungaria coluiſſe acceperat. Scholiaſta vetus Adami: (7) *vsque hodie Turci, qui prope Ruzzos ſunt, ita viuunt.* De Scutis et Mirris iam ſupra diximus quod ſatis

(5) p. 283. (6) p. 58. (7) p. 59.

tis eſt. *Vilzi* Lithuana lingua *Lupi*, λυκάνθρωποι Herodoti et *Lami* praeſtigiatores, fabulae veteres de Neuris, et nouae de Fennis: quamquam non ſum ignarus Vilzos nomine ad Oderam egiſſe: tamen illi non ſunt Vilzi, quos hoc loco Adamus Bremenſis citat. Itaque cum alibi ſcribit Adamus, (8) *Olaum, Nordmannorum regem et martyrem, omnibus ſeptemtrionalis oceani* (Baltici) *populis Sueonum, Gothorum, Semborum, Danorum, atque Slauorum aeterno cultu honorari*, vides Slauos dicere non modo in Pomerania et Megalopolitano agro ſed in primis Ruſſos ad hoc litus. Incerti auctoris Chronica Slauica: (9) *Sclauia minor a confratribus Boemis et Brutenis* (Prutenis) *diuerſis amnibus diuiditur: a Gothis et Danis mari ſeiungitur: baec gens eſt robuſtiſſima et animoſa, licet ſit frontoſa et thoroſa: piſcatura et agricultura delectatur eſtque magis pia Slauis ſuperioribus* (in Pomerania et agro Megalopolitano) *maxime quia cum Germanis conſortia et admixtionem habet. Mare Balthicum ad litus auſtrale habet Slauornm nationes: primo ad orientem Ruthos ſiue Ruthenos de Rutzen, Polonos atque Prutenos, ab auſtro Bohemos.* Annaliſta Saxo: (10) *Semland prouincia, quam poſſident Pruci: iter eiusmodi eſt: Hammaburch vel ab Albia flumine ſeptimo die peruenias ad Vimnae ciuitatem per terram: nam per mare nauem ingrederis ad Sliaſuig vel Aldinburch, vt peruenias Vimnae ciuitatem, ab ipſa vrbe vela tendens, XIII. die adſcendens in Oſtrogard Ruzziae, cuius metropolis eſt Chiue aemula ſceptri CPlitani, quae eſt clariſſimum decus Graeciae.* Accedit Saxo Grammaticus, qui paſſim et claſſes Ruſſicas et bella cum

(8) p. 28. (9) p. 189. (10.) p. 339.

Ruſſis mari geſta refert, non alia cauſſa, quam quod eius aetate Ruſſi littus hoc Balticum tenuerunt. Et tametſi Helmoldus, Eggehardus, Incertus Chronici Slauici auctor Adamo Bremenſi ſunt vſi, tamen etiam ſua quaedam non ſane abſurda admiſcent, ex quibus apparet, haud admodum aliter poſt Adamum fuiſſe, quam fuere ante eum. Eſt autem *Oſtrogardia*, ſi vim vocis explices, *orientale regnum*, ſiue regio, vt *Mykligard*, magnum regnum ſiue CPlitanum imperium, *Chunigard* Hunnorum regnum. Et vetus quidem nomen adeo, vt Mithridati notum fuerit: *Mithridates*, vt ait Plinius, (1) in Germaniae littoribus eſſe inſulam *vocarique eam Oſerictam, cedri genere ſyluoſam: inde defluere in petras* ſuccinum. *Oſericta* Trutonice *orientale regnum*, vt *Aeſtii* Orientales. Sic Snorroni Eſthoni *Eyſtur* et *Auſtur*. Eſt igitur Oſtrogardia praecipue et proprie Eſthonia, quae cum in Ruſſorum poteſtate eſſet, eo et Ruſſia dicta eſt a Danis aliisque; vt Oſtrogardiae nomen omnibus deinceps ad orientem regionibus Ruſſicae ditionis communicatum fuit. Immo latius patuit, vt totius habitabilis ad orientem orbis nomen eſſet, vt cum *Auſtan* dicunt *ab oriente* et *auſtr* in orientem. Inſcriptio rupis Staekenſis: *Iskirun filia Hardir incidi fecit runas ſibi ipſi (hun wil auſtr Jara) in orientem ipſa proficiſci vult auk vt til Iurſala, atque etiam Hieroſolyma.* Neque *Aſgard* aliud mihi videtur, quam *orientale regnum*, ipſique *Aſae*, orientales. Luculentum vero teſtimonium Snorronis (2) extat, Eſthones iam Suendoſtlauo et Valdemaro regibus, tributum pependiſſe, de quo teſtimonio in Varagis dixi copioſius. Carelia item ſub

(1) l. XXXVII. c, 2. (2) t. 1. p. 197.

ſub Valdimaro fuit et Ingigerdi Iaroslai ſponſae data eſt morgengauiae loco. Et de Fennia Ruſſis ſubiecta Heruorar ſaga (3) teſtata eſt: ad quem locum Olaus Varelius: *notetur hic Vinlandiam vel Venden ad regem Ruſſiae pertinuiſſe.* Sed omni in ſeptemtrionali hiſtoria nihil eſt frequentius et celebrius, quam *Holmgard* et *Gardarik.* Torf. p. 1. p. 165. Metropolis Holmgardus regiae ſedes frequens aduenarum concurſu. Eſt et magna prouincia, forte vt ille ab vrbe Holmgardo. Olaus Verelius: (4) *Garder idem eſt quod burg, caſtellum, vrbs Siſari regis Myklagard, vrbs magna, Byzantium vel Conſtantinopolis.* Gard *Anagard* in codice argenteo, aula regum Marc. 15. 16. In *Myklagardi* nomine Olaus Vormius vehementer aberrauit a vero, cum in Monumentis Danicis explicaret Megalopolitanam regionem Germaniae. Id emendauit deinde et *Gard*, vtique recte: *antiquitus vrbem arcem aut regionem ſignificabat.* Neque enim *Oſtrogard* orientalis vrbs, ſed regio eſt, *Auſturland* vt alias Snorro. Tatiani interpres Francicus *Oſtarlant* Matt. VIII. 5. Otfridus in praef. ad Ludouicum R. *Oſtarriche*, regnum orientale Francorum, Oſericta Sic in codice argenteo (6) *thiudangard regnum*, quaſi *Thiudans (regis) regio.* Et (7) *midiungard, media regis, ſiue orbis terrarum.* Et Tatianus: (8) *ſunta mittiligartes, peccata mundi.* Propria in voce ſignificatio fuit a finibus, quibus ſpatium, ſeu paruum, ſeu magnum, circumſcriptum fuit. Vnde *gardur* in Runicis Olai Vormii et *agger* et *praedium.* Quare *Gardarikia* eſt tamquam *regionis regnum.* Et ſine adiecto *rik* occurrit: vt

(3) c. 13. (4) ad Gothrici et Rolfi ſagam p. 97. (5) in Additamentis ad Monumenta Ruſſia p. 8. (6) Matt. VI. 13. (7) Lucae II. 1. (8) XVI. 1.

vt Oddus monachus in Olai Tryguonidis vita dixit: (9) *En a hinu naeſta ſumri for han i Garda auſtr, oc var i Aldaeigiuborg aein vetr. Proxima aeſtate in Garda orientem* (ſeu *Ruſſiam ad orientem*) *profectus, Aldaeigiuburgi vnum annum fuit.* Halfradus Vandrada apud Snorronem: (10) *Auzur i Gardom, Oriens et Gardia.* Ex his, et multis aliis, apparet totum regnum Ruſſicum inde a finibus Sueciae vsque ad extremos ad Auſtrum et Eurum, dictam eſſe *Gardarikiam.* Et eodem modo multa loca extant, in quibus *Holmgard* iisdem regionum ſpatiis vocabatur. Nolo loca hic aggerere, cum paſſim noſtris in diſſertationibus occurrant. Eſt autem ſatis notum, *Holm* inſulam dici, et eſſe *Holmgard*, *inſularum regionem. Holmur* in Runicis Vormii etiam *ſpatium, in quo pugiles dimicabant: Holmganga, ſingulare certamen.* Regio arctis finibus tamquam mari circumſcripta, intra quam pugiles ſe continerent, non minus eleganter *inſula* dicta eſt, quam a Romanis tota area domus. Olaus Verelius (1) *In S. Olafs ſogu vocatur metropolis ipſa Holmgard, eique ſubiecta ditio Gard.* Niſi Verelius aliquam aliam S. Olai ſagam in animo habuit, in Snorronis Sturlaei *Olafs Sogu* nihil eiusmodi inuenio. Vis vocis Holmgard effecit, vt ex Suecis nonnulli eam potiſſimum regionem ſic vocatam cenſerent, quae a Carelia et Finnia Orientali continetur. In qua ſententia multum veri continetur, quod omnis iſta regio ita lacubus et paludibus eſt intercepta, vt tota ſit inſularis. Credo tamen etiam Eyſthlandiam cenſitam fuiſſe in hac Holmgardia propria, tum quod eam quoque inſulam

(9) p. 15. (10) t. 1. p. 218. (1) in notis ad Gothici ſagam p. 96. (2) V. Veteris Geographiae tabulam praefixam.

ſilam dixere veteres, tum quod idem, qui in Carelia et Finnia, populus eam tenuit. Reliquum quod erat, Gardarikia dicta fuit: at nomina iſta plerumque confundi inter ſe et communicari video.

Denique Ruſſiae iſtis temporibus etiam Graeciae nomen eſt inditum. Proferam teſtimonia. Adamus Bremenſis: (10) *Ex Sliaswig naues emitti ſolent in Slauaniam, vel in Suediam vel ad Semland et vsque in Graeciam.* Diſertius ille alibi: (1) *nam ſi per mare ingrederis, ab Sliaswig vel Aldenburg, vt peruenias Iuminem* (Vinnetam ſeu Iulinum) *ab ipſa vrbe vela tendens XLIII. die aſcendes in Oſtragard Ruſſiae, cuius metropolis ciuitas eſt Chiue, aemula ſceptri CPplitani, clariſſimum decus Graeciae.* Iterum alio loco: (2) *Aſſerunt etiam periti locorum a Sueonia terreſtri via vsque in Graeciam permeaſſe: ſed barbarae gentes, quae in medio ſunt, hoc iter impediunt, propterea nauibus tentatur periculum.* Cum inſulas recenſet, *Holmus celeberrimus Daniae portus et fida ſtatio nauium, quae a barbaris in Graeciam dirigi ſolent*, hoc eſt, in Gardarikiam. Helmoldus ipſo in principio: *ſinus huius maris ab occidentali oceano orientem verſus porrigitur, appellatus ideo Balticus, eo, quod in modum Balthei longo tractu per Scythicas regiones tendatur vsque in Graeciam.* Et hoc vero iam ab eo errore, quem ſaepe caſtigaui, cum crederent, hunc ſinum Finnicum ad Caucaſum extendi, inde iam Maeotin miſceri et Caſpium mare et Pontum, vt in Graeciam vsque nauigari poſſet. Paullo poſt Helmoldus *Rucenum mare* (Eſthonicum) *breui* (Fennico ſinu) *in Graeciam*

(10) de ſitu Daniae p. 36. Chronographus Saxo p. 162. (1) in H. E. p. 19. (2) p. 58.

ciam transmittit. Auctor hiſtoriae Sclauonicae: (3) *Rutzenum mare breue, id eſt brachium in Graeciam mittit.* Ericus rex in hiſtoria Daniae, (4) de Frothone: *is ſubiugauit Sueciam, Britanniam, Hiberniam, Scotiam, Noruegiam, Saxoniam, Vngariam, et omnia orientis vsque ad Graeciam.* Graeciam dicit, quam Saxo Grammaticus eodem in Frothone Ruſſiam. Vidit iam Henricus Bangertus ad Helmoldum (5) rationemque addit, quod Ruſſi non modo Graecis litteris vterentur, ſed quod etiam Graecae religioni eſſent addicti. Verum, quod in re eſt, Ruſſiae nomen Graeciae inditum fuiſſe, tenuit, ſed ex Helmoldi loco minime commodo: eſt enim in eo vt dixi ſupra alius error ſitus. Quae autem de Taurica cherrhoneſo addit Bangertus et de Trapezuntio imperio, ea multis et maximis erroribus contexta, foeda ſupra modum ſunt. De religione item ſenſiſſe videtur Helmoldus, cum quem ſupra poſui loco ſubiungit alterum: *diu eſt, ex quo Ruzia credidit: huius metropolis ciuitas eſt Chue* (Kiouia:) *quibus autem doctoribus ad fidem venerint, minime compertum habeo, niſi quod in omnibus obſeruantiis ſuis Graecos magis, quam Latinos imitari videntur.* Attamen vetuſtior error eſt, Ruſſiam Graeciae nomine appellantium, quam chriſtiana religio ingreſſa eſt. Nam Olaus Tryguonides, cum ex Gardarikia ſeu Ruſſia rediiſſet, *Gerſcor*, *Graecum* ſe eſſe dixit, teſte Snorrone Sturlaeo. (6) Ex quo deinde alii fabulam de Olai CPlitana profectione et Hieroſolymitana commenti ſunt, quam Snorro ignorauit. Et fuit quidem iam tum, cum in Ruſſia Olaus egit, aliquod chriſtianae religionis ſtudium in aula, attamen tam tenuia fuere illa ſemina,

(3). p. 189. (4) p. 264. (5) p. 3. (6) t. 1. p. 236.

mina, vt inde Ruſſos dictos fuiſſe Graecos, veroſimile non ſit. Graecas autem litteras tum quidem habuere nullas. Quare malim confiteri, me huiusce originem erroris non videre.

Iam etiam atque etiam conſiderare velim, quando in monumentis Suionicis et Noruagicis itinera Scandianorum in Graeciam celebrata ſunt, eademne in multis ſit Ruſſia. Sane *Oſteruigi* (7) cum de nauigatione loquuntur, nullum aliud iter eſſe potuit, quam in Ruſſiam littoralem, vt *Vueſteruegin* dixerunt nauigationes ouidentem verſus, atque inde in Angliam, Hiſpaniam, Graeciam. Ioannes Peringskioldus (8) vt ex illis difficultatibus ſeſe expediret oſtenderetque ſuos ciues etiam orientali via nauibus petiiſſe Graeciam et Hieroſolyma, Duina aduerſo ſeu quo alio flumine deducit in Gardarikiam, inde iubet naues ſubductas humeris portare in Borysthenem. Quind quaeris? nihil deinceps nauigantibus impedimento eſt. At illa nauium portatio me non delectat. Scio Conſtantinum Porphyrogennetam tradere, Ruſſos ad cataractas exſcenſione facta lintres ſuos portaſſe: at breuis illa via fuit, contra haec a Duna ad Borysthenem nauigabilem multo longior. Et maiores fuere Septemtrionales naues, quam vt vel portarentur, vel Borysthene fluuio nauigarent. Quare multo expeditior via fuit, cum Ruſſiae portus nauibus peterent, inde pedibus Borysthenem et Smolenscum nautisque, et lintribus Sclauonicis in Pontum veherentur. Non enim nego ſaepe petiiſſe CPplin Scandinauos ex eo praeſertim tempore, cum ſtipendia mereri coeperunt: et multos lapi-

Eee 2 des

(7) Snorro t. I. p. 99. (8) In vita Theodorici regis p. 454.

des teſtimonio eſſe concedo. At lapides etiam Graecum nomen Ruſſiae vindicare videntur.

Inſcriptio apud Peringskioldum: *Aſur* (auſtr i Gricum *in Oſtrogardia in Graecia educabatur.* Iſthic Graecia eadem, quae *Auſtr.* Alio in lapide: *Aſgut Visbir vk Vſtr. Aogutus belli dux in Oſtrogardia* Et: *Thurgillus et Sturbiornus mortui* (i Auſtr riki) *in Oſtrogardia.* Alius cippus: *Vlaſo abiit* (Auſtarla) *in orientem ſeu Oſtrogardiam et fortiter inuadendo vaſtauit.* Vides ſane Ruſſiam dici. Peringskioldus itinerum in Graeciam teſtimonio adfert lapidem.

Thiſum merki iru gar iſtir ſuni Iggur
Eon kam theirra at arſi, in their Brythr
Kamu hana at erſi, Giadar Bridr thir
to i Girikium

Quae quidem ita conuertit Latine: *Haec monumenta poſita ſunt in memoriam filiorum Igguri, quorum haeres factus eſt Ion* (*rex Graeciae*) *ſed illorum fratres acceperunt illorum poſſeſſiones in hoc regno relictas: Giaderi fratres illi obierunt apud Graecos.* Non video, qui hoc in lapide *Ion* Peringskioldo *rex Graeciae* ſit viſus. Dudum antea Ioniae nomen in Graecia obliteratum fuit, quando, Gothi res egerunt, tametſi concedere velim Peringskioldo Gothi adeo veteris iſthuc in Suionia monumentum fuiſſe. Immo Ion nomen hominis Scandinaui fuit, frequens adeo apud Snorronem et in Torfaei Orcadibus, vt me ſuppudeat exemplum proſerre. Nec minus me alio in lapide Theſſalia offendit, vbi vir nobiliſſimus ſic legit: *Iurunter fadur ſin Tiſalſur* et explicat: *Iurunmunto Theſſaliae luſtratori.* Θετταλικόν τι σόφισμα. Quae malum Theſſalia? nempe

etiam

etiam iſthuc nomen fere obliteratum erat, cum Gothi res egerunt, quamquam nullum iſtorum monumentorum ita vetus iudico, licet me vel lapidibus aliquis petat, vt Matthaeo Praetorio, populari meo, minatus eſt Peringskioldus. Malim ipſe lapis eſſe, quam talia mihi perſuaderi. Nihil detrahitur nobiliſſimae genti: ſatis verae gloriae habet, nihil opus eſt emendicatis coloribus. Si quis tamen iſthuc *Tiſalſur* vrgeat, non *Theſſalicum nauitam*, ſed quomodocunque et vel *Texelanum* ſiue Belgicum explicuero.

Sed redeo ad Ruſſos, quos iterum alio loco Graecos dixit Adamus: (9) *In Oddorae oſtio, qua Scythicas alluit paludes* (Balthicum mare) *nobiliſſima ciuitas Iulinum, celeberrimum barbaris et Graecis, qui in circuitu praeſtant ſtationem: eſt ſane maxima omnium, quas Europa claudit ciuitatum, quam incolunt Slaui cum aliis gentibus Graecis et barbaris.* Helmodus haec ita dilucidius explicat: (10) *In Odorae oſtio, qua Balticum alluit pelagus, quondam fuit nobiliſſima ciuitas Vinneta, praeſtans celeberrimam ſtationem barbaris et Graecis, qui ſunt in circuitu: fuit ſane maxima omnium, quas Europa claudit ciuitatum, quam incolunt Slaui cum aliis gentibus permixtis Graecis et barbaris.* Eggehardus Vragienſis (1) cum ex Adamo Bremenſi ſua verba repetit, ſcribit *Vimne*: et credo ita fuiſſe Eggehardi et Helmoldi in codicibus vt nunc alibi apud Adamum (2) *Iuminem* et *Iumnem* ex quo factum *Iulinum* puto. Qui hic Graeci in circuitu maris Balthici, ſi Ruſſi non ſint? Nimirum Ruſſi non modo merces ſuas orientales ad Eſthonicos mercatus conuehe-

(9) H. E. p. 19. (10) l. 1. c. 7. (1) p. 339. (2) p. 19.

uehebant, ſed etiam Balthico mari deuecti alios adiere portus. Et cum Eſthlandi quoque piraticam exercuere Snorrone Sturlaeo teſte: (3) Ruſſos, quorum illi portus cum vniuerſa Eſthlandia erant, cur abſtinuiſſe a nauigationibus putabimus, in tanto mercaturae ſtudio? Suedica quoque monumenta teſtantur, Ruſſos late circa Melerum lacum praedas egiſſe et ad *Stockſund* trabibus ferrea catena deuinctis non fuiſſe retardatos, ea cauſſa Birgerum Iarlum regni gubernatorem caſtellum illo in freto communiuiſſe, e quo denique Holmia vrbs ſeſe extulit. (4) In Eſthlandia autem quotannis celebres mercatus inſtituti fuere. Veniebant eo frequentes ex Noruagia aliisque regionibus poſt ver, autumno recedebant mercibus diuenditis et cöemtis. Teſtem habeo Snorronem Sturlaeum. (5) Et vendebantur eodem auctore, tum mancipia, tum aliae merces, in quibus praecipue pelles animantium fuiſſe intelligo, quod Snorro Leifurum in Vinlandia ſeu America, quam primi omnium Europaeorum adiere Noruagi, a barbaris cupide collegiſſe ſcribit maximasque ex ea re collegiſſe diuitias. De pellium mercatura Pruſſica earumque in Germania pretio, notus eſt locus Adami Bremenſis. (6) Multi in eo mirantur, quid id ſit, quod tantam auri copiam in Curonia fuiſſe praedicat: (7) neque ergo me planius explicare poſſe confido, niſi e mercaturis Graecis et orientalibus, tum deinde e religione, cuius cauſſa proximis ex prouinciis et regionibus confluxere populi ſuis cum muneribus. Ob mercaturam his in littoribus celebris eſt Biornus, Haraldi Pulchricomi filius, qui, cum Veſtfoldiae

(3) t. 1. p. 196. (4) Olaus Verelius in Heruorar ſagu p. 79. (5) t. 1. p. 274. (6) De ſitu Daniae p. 59. (7) p. 58.

diae praefectus eſſet, mercatus adeo fouit Vikiae in portubus, adeo ſuis nauibus longinquas regiones frequentauit, vt ex eo nomen *Kaupmann* (*Mercator*) gereret. (8) Illis ipſis temporibus, Haukus miſſus eſt in Holmgard, quam Thormodus Torfaeus Ruſſiam interpretatur, *vt res quasdam pretioſas et Noruegicis in terris raras coemeret.* (9) Ibi ille in taberna Ruſſica reperit *togam redimitam auro*, quam cum emeret, regis Suediae legatus item ambiret, multa deinceps rixa fuit. Scio codicem Flateyenſem e quo Torfaeus haec produxit, ſubleſtae fidei eſſe: cum rem ſic geſtam non plane aſſeuerauerim, quando Tarfaeus ipſe dubitat, tamen mercaturae Holmgardienſis veterem memoriam, non ſane fictam, commento occaſionem praebuiſſe video.

Atque vt hoc loco de Ruſſicis mercaturis dicam, is qui Ioannis Baſilidis Czaris aetate librum graduum (Stepennaiam Knigam) viſſu Macarii metropolitae compoſuit, incredibilia ſcripſit de Ruſſorum veteri barbarie. Ita plerumque ſcriptores, cum attingunt res ante rem publicam aliquam conſtitutam geſtas, vt ſe quaſi ob interceptam memoriam vlciſcantur, miram foeditatem gentium praedicant, veluti belluarum, non hominum. In quo aequitatis noſtrae eſt, eorum iudicio non moueri. Conſtantinus Porphyrogenneta (10) ſuis temporibus neque boues, neque oues, neque aſinos in Ruſſia fuiſſe ſcribit, quod aeque eſt incredibile. Cum autem refert, Ruſſos a Pazinacitis has res emiſſe, atque ex eo vitam egiſſe commodius, id quidem teſtimonio eſt, mercaturas pecuarias eſſe exercitas,

(8) Snorro p. 115. (9) Thormodus Torfaeus in H. N. parte II. p. 68. (10) de A. I. p. 55. 56.

tas, non tamen inopiam exſtitiſſe, vt Imperator iudicauit. Proficiſcebantur Ruſſi ſecundo Danapri, Kiouiaeque conueniebant in μονοξύλοις ſeu lintribus. Inde ait Conſtantinus in Chazariam, Bulgariam, et quod maxime mireris, in Syriam vsque nauigabant. (1) In Chazariam iter eorum erat ad traiectum Crarii. Nam ea via Imperator ſcribit (2) Cherſoneſitas quoque profectos eſſe in Ruſſiam mercatus cauſſa. Quod quidem tanto magis mirum eſt, quando illis vno ex trunco lintribus ſunt vſi. Iucundum autem eſt, e Conſtantino Imp. cognoſcere, (3) quemadmodum e Pripelio Crivizeni, et Lenzenini, Drewlianique in Danaprin lintres deuexerint Kiouiam et vendiderint, vt vetuſtos conſciderint in remos ſcalmos reliquaque arma naualia, vt ſub Iunium menſem Danapri nauigauerint, et quanta cum moleſtia ſuperauerint cataractas. Nam ad Vitepskium, tota mercatorum claſſe collecta, cataractas petebant. Ad primam cataractam faciebant exſcenſionem mercibus relictis in nauigiis: tum quidam in lintribus proram, alii puppim, alii latera contis regebant, alii fluuium ipſum ad ripam, qua vadum habebat, ingreſſi; humeris ſubleuabant lintres. In tertia cataracta, vbi ripa non habebat vadum, non modo ipſi homines egrediebantur, diſpoſitis per ripam excubiis, ſed etiam lintres ſubductos per ſex millia paſſuum portabant: alii ferebant merces, alii ducebant mancipia vinculis conſtricta, donec ſe committebant fluuio. In tam paruis lintribus, quas praeter mancipia, merces deuexerint, niſi pretioſas? in primis pelles murium ſilueſtrium et lutrarum, (4) quas, vt Cornelii

(1) ib. p. 113. (2) ib. p. 60. (3) p. 59. (4) Vide quae de his diſſeruit Hieronymus Magius in Miſcellaneis III. 7.

lii Taciti verbis vtar, (5) *exterior oceanus atque ignotum mare gignebat*, ſeu ex Scandinauia atque his ſeptemtrionalibus littoribus. Sidonius Apollinaris in panegyrico, quem Iulio Maioriano Caeſari dixit, cum copiam omnem mercaturae Romanae explicat:

Aurum Lydus, Arabs guttam, Panchaia myrrham,
Pontus Caſtorea, blattam Tyrus, aera Corinthus

Quo loco in mentem veniunt, quae de Byzantiis mercaturis Polybius (6) ſcripſit, cum Pontus, ſeu regiones ſupra Pontum multa ſerant mortalibus ad vitae commoditatem expetita, omnia illa Byzantios in poteſtate ſua habere, ſeruilium multitudinem corporum, ingentem copiam corii, mel, ceram, ſalſamenta (hoc ipſum noſtrum ἴκαρβ Italis Cauiar) recipere: contra dare oleum, et vini genera omnia: frumentum modo praebere barbaris, modo recipere. Nolo haec mercaturae Ponticae fata perſequi per omne aeuum: tam vetus eſt enim, quam ſunt coloniae Graecae. Inſigne autem eſt Dionis Chryſoſtomi teſtimonium, (7) Getas cum Olbiam cepiſſent et miſerabili adfeciſſent clade, eius deſiderium vrbis deinde impatientius tuliſſe ob mercaturae negatam copiam. Borysthenitae igitur reſtaurarunt vrbem, ἐθελόν των, ἐμοὶ δοκῆν, των Σκυθῶν, διὰ τὸ δεῖσθαι τῆς ἐμποϱίας, καὶ τοῦ κατάπλου τον Ελλήνων. ἐπαύσαντο γὰϱ εἰσπλέοντες ἀναςάτου τῆς πόλεως γενομένης. ἅτε οὐκ ἔχοντες ὁμοφώνους τοὺς ὑποδεχομένους. οὐδὲ αὐτῶν Σκυθῶν ἀξιούντων οὐδὲ ἐπιςαμένων ἐμποϱεῖν αὐτῶν κατασκευάσασθαι τον Ελληνικὸν τϱόπον, *volentibus, opinor, Scythis, quod indigerent mercatura et appulſu*

(5) de moribus Germanorum c. 17. (6) p. 425. (7) in Boryſthenitica p. 438. ed. Morelli.

Graecorum: non enim eam in regionem nauigabant vaſtata vrbe, cum non haberent, qui ſe ſuſciperent, ſui ſermonis homines, Scythae vero neque vellent, neque ſcirent more Graecorum mercatum exercere. Redeo ad haec tempora, quibus quae praebita ſint CPli, quae cara gentibus Septemtrionalibus fuerint, Imperator item declarat (8) Βλάτια, πράνδια, χαρέρια, σήμεντα, πέπερι, δερμάτια ἀληθινὰ, πάρδικα, merces omnes, vt vides, Indicae. Et blatta quidem et oxyblatta, vt tum erat mos Graecis vetera nomina nouis rebus imponere, purpura et veſtes ſericae rubrae erant, (9) quas CPlitani quondam a Seribus et Ephthalitis accepere, qui vt Indo flumini vicini, ita a Caſpio mari haud longe reiecti fuerunt. Res non huius loci eſt et vel e Procopio Caeſarienſi et Theophane Byzantio nota. Ennodius Ticinenſis panegyrico in Theodoricum regem: (10) *exhibete, Seres, indumenta pretioſo murice, quae fucatis et non vno aheno bibentia nobilitatem prorogate.* Πράνδια *brandea* ſeu *prandea*, vt Anſelmus Bandurius iam explicuit, faſciarum, taeniarum, et cingulorum genera: χαρέρια, vt idem ex Zoſimo Panopolita, pannus quidam rarior: σήματα *ſegmenta* monilium ſeu purpurae genus: πέπερι, *piper.* Δερμάτια ἀληθινὰ πάρδικα, *pelles Parthicae rubrae*: nam et Valeſius ad Ammianum Marcellinum recte emendauit παρθικὰ, qui (1) ſecundum Salmaſium (2) de his pellibus prolixe egit. Errat Salmaſius, cum omnes illas pelles Parthicas pardorum et tigridum crudas fuiſſe credidit: immo

(8) p. (9) Vide Petrum Poſſinum in Gloſſario ad Annam Comnenam voce Βλάττια. (10) p. ed. Peringsk. (1) Ad Ammianum p. 232. 296. (2) ad Trebellii Pollionis Claudium p. 407. 408. 493

mo pelles fuere animantium ſine pilis elaboratae in coria et tinctae, quales nunc vocabulo Turcico nuncupamus سختيان *Saſian.* Aurum quoque et argentum aliaque praetioſa Ruſſos pro tributo exegiſſe, cum Ruſſica monumenta tradunt, tum Conſtantinus Imperator non diſſimulat. Quare, inquit, (3) ἴσθι, ὅτι τοῖς βορείοις ἅπασι γένεσι φύσις ὥσπερ καθέστηκεν, τό ἐν χρήμασι λίχνον καὶ ἄπληστον καὶ μηδέποτε κορεννύμενον, ὅθεν πάντα ἐπιζητεῖ καὶ πάντων ἐφίεται, καὶ οὐκ ἔχει τὰς ἐπιθυμίας ὅρῳ περιγραφομένας, ἀλλ' ἀεὶ τοῦ πλείονος ἐπιθυμεῖ καὶ ἀντὶ μικρᾶς ὠφελείας μεγάλα κέρδη προσπορίζεσθαι βούλεται. *Scito, omnibus borealibus populis qualis ſit natura: pecuniarum infinita eſt cupiditas et numquam ſatiabilis: quare omnia quaerunt, omnia expetunt, neque cupiditates termino aliquo circumſcriptas habent, ſed plura ſemper concupiſcunt et pro paruo officio magnam mercedem ſibi tribui volunt.* Leges CPl. de mercat. De Biarmis et auro ibi. Hae mercaturae Ruſſicae cum CPlitanis: alia, a Chazaris, qui in Ruſſiam commeabant, opportunitas; qui cum Turcae eſſent, commercia ſua exercebant cum orientalibus Turcis, tanta in commoditate ſitus, vt Scythae etiam olim cum plauſtris ſuis in Indiam commearint. (4) Quare non abſurde quidam, quos ſupra produxi teſtimonio, Ruſſiam omnibus bonis affluentem praedicarunt.

Reliquum eſt, ut, quod ad Geographiam ante A. C. 948. pertinet, ex Ruſſicis monumentis explicemus. Roſtow vrbs a Rurico rege fratri data eſt regunda A. C. 862. et eodem anno aliis ducibus Bielozero et Poltesk.

(3) p. 63. (4) Herodotus l. IV. c. 28.

Bieloczero vrbs eodem nomine ad lacum *Bielözero* ſeu *Album Lacum*. Ea in regione populum веcь *Ves* collocauit Hiſtoriographus Ruthenus. *Poltesk vrbs*, vt ille ait, *a Krivizis condita*. Peltisca Saxonis Grammatici p. 21. Vbi ſita fuerit, quaeſtio eſt perdifficilis explicatu. Mihi videtur haud longe a Duna flumine abfuiſſe. Nam ad A. C. 980. Hiſtoriographus Ruthenus tradit, Roguolodum Knias ſeu Principem in Полотcкo *Polotzko* fuiſſe atque tenuiſſe ſub ditione ſua tam ПолетескЪ *Poletesk* quam Муры *Muru* in *Turoua*. Peltesſcia regio auctori vitae Eymundi fratris Hraereci Caeci. Plotzko et Turoua vrbes haud longe inter ſe diſtant ad Dunam. Erit igitur hic *Poltesk* ſtatuenda et *Muru*. Neque enim *Muru* videtur eſſe, ſeu *Meria* regio, ſeu *Murom*. Chronographus Ruthenus: *ad Bieloczero ſunt* веcь *Ves ad lacum Roſtouienſem et ad* Плещико езеро *Pleſchiko lacum*, *habitant* Меря *Meria*: *ad Occam*, *vbi in Volgam exoneratur*, *habitant Muromi*, *qui ſingularem linguam habent*, *vt et* Мещера, Мордва, Черемиса, *Meſchera*, *Mordua*, *Gieremiſa ſeu Scheremiſa*. Ex hoc loco tenemus Muromi, Meſcherae, Morduae, Scheremiſiae ſitum. Quem autem lacum Pleſchiko dicat, non video, niſi ſi Pleſcouienſis ſit, ad quem fuerint Meria, alii ab illis qui ad Roſtouiam, eiusdem tamen originis. Iam a Meriae nomine Μυϱυ nimis diſcrepat, Muroma vero longius disſita fuit, quam vt mihi perſuadeam Rognuoldum tam latam regionem tenuiſſe et eo tractu, qui Nouogrodium a Kiouia penitus excluſerit. Poloteſci autem incolae Chronographo, vt mihi videtur, Пологане *Pologiane* vocantur: *populus*, inquit *Pologiani* ad Polotam fluuium, qui in Duinam

nam incidit, conſedit. Iidem qui Polonis Polouczii. De his etiam Hiſtoriographus Polouczii *patrum ſuorum ſanguinem profundebant, eoque gloriabantur, comedebantque cadauera, aliaque impura.* In parentum decrepitorum caede ſimilis feritas (fortitudinem tamen ipſi cenſebant) apud Pruſſos et Lithuanos illis temporibus fuit. Ceterum de Polouciis Coialouitius ex Oſſoſtouicio, qui ſua vt ex veteri fama ita ex Ruſſicis monumentis repetiit, tenui eruditione deturpata magis, quam ornata: *Poloucios Hungari ab Hugro fluuio Pannoniam verſus tendentes, ad Tanaim fuderunt: erant Poloucii gens eiusdem cum Pruſſis, Lituanis, ac Lotauis originis: argumentum eius rei eſt, ex reliquiis quas ad Phinoniae fluuium Chorelam* (in Carelia) *reſiduas intra Moſchi imperium, communi cum Lituanis ſermone proximo adhuc ſeculo vſas eſſe, qui viderant, teſtantur.* Refert cladem Poluciorum ad A. C. 383. At nulla tanti interualli memoria extare apud eum populum potuit. Quare alterius ſeculi res fuerit, cum multae impreſſiones in Pannoniam fuere earum gentium, quas omnes vno nomine maiores noſtri vocauere Hungaros. Tum alterum, quod e fama compertum eſſe potuiſſe Coialouitio concedo, Polucios a Polota pulſos in Careliam denique ſe recepiſſe, cum verum ſit, tamen in eo aliquid erroris reſidet, quod eos Lithuanice locutos tradit. Eſthlandici ſeu Fennici corporis fuiſſe apparet: cuius populi ſermo a Lithuanico multum diſcrepat, ita vero vt ignarum fallere poſſit, quo putet nihil inter vtramque linguam intereſſe. Cum ſupra ex Chronographo Morduam ad Occam poſui, venit in mentem auctorem Stepennaiae Knigae teſtari, Morduam et Scheremiſiam dic-

 tam

tam fuiſſe olim Сидерехъ *Siderech* et Morduam in primis Лопъ *Lop*, pro quo in Chronographo Rutheno eſt Либъ. Hic vero inter populos veteres etiam recenſet Ковгородцы, Сѣвера, бужаке, qui a Bog flumine deſcenderint dictique ſint Волыкане *Voluicane*. Bulgaria apud Snorronem Volgaria. Metropolita Caſanenſis ſe vocat hodie epiſcopum Bolgarenſem. Brennerus in ep. ad Ericum Benzel. p. 108. Tum ille, *Alienae gentes ſunt, tributariae Ruſſorum* Чюдь, Меря, Весъ, Ѣлецъ, Лисива, Зимерла, Корсема, Морова, Либъ, *quae nationes verſus ſeptemtrionem habent ſuas ſedes.* In his Ковгородцы, eſt quae Cabardah dicitur, Сѣвера, eſt Sieueria, бужаке, Budſchake alias Voluikane, a quibus adhuc nomen *Budſchacorum* et *Voluk* regionis manet· Septemtrionales Schudi et Meria diuerſi ſunt ab iis, qui in Eſthonia coluere.

Chronographus in Synopſi tradit, fratrem Rurici Sineum tenuiſſe Bieloczero, fratrem vero alterum Trewur Gobosſcenſem principatum. Contra ea Kniga Stepennaia: *Trouur Bieloczerum et Sineus Isborsk ſedem habuit.* Isborsk vrbs ad Iſſam fl., qui in Lacum incidit Iſſaborg. Ad eundem annum 862. Chronographus in Synopſi. *Goſtomyſt in loco dicto Volotoua ſepultus.* Kniga Stepennaia (5) locum videtur indicare: *Borysthenes e ſylua Wolokovskia oritur in prouincia Rzewski: ex eadem ſylua oritur et Duna et Volga: a Borysthene eſt* Волокъ *Volok* (*tranſitus ſiccus*) *vsque ad fluuium* Волота, *qui in lacum Ilmen incidit, a quo tranſitu ſylua* Волоковская *Volokowskaia vocatur.* Videtur igitur *Volotoua* fuiſſe ad *Volotam* fluuium. Eſt hodie fluuius *Voldai*, qui in *Mſta* fluuium

(4) Stepenna I. c. 23.

nium et inde in Ilmenum lacum deuehitur. Sed eſt etiam *Pala* fluuius et vrbs *Podlitoua*, quae alicui videri poſſunt *Volotae* et *Volotauae* vetera nomina.

Smolenſci vrbis nomen iam ad A. C. 879. occurrit, quam alias dixi Conſtantino Porphyrogennetae Μιλινίσκαν dici. Et Moſcuam quidem Chronographus in Synopſi ad A. C. 880. ab Olego duce conditam tradit, verum conſtat ſatis ex aliis multo recentiorem eſſe, annis fere quadringentis poſt conditam. Quare hac in tabula Moſciae locus non fuit. Ad A. C. 882. 883. Drewliani et Sieueriani tributarii Ruſſorum memorantur. Kniga Stepennaia: *Quae fuerit Drewlianorum regio incertum eſt: alii putant, illam nunc partem eſſe ditionis Nouogrodenſis eam, quae* Деревская пятика *Dereuskaia patika vocatur: alii putant eſſe Sieueriam, vbi eſt Czernichow.* Chronographus: Древляне *quod in ſyluis habitarent, qui terram inter Dwinam et Pripelium tenebant.* Nimirum cum a ſyluis nomen habuere Drewliani, multi potuere ſic dici. At nos Dreulianorum ſedem e Conſtantino Porphyrogenneta ad fontes Bogi illis in ſyluis conſtituimus. Et hos eſſe, qui tum in monumentis celebrantur, tam ex Polonicis quam ex Ruſſicis rebus intelligi poteſt, etiam ſine Conſtantini teſtimonio. Sieueros Chronographus: *circa Veſnam Sein et Lulos flumina ponit*, iis fere regionibus, quibus nunc Sieueria eſt. Nam *Sem* fluuius in orientalibus Sieueriae finibus: itaque *Veszna* eſt, qui nunc Deszna.

Ad A. C. 884. Radimiczi tributarii commemorantur. Hiſtoriographus: *venere ex Polonia poſt Peczenigorum migrationem duo fratres Radim et Viatco. Radim cum ſua familia ad* ресжу *Rsutſchu fluuium conſedit, cuius ſtirps*

ſtirps Radimiczi dicti fuerunt. Viaitko autem cum ſuis ad Occam ſedes fixit, vnde Viatizi. Rsutſcha fluuius alibi quam in regione *Rzeczyza* non eſt quaerendus, vbi ad vrbem eodem cum regione nomine hodie eſt *Viedrzyck* fluuius. Et poteſt fieri vt latius coluerint vsque ad vrbem *Radomisl*, aut vt eo deinde commigrarint. Hiſtoriographus Ruthenus: *Radimczy Viaticzi et Sieueri in ſyluis habitant, impura multa comedunt, turpia coram parentibus loqui non erubescunt: nuptias nullas habebant, ſed in ludis conueniebant pueri et puellae et quislibet abducebat placentem: vxores duas et tres habere poterant: mortuos comburebant, eorum oſſa in vas paruum colligebant et in columnis in via reponebant: eandem conſuetudinem et Kriviczi et reliqui pagani illis in partibus habebant.* Chronographus in ſynopſi ad A. C. 984. *Vladimirus mouit contra Radimicxi genere Polonos, qui inde in Ruſſiam commigrarunt et in hodiernum vsque diem Ruſſis tributum ſoluunt.* Is eorum in regione Пицака *Piſchaka* fluuium poſuit. Viaticzi a Ruſſis ad Occam ponuntur. Kriuizos ex Conſtantino Porphyrogenneta ad Pripetium ſeu *Pripiecz* fluuium adſcripſi. Sed latius coluere teſte Chronographo: *populi ſunt in fontibus Volgae Borysthenis et Duinae, vbi nunc eſt Smolenſcium, eorum etiam aliqui in Sieueria habitant.* Et cum Lithuani Ruſſiam *Creuen Jemla* ab his Criuiczis, vt puto, appellant, ſequitur veterem hanc memoriam gentis potentiſſimae et vaſtiſſimae fuiſſe. A. 970. in exercitu contra Graecos ducti Кривиги, Гудѣ, Меране, Полаке, Севериане, Древлане, Радимиги, Батиги, Ховрати, Дулѣны: Тивиги. *Kriviczi, Giud, Merane, Polake, Seueriane, Drewlane, Kadvmiczi, Vatizci,*

ticzi, *Chourati*, *Duliuii*, *Tiuiczi*. Notos iam antea hic non attingam. *Polakē* ſunt *Poloni*. *Chourati* ſunt *Chrouati* ſeu *Chrobati*, quos etiam Graeci non modo Χρωβάτυς dixerunt, verum etiam Χορβάτυς. De *Dulievis* et *Tiuiczis* Hiſtoriographus: *Duliebi habitabant ad Bog fluuium, Luticzi et Tivinczi ad Danubium*. *Tiuinzi* qui *Tiuizi*, forte antea ad Tibiscum fluuium, qui in Danubium exoneratur. Et cum a Pazinacitis pulſi ſunt, videntur iuxta *Dulieuos* conſediſſe *Tiuiczi* et *Luticzi*. Quod quia non ſatis conſtat, praetermittenda haec nomina duxi.

In Igoris rebus memoria Plescouiae exſtat ad A. C. 903. Hodie Ruſſis *Pskow*, quaſi vrbs a *canibus* ſit dicta. Vetus tamen nomen Slauonicum *Pleskoua*: nam et apud Zonaram in Baſilio Bulgaroctono (6) et apud Cedrenum (7) πλισκοβα vrbs in Bulgaria fuit. Iam ad A. C. 907. occurrunt Czernichouia Conſtantino Imp. quoque commemorata et *Pereslaula* notae vrbes, et *Liubecz*. Eſt vrbs ad Duinae fontes *Lubicz*, deinde ad Borysthenem ſupra Kiouiam *Lubiecz*. Hanc puto illa in regione eſſe, in qua Vladimiri auus princeps fuit. Vocatur enim *Malko Liuleczenſis* Hiſtoriographo Ruthenus et filius quoque eius *Dobryna Malio*. Quod plane eſt ملك *Melec*, *regis* nomen, acceptum a Chazaris, quemadmodum reges ante Ruricum خاقان *Chakani* titulo Chazarico ſunt vſi. Quam ob cauſſam iſtos Liubeczenſes malo prope Chazaros conſtituere, vt commercium aliquod intercedere inter vtrumque populum potuerit, quam longiſſime a Chazaris remouere ad Duinam A. C. 912. Oleg in monte Щоковицо Schoiouizo an *Schokouizo* ſepultus. Eum montem opor-

(6) t. II. p. 224. (7) p. 704.

tet prope Kiouiam eſſe. Eodem anno Coroſtenum commemoratur a Chronographo in Synopſi Drewlianorum vrbs, *haud procul a Staraia Rus.* Igitur vrbs videtur eſſe quae nunc *Horasci* et *Chreſt* vocatur, corrupto nomine Coroſteni. Drewliani hi diuerſi ſunt ab ceteris Drewlianis ad Pripelium. Immo potius ſe ipſum feſellit: neque alii Drewliani fuere quibuscum Igor res gerens dolo periit, quam iſti ad Pripelium, quod ex ipſa rerum conſideratione mihi plane apparuit. Quare, cum Coreſtenum captum eſt ab Olga, iuſſi ſunt ciues tributum perſoluere Kiouienſibus et Vyſzegradenſibus. Nam, inquit hic ipſe Chronographus, *Vyszegrad Olgae vrbs erat.* Fuit igitur vicinior vrbs Kiouiae quam Nouogrodio A. C. 914. *Vgliczii* et eorum vrbs *Pereſieczen* memorantur ad Boryſthenem, infra Kiouiam. Fuit deinde *Vglicz* vrbs in hiſtoriis celebrata: verum ea ad Volgam in ducatu Roſtouienſi fuit, ſiue Vgliczorum colonia, ſeu quo alio caſu ſic dicta. Ad A. C. 965. Hiſtoriographus narrat, Olgam Kozaros viciſſe eorumque vrbem бѣлювежу *Bieluiuezu expugnaſſe.* Chronographus: бѣлобургъ *Bieloburg.* Vtrumque ſignificat *Albam Vrbem*, vt ex eo appareat, eſſe *Sarkel* Chazarorum, de quo oppido multis diximus ſupra. Addit Hiſtoriographus, victos *Iazykos* et *Kaſagos*: at Chronographus: Іасы, косаги, свапиги *Iaſu*, *Coſagi et Suatigi.* Caſacos ſolos agnoſco, quos tum oportet e Caucaſo digreſſos alicubi ad Volgam conſediſſe. A. C. 969. Chronographus tradit Iaropolcum in *Gorodiew* vrbe caeſum a Varagis. Vbi illa vrbs? tum Stepennaia Kniga ad eum annum Pereslauiam memorat, et Olegum principem in Деревѣхъ *Dereuiech* et vrbem eius вругай. Quid *Dereuich*?

Ad

Ad A. C. 971. et 977. pax cum Graecis inita dicitur вЪ Дерестра *in Dereſtra.* Haec Driſtra eſt in Bulgaria. A. C. 978. et 981. Vladimirus dicitur Polonis extorſiſſe *Peremysl et Czeruen et Camenſes* (Suzdal) ſubegiſſe. Nota hodie in Polonia nomina. A. C. 980. Chronographus: *Blud a Kiovia fugit in vrbem* R*odna ad oſtia* Росы *Roſu*, tum memorat *Lybedum* vrbem, vbi nunc eſt, inquit, предисловико et *Bereſtow*, *vbi pagus nunc eiusdem nominis.* Nihil eorum adhuc inueni. Tandem ad A. C. 983. memorantur *Iatwegi* victi a Vladimiro. Coialouitius eos Iatuingos (8) vocat et proxime Lithuanos ponit, in Podlachia: Cromerus (9) in Poleſia et Podlachia. Solomon Neugebauerus in Volynia, vbi Luccorinenſis eſt episcopatus.

(8) p. 5. 35. 120. (9) l. VIII. p. 547.

DE SCRIPTIS TANGVTICIS IN SIBIRIA REPERTIS COMMENTATIO

Gerardi Friderici Mülleri.

Fuerunt quidem inter eruditos variarum gentium, qui rerum orientalium ſtudioſi, literas Tanguticas in Europa memoriae prodiderunt, (1) ſed iſta vere pauca et ſubobſcura viſa, donec noſtra aetate quaedam eo charactere picta folia, ex Sibiria allata, in publicum comparuerint. Vulgus, vt bonarum rerum incurioſus eſſe ſolet, varios de loco, vbi iſta ſcripta inuenta ſint, rumores ſparſerat, ſed, qui rem attingeret, prope nullum. Ipſe Petrus Magnus immortalis gloriae Imperator ex Praefecto Sibiriae, qui ipſi haec folia obtulerat, nihil reſcire potuit luculentius, quam quod in auſtrali Sibiriae regione inter rudera alicuius aedificii reperta ſint. Additum fuit, at falſo, ac ſi locus non longe a mari Caſpio diſtaret, et quae ſunt aliae eiusdem generis nugae, eo tempore in publicum ſparſae. Sed non morabatur iſta ſapientiſſimus Imperator, ratus, locum, quoniam ſui aut confinis eſſet imperii, ſemper explorari poſſe, magis ſollicitus, quid ea ſcripta continerent. Ideo, qua erat in literas et artes cupiditate, nemine Petropoli inuento, qui ea interpretaretur,

(1) *Hydius* in Hiſtor. relig. vet. Perſar. Tab. XVIJ. pag. 521. ſqq. *Vitſius* Noord en Ooſt Tartary Ed. I. P. II. Tab. ad p. 144. Auctor *Mercurii Gallici* 1718. in deſcript. regni Boutan. p. 73.

retur, ampliſſimi noſtri Schumacheri miniſterio vſus, aliquot folia in exteras terras miſit, praecipue in Pariſienſem bonarum literarum academiam, inuitans eruditos, linguarum orientis gnaros, vt operam interpretandis iſtis conferrent. Vnius folii exemplum publice extat in actis eruditorum Lipſienſibus, (1) et ſpecimen eius in nouis literariis. (2) Quae cum viderint, qui rei diiudicandae eſſent pares, mox ſcripturam Tanguticam eſſe agnouerunt. Nempe ſunt hanc in rem epiſtolae *Maturini Veiſſierii La Croze* ad Io. Burcardum Menkenium (3) et *Theophili Sigefridi Bayeri* ad Io. Samuelem Strimeſium, (4) quibus vterque elementa linguae Tanguticae adiecit, a Gabriele quodam Mongolenſi tumultuarie ſcripta, a Bayero autem in ordinem redacta, et cum Lacroſio communicata. Deinde plura docuit idem celeberrimus *Bayerus* in epiſtola ad Io. B. Menkenium, quae ſupplementis actorum eruditorum (5) inſerta legitur.

Non incongruum, nec omnino alienum ab hoc loco videtur, quaedam notare, vbi viri celeberrimi, id quod in tanta rerum ambiguitate vitio illis verti nequaquam poteſt, de literatura Tangutica differentes, aliquantisper hallucinati ſunt. Sic *Lacroſius* Oiguraeas vel Iugurenſes litteras cum Tangutanis pro iisdem habuit, quas tamen nimium quantum a ſe inuicem differre *Guilielmus de Rubruquis* (6) teſtatur, qui certe non Tangutanas, ſed Mongolenſes, innuit, dum dicit: *Iugurenſes ſcribere deorſum, et multiplicare lineas a ſiniſtra ad dextram.* Quin et

 Arab-

(1) 1722. M. Iul. pag. 374. (2) 1722. Num. LI. pag. 498. (3) Acta eruditor. Lipſienſ. 1722. M. Aug. p. 414. (4) in Ephemeride Germanica: Hiſtoria eruditionis noſtri temporis. P. V. p. 385. ſqq. (5) Tom. IX. p. 20. (6) Itin. C. XXVII. et XXXIX.

Arabſiades a Bayero citatus, diſertis verbis ait, *ſcripturam Oiguraeam Mogolorum nomine celebrem eſſe.* Fallitur praeterea eruditiſſimus *Lacroſius*, qui Mongolicas literas ex Tangutanis ortas et leuiter detortas eſſe opinatus eſt. Ipſe enim intuitus ſtatim id refellit: maiorique veri ſpecie *Bayerus*, collega deſideratiſſimus, literarum Mongolicarum, quae et Manſchuricae ſunt, originem a Syriacis literis repetiit. (1) *Iuguraeae*, i. e. *peregrinae* Mongolenſibus iſtae literae principio dicebantur. Nam etiam hodienum illi omnes gentes peregrinas, cum quibus in lingua et cultu ipſis non conuenit, *Uigùr* vocant. Ideoque aſſentior Bayero, et omnino perſuaſum habeo, Mongolenſes hoc genus ſcripturae accepiſſe a ſacerdotibus Syris, Neſtorianae haereſi addictis, qui, euangelii limites promoturi, tempore Tſchingis-Chani, vel paullo ante, iſtas terras intrarunt. Hi, ſi qui alii, peregrini erant Mongolenſibus. Nulla autem, noſtra opinione, gens, quae Iugurenſium vel Oiguraeorum nomine ipſam ſe adpellauerit, vnquam extitit. Nam quantumuis ſcriptores aliquot Uigurenſium mentionem fecerint, ipſi tamen nonnulli indicarunt, et de reliquis ſubodorare facile eſt, hoc non proprium ipſis nomen fuiſſe, ſed vel propter res geſtas, vel ob diuerſum vitae genus, cultum et regimen illis inditum. Vnde etiam non iidem Uigurenſes in hiſtoriis allegantur, vt alio loco demonſtrabo luculentius. Taceam quae in eadem epiſtola a Lacroſio de presbytero Ioanne, illius regionis ante Tſchingis-Chanum principe, qui iisdem literis vſus ſit, maxime incerta proferuntur. Contra Bayerus

(1) Act. Erud. Lipſ. A. cIɔIɔccxxxi. M. Iul. p. 309. ſqq. et Comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. VI. p. 330.

rus in epiſtola priori, vocabulorum conuenientia deceptus, confundit Tangutanos cum populo a Sinis *Tan-yu* dicto. Conſtat enim ex Martinio, Cupleto et aliis, ſub nomine *Tan-yu* Sinas intelligere Tataros, ipſis occidentales dictos, quos nos Mongolenſes vocamus. Imo *Gerbillonus* (1) nomine *Tan-yu*, vel *Tſchen-yu*, vnum enim hoc idemque eſſe pronunciat, non integrum populum, ſed reges Tatarorum occidentalium, adpellatos eſſe contendit. Potius Tangutana ditio a Sinis *Tſan*, vel *Tſan-li* vocatur, vt ex commentariis Regiſi *Haldius* (2) obſeruat. Deinde Tangutum et Tibetum, quae a plerisqne ſcriptoribus, ſicque et a Bayero noſtro, ſeparantur, vnum idemque ſunt, cui praeter propriam cognitionem etiam *Haldium* (3) teſtem inuoco. Denique Bayerus dubius eſt, ſcriptura Tangutica a ſiniſtra ad dextram, an vero a dextra ad ſiniſtram, peragatur, memor verborum *Guilielmi de Rubruquis*: (4) *Populus Tebet*, inquientis, *ſcribit vt nos, et habet characteres ſimiles noſtris. Tangutani ſcribunt a dextra verſus ſiniſtram, ſicut Arabes, et multiplicant lineas aſcendendo.* Quae vt vt clare ſcripta, tamen nullam fidem merentur, cum iam ante monuerim, Tangutanos et Tibetenſes eosdem eſſe, et iam nobis ſatis ſit euictum, ſcripturam Tanguticam a ſiniſtra ad dextram procedere. Quis vero vnquam vel ſando audiuit, lineas aſcendendo multiplicari? Hoc enim, quam ſcriptionis naturae contrarium ſit, ſapiens quisque capit. Nolo iam de iis agere, quae a Bayero in vtraque epiſtola in exprimendis ductibus et valore literarum Tanguticarum errata ſunt. Haec enim ille pleraque

(1) *Haldius* Tom. IV. p. 40. Edit. Batau. in 4to. (2) ibid p. 572. (3) ibid. (4) Cap. XXXIX.

raque inſequentibus annis, hic Petropoli meliora edoctus, ex libro Meſſerſchmidiano ipſe emendauit. (1) Nolo etiam notare ſphalmata leuiora, dum v. g. vir celeberrimus in altera epiſtola voces aliquot Mongolicas, ac ſi Tanguticae eſſent, Tangutanis literis ſcripſit. Quisque aliquid humani patitur, et non mirum eſt, ſi nobis imponatur in linguis peregrinis, quarum nullam notitiam habemus. Id potius diſcutiendum eſſet, quod ad hiſtoriam literaturae Tanguticae neceſſario ſpectat, nimirum quod doctiſſimus Bayerus ſcripturam Tanguticam pro ſcriptura *Delbergiin* Arabſiadis habuerit, niſi propoſiti ratio ſuaderet, vt hoc argumentum alii tempori reſeruarem. Dicetis me iam ſatis procul a meta diſceſſiſſe. Igitur reuertar, vnde digreſſus ſum.

Inter haec Petropolin afferebantur Pariſiis vnius folii Tangutici non literarum modo pronunciatio, ſed etiam verſio literalis et paraphraſis a duobus fratribus *Furmontiis Stephano* et *Michaele* praeſtitae. Iunctae erant literae ab illuſtri Abbate *Bignonio* ad Petrum Magnum ſcriptae, in quibus ſubſidia enarrata vidimus, quibus Furmontii in concinnanda pronunciatione et verſione folii Tangutici vſi ſunt. (2) Fidem illis adhibuit b. collega *Bayerus*, dum illorum operam ex autographis, apud academiam noſtram adſeruatis, in praefatione muſei Sinici (3) extare voluit. Honos grato animo recolendus; vt non tam inique alteri eorum de ſtudiis Bayerianis et praeclaris ipſius meritis in literaturam ſinicam iudicandum fuiſſet. Epiſtola Bignonii nondum, quod ſciam, publice habetur. Hanc igitur, quae hic

(1) Comment. Acad. Scient. Petrop. Tom. III. p. 389. (2) Hiſtor. Acad. Inſcript. et elegantior. literarum Pariſ. Tom. V. Praef. (3) p. 109. ſqq.

hic locum occupet, dignam iudico. (1) Allegat quidem

(1) *SIRE*,

Je ſuis penetré de la plus parfaite reconnoiſſance, de l'extreme honneur, qu'il a plus à Votre Majeſté de me faire, en m'envoiant l'année derniere, par le Sr. Schumacher votre Bibliothecaire, une feuille tirée d'un des livres, qui ont été trouvès au pays des Calmuks. Si j'ai differé ſi long tems à vous en rendre mes tres humbles actions de graces, c'eſt que j'ai cru, que Votre Majeſté ſeroit bien aiſe, qu'en la remerciant, je lui rendiſſe en même temps un compte exact de ce qui regarde ce Manuſcript. Il etoit aſſez difficile, *Sire*, de reconnoitre ſeulement des caracteres, que nos Sçavans n'avoient point encore vûs jusqu'icy; & ſans les differens interpretes en toutes langues, que, ſur mes tres humbles prieres le Roi a attachez à ſa Bibliotheque, j'avoüe à Votre Majeſté, qu'il auroit eté presqu'impoſſible d'y reüſſir. A force de recherches enfin nous avons decouvert un Dictionnaire en langue latine & en langue de Thibet, aiant les memes caracteres que ceux de la feuille, qui m'avoit eté remiſe par ordre de Votre Majeſté. Par ce ſecours il nous a eté permis de penetrer dans cette eſpece de Myſteres, ou d'expliquer l'enigme, ſi j'oſe me ſervir de cette expreſſion. Nous ne nous flattons pas d'avoir tout éclairci. Le Dictionnaire, dont j'ai l'honneur de vous parler, *Sire*, n'aiant été fait que fort à la legere par un voyageur, il y manque un grand nombre de mots et de phraſes, ſans lesquelles il n'eſt pas poſſible de ſuivre parfaitement un diſcours étendu. Cependant après bien de reflexions nos interpretes y ont trouvé une eſpece de Sens, et il n'eſt pas à douter, qu'ils n'allaſſent beaucoup plus loin, s'ils avoient un plus grand nombre d'ouvrages. Votre Majeſté pourra ſe convaincre par Elle même de la juſteſſe de leurs obſervations, par la copie figurée, que je me donne l'honneur de Lui envoyer. Elle y verra les caracteres inconnus auparavant, rendus par des caracteres des langues vulgaires des nos pays, & au deſſous l'explication mot à mot de ces memes caracteres en latin. A coté eſt ce que nous avons apellé le Sens, qui eſt plutôt une Paraphraſe qu'une traduction fidelle. Nous avons crû devoir en agir ainſi, a cauſe de la grande obſcurité du Texte. Si cet echantillon avoit le bonheur de plaire à Votre Majeſté, Elle pourra dans la ſuite nous rendre plus habiles, & par conſequent plus en état de faire par nos progrés dans ces connoiſſances quelque choſe de plus digne de lui étre preſenté. Le Public, *Sire*, en profitera ſous vos auguſtes auſpices, car je m'aſſure, que dans ce grand nombre des Manuſcripts, qui ſuivant les nouvelles repandues en Europe, ont éte trouvès dans vos Etats d'Aſie, il y en aura quelques-uns, qui regarderont l'hiſtoire de ces contrées ignorée jusqu'a preſent. Si cela etoit, nous

Furmontius ſenior in Catalogo ſcriptorum ſuorum adnotationes hiſtoricas, quas vna cum interpretatione ſua Gallorum Regi et Aurelianenſium Duci et Comiti Clermontio exhibuerit; (1) has autem hic nunquam vidimus.

Ego annis CIↃIↃCCXXXI et XXXII Petropoli legatorum aliquot Calmuccicae gentis eorumque interpretis ope literis Tanguticis pernoſcendis aliquid otii tribui. Erant enim inter legatos etiam ſacrificuli illius gentis, qui fere omnes Tangutica legere callent. Ab his literarum ſonos viua voce accipiebam, conficiebam ſyllabarum indicem, et formabam mihi regulas, omni lectioni Tanguticae ſufficientes. Ita inſtructus conferebam pronunciationem textus Tangutici a Furmontiis datam, quam quidem in multis voculis ſatis conuenientem, in pluribus autem et fere vbiuis, vbi ex literarum compoſitione lectio difficilior euadit, a vera nimium quantum aberrare deprehendebam. Perſuadebar ex eo, Furmontios ſchemate literarum Tanguticarum admodum manco vſos fuiſſe, et ſyllabarum

avons tout lieu de nous flatter, que Votre Majeſté daignera nous en faire part. Elle ſuit trop bien les traces de Ceſar par la rapidité & la multitude des ſes conqueſtes, pour ne pas imiter encore ce premier Empereur des Romains dans ſon amour pour les lettres & pour les ſciences; & la France ſera toujours charmée de vous devoir tout ce qui pourra contribuer à leur luſtre & à leur avancement. En mon particulier rempli de la plus haute admiration, & plein du plus profond reſpect, je vous ſupplie tres humblement de permettre que j'aie l'honneur de me dire

SIRE

de Votre Majeſté

de Paris le premier
Fevrier 1723.

Le tres humble & tres obeisſant ſerviteur
L'Abbé Bignon.

(1) Catalogue des Ouvrages de Mr. Fourmont l'Ainé. Amſterd. 1731. p. 27.

labarum indice penitus caruiſſe, ſine quo tamen lectio Tangutica omnino abſolui nequit. Cum autem nihiloſecius plenam lectionem textus venditare auſi ſint, id iniiciebat mihi ſcrupulum, vt etiam de auctoritate verſionis Furmontianae et paraphraſeos inſigniter dubitarem. Luxurians ingenium Harduinianum occurrebat, quod ex omnibus omnia fingere ſolebat, cui etiamſi doctiſſimos viros aequiparare noluerim, cogitabam autem, qualis eſſe ſolet eorum lexicorum conditio, quae ex longinquis regionibus de linguis admodum incognitis afferuntur, ab hominibus earum linguarum ignaris plerumque conſarcinata. Quidquod ipſum Bignonium naeuos iſtius lexici confitentem habebam, vt iure mirarer, qui ex illo ſolo, nullis aliis adminiculis adiuti, tantam rem perficere potuerint. Studui equidem, vt et de lingua aliquid cognoſcerem; ſed praeter pauca vocabula a meis magiſtris, qui ipſi in lingua Tangutica erant hospites, nihil didici. Hinc cum anno cIↃIↃCCXXXIII. iter literarium Sibiricum ingrederer, apographa ſolii Tangutici et verſionis Furmontianae mecum ſumſi, vt ſi forte in Calmuccorum et Mongolenſium confiniis hominem linguae Tanguticae peritum offenderem, ex illo, quid veri ſubſit, reſcirem. Quantum ibi voti mei compos factus ſim, deinceps dicam. Dabo prius notitiam non poenitendam locorum, in quibus haec ſcripta Tangutica, et ſimilia alia antiqua Mongolenſia reperta ſunt. Nonnulla enim in itinere ipſe vidi. De ceteris relationes fide dignas tum ſcripto tum ore ab aliis obtinui.

Qui inter Calmuccos et Mongolenſes degunt Sacrificuli ex Tangutia vel Tibeto oriundi, ſunt autem horum

 plu-

plurimi, vitae illarum gentium nomadicae vix aſſuefieri poſſunt, quin potius ad ſuae gentis morem aedes perennes condere ſatagunt, in quibus habitent, et cultui idolorum vacent. Nec iſti hoc moleſte ferunt. Nam ſeliguntur ad has aedes talia loca, circa quae maximam anni partem habitare aſſolent: Quodſi autem procul diſtant, tunc abſtinentiam a ſolenni Deorum cultu nihil morantur. Alias aedes ipſi ſacrificuli ſuis ſumtibus, vel ex collationibus publicis exſtruunt, alias in eorum gratiam condunt Principes. Eo pertinent delubra inter Mongolenſes, quorum meminit *Gerbillonus* apud *Haldium.* (1) Tales et Calmucci a longo tempore habuerunt, et adhuc habent. Tales fuerunt et iſtae aedes, quae ſcripta Tangutica nobis prodiderunt. Mongolica communi voce, quae et Calmuccorum eſt, *Kît* vocantur, addito vel praemiſſo nomine ſacrificuli ſiue Principis, qui illarum auctor eſt. Ad noſtrum morem *monaſteria* interpreteris. Nam ſacrificuli et eorum diſcipuli gregatim in illis habitant, qui, cum omnes coelibem vitam ducant, noſtris monachis non ſunt abſimiles. Iſtae aedes aut conclauia, in quibus cultus idolorum peragitur, referta ſunt eorundem idolorum imaginibus tam pictis in charta, in linteis, in aſſeribus, et ad parietes, quam ex ligno et luto formatis, et ex metallo fuſis. In iisdem et ſacra ſcripta adſeruantur, multa plerumque farragine, qua ſacrificuli iſti ſuperbire ſolent. Aſſeuerarunt mihi Calmucci, quando Calmuccorum Princeps *Galdan-Zerinus*, qui nunc rerum potitur, caſtra mutat, vix centum camelos ſufficere ſcriptis ſacris portandis. Huius parens *Erdeni-Schuructu-Chontaiſcha* a Choſchotorum

(1) Tom. IV. p. 46. 118. 124. 518.

rum quodam Principe *Batur-Taiſcha* dono accepit theſaurum ſcriptorum Tanguticorum, *Gandzur* dictum, quem quadraginta cameli portarunt. Alia bene multa Chanus aliquis Tanguticus, *Tſchingis* nomine, ad Chontaiſcham miſit. Deinde accepit et ipſe Galdan Zerinus inſignem ſcriptorum numerum a *Iungtſchino*, Sinarum Imperatore, per legatum aliquem ex ſuis, nomine *Telei*, quibus portandis quadraginta pariter cameli inſeruierunt. Haec poſtrema *Dandſzur* vocant: omnia autem Tangutica praedicant, id quod iis mirum neutiquam videbitur, qui norunt, Tanguticam linguam apud Calmuccos et Mongolenſes ita, vt apud Pontificios latinam, pro ſacra haberi, et in cultu idolorum plus patria valere. Haec dixi, vt magis conſtet de iſtis ſcriptis, quae noſtri ex talis generis aedibus aut ſanis attulerunt. Eſt enim omnium par ratio: et dum chartas Tanguticas colore coeruleo vel ſubnigro tinctas, literisque aureis argenteisque pictas conſpicimus, tum nec hoc hodienum inter Calmuccos et Mongolenſes inconſuetum eſt. Vnicum mireris; qui noſtris liber aditus ad ſacraria iſta conceſſus ſit? vel, ſi deuaſtata fuerint, cur ſacra ſcripta in illis ſine vſu relicta? Scias autem, ſi quando accidit, quod in iſtis terris non inſolens eſt, vt regio bello impetatur, tunc plerumque ſacrificulos et illorum familiae homines ex primis eſſe, qui in fugam ſe recipiunt. Sacrum adparatum ſecum auſſerre tum nequeunt, tum nolunt: nequeunt autem propter communem calamitatem, quae fugam comitari ſolet: nolunt, ne res ſacras in fuga profanare cogantur. Itaque ſua fana hominibus vacua, at ſacris rebus et ſcriptis plena, Deorum curae relinquunt, quae ſemel deuaſtata in omne

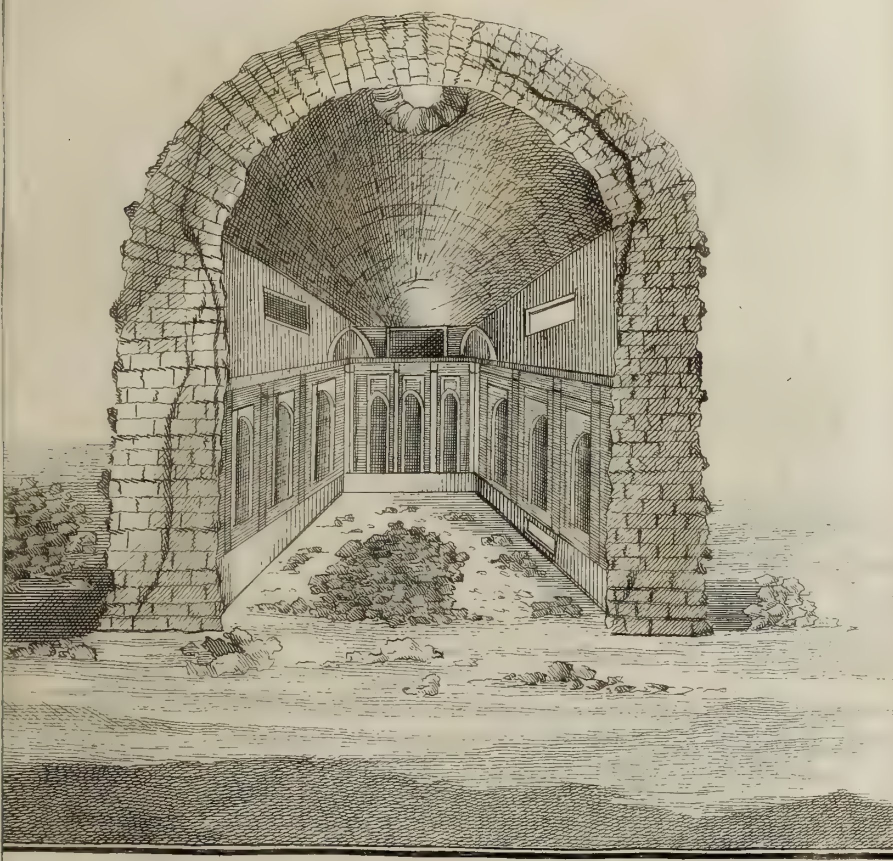
 aeuum

aeuum ita manent: nam neque victor illorum poſſeſſionem ſibi vindicat, neque primus poſſeſſor regionem recuperans ſacraria deuaſtata inſtaurat, ſcripta pro deperditis habita vnquam reſpicit. Hinc factum, quod cum noſtri in Sibiria ad Irtin fluuium, cuius ſuperior regio a Calmuccis olim inhabitata fuit, plures tales bello deuaſtatas aedes offenderent, eas nemine prohibente ingredi, et ſcriptorum, quantum voluerunt, auferre potuerint.

Omnes mecum conſentientes habiturum puto, ſi huc referam rudera alicuius aedificii, quae in occidentali regione allegati fluuii inter Iamyſcheuenſem et ſeptem palatiorum arces extant. Rumor et appellatio vulgi quidem obſtant, dum turrem dicunt, ad excubias cauendis hoſtium incurſionibus agendas exſtructam. Sed quis hic quaeſo turrem agnoſcat, eo vſui aptam? Certe fabula eſt a plebe conficta. Interior enim conditio aperte fanum indicat, cultui ſacro deſtinatum. Ruſſis Калбасунская башня dicitur, quod *turrem Calbaſſunicam* denotat. Vnde iſtud nomen ignoro. Farcimina enim Ruſſis калбасы dicta, nihil cum fano commune habent. Niſi dicas, minorem Irtis fluuii alueum, qui haec rudera prope alluit, et Калбасунская заостровка (calbaſunskaia ſaoſtrowka) vocatur, a farciminibus forte nomen accepiſſe, et illud ruderibus communicaſſe. Calmucci a Principe quodam, qui olim hic terrarum vixit, *Dſchalin obò*, i. e. *Dſchali* Principis *turrem* nuncupant. Hic annis cIↄIↄCLXXX—cIↄIↄCC floruit, minoris quidem conditionis, et Buſchtuchani eiusque ſucceſſoris *Erdeni-Schuructu Chontaiſchae* poteſtati ſubiectus. Debellatus a Baſchkiris anno cIↄIↄCCII trans montes ad Chontaiſcham ſeceſſit.

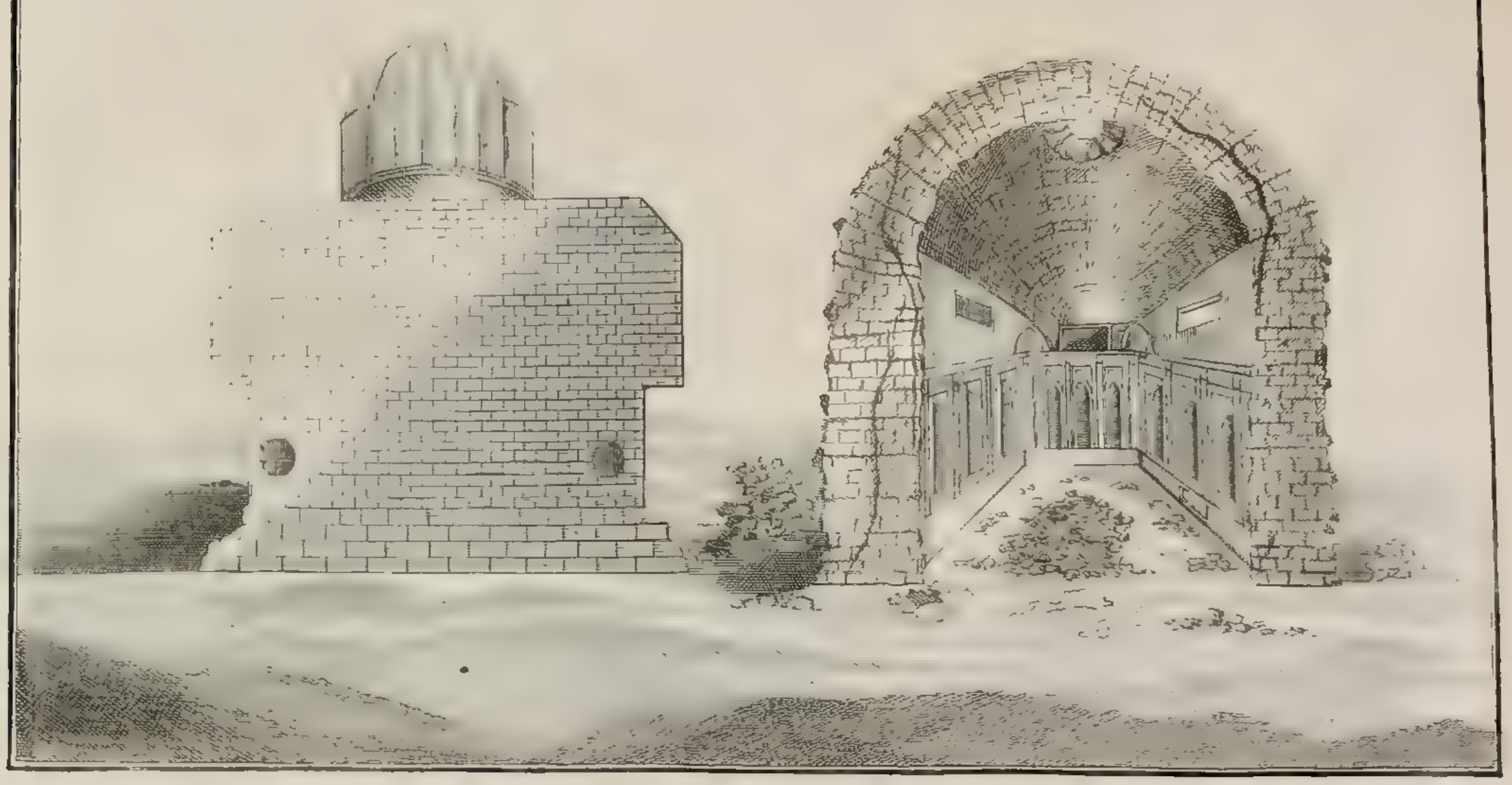
Cum

Calbassunensia



Comment. Ac. Sc. Tom. X Tab. I.
p. 431

Rudera Calbassunensia



Cum ego aeſtate anni cIↄIↄccxxxiv per iſtas regiones iter facerem, in arce Iamyſcheuenſi multa praeclara de hac ita dicta turre audiebam. Sed itineris ratione volente, vt ex allegato munimento, quo fere naue vectus eram, vlterius, quousque regio Ruſſis patet, terreſtri via in orientali parte Irtis fluuii pergerem, ipſe quidem haec rudera inuiſere haud potui: miſi autem pictorem, qui illa depingeret, notatu digna viſa adnotaret. mihique tum ore tum ſcripto de iis referret. Hic inferius oſtium Calbaſſunenſis aluei praeteruectus, ſuperius intrauit, et quatuor fere a maiori alueo leucis emenſis, relicta naue, ad rudera pedibus perrexit, ſeſqui leucam a litore diſſita. Deprehendit aedificium ſtructurae magis artificioſae, quam in illa regione, et inter gentes adeo incultas credideris. Vnus paries corruit. Ideo praeter figuram externam interiorem quoque conditionem graphice admodum exprimere potuit. Nonnulli ex militibus noſtri comitatus, quorum ad euitandos Caſaccorum Kirgiſenſium incurſiones, in his regionibus perquam frequentes, integra cohors ex munimento Iamyſcheuenſi nos ſequebatur, quorum etiam numerum non exiguum pictori in praeſidium adiunxeram, retulerunt, ante paucos adhuc annos, turrem hanc, quam dicunt, integram ſe vidiſſe, quae infra exacte quadrangularis fuerit, parietum omnium amplitudine inter ſe aequali, fornicem autem ſuperimpoſitum extus viginti angulis conſtitiſſe, quorum pictor duodecim reliquos numerauit. Parietes vsque ad fornicem quatuor circiter orgyias alti, trium pedum craſſitiem obtinent. In illarum externa facie trabium lignearum extremitates adparent, quibus interpoſitis parietum ſtructuram firmiorem reddere Tab. I.

haud

haud dubie voluerunt. Intus ad quodlibet latus tres excauationes ſunt, illis ſimiles, quas Galli *niches* vocant. Forſitan idolorum ſimulacra ibi locauerunt, vt nos ſtatuas ſolemus. Tectorio, neſcio quo, parietes intus dealbatos fuiſſe, nonnulla veſtigia indicant. Supra prope fornicem duae feneſtrae, e regione inuicem oppoſitae, cernuntur. Alia vna ad dextram prope ſolum eſt. Praeterea in ſummo faſtigio apertura conſpicitur, quae etiam feneſtrae loco inſeruiiſſe videtur. Ianua ex illo latere fuit, quod iam collapſum eſt. Tota ceterum ſtructura ex latere cocto conſtat, ſaturate rubro, cuius ſpecimen pictor attulit, argilla ex qua conflatus eſt, bolum armenam admodum aemulante, qualem amiciſſimus collega et itineris comes *Gmelinus* ſubinde ad ripam fluuii in ea regione obſeruauit. Idola et ſcripta ſacra, an vnquam ibi viſa ſint, non comperi. Forſitan ſacrificulis, qui huic fano praefuerunt, tempus ſuppetiit, omnia in alium locum commode transferendi. Locus a munimento Iamyſcheuenſi terreſtri itinere nonaginta circiter leucas diſtat. In tabula geographica Vitſeniana indicium quidem eius, ſed nimis procul ab Irti fluuio, ha bemus, his verbis: *Kalbaſſin ſiue Kabalgakum aedificium eſt lapideum* (lateritium) *ſed collapſum* (1)

Succedunt *ſeptem* ita dicta *Palatia*, quindecim leucis ſupra arcem, quae inde nomen traxit, in orientali Irtis fluuii litore ſita, quae, ſi famam ſpectes, antiquae Romae ruderibus aequiparanda putares: Si vero noſtro aeuo prope luſtres, nihil animaduertes, quod tam ſpecioſum palatiorum nomen mereatur. Ortum autem ducit adpellatio iſta ex Ruſſico loquendi modo, quo omnia, tam grandia, quam

(1) Kalbaſin ofte Kabalgacum is een ſteen huys doch vervallen.

quam vilia, dummodo lapidea vel lateritia ſint aedificia, палаты (palatia) vocantur. Calmuccis *Darchan-Zordchin-Kit* audiunt. Dicunt enim, ſacrificulum aliquem *Darchan Zordſchi* has aedes exſtruxiſſe, et in iis commoratum fuiſſe. Quo tempore id factum, ignorant. Ego autem Tumenii, quae antiquiſſima Sibiriae vrbs eſt, in tabulario publico reperi literas Imperatoris Michaelis Theodori fili die 25. Octobris A. M. C. (ſecundum computum Graecorum) 7125. i. e. A. C. 1616. ſcriptas, in quibus harum aedium ſub nomine каменныя мечети, delubra lapidea dicas, mentio iniicitur. Et haec forſitan illarum aetas eſt. Nam antiquiores ex materia, qua conſtant, vix crediderim. Imo vel ea antiquitate non putaſſem, niſi allegatae literae id luculenter teſtarentur. Audiamus *Vitſium* (10) de his aedibus ita loquentem: *Non procul*, inquit, *a Lankaraga eſt locus ad occidentalem quendam riuum Irtis fluuii, vbi ſeptem aedificia extant, ſeptem abietum nomine celebrata. Totidem namque arbores ante iſta aedificia plantatae ſunt. Alii autem Lankaraga et hunc locum vnum idemque eſſe reputant.* Cauendum, ne haec verba nos ambiguos reddant. Septem enim palatia, de quibus quaeſtio eſt, non ad occidentalem quendam riuum, ſed in orientali Irtis fluuii ripa ſita eſſe, ſupra dixi: Septem autem abietum memoriam alius

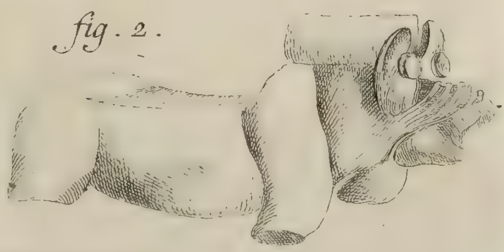
(10) Noord en Ooſt Tartary Ed. I. P. II. pag. 483. Ed. II. p. 774. By Lankaraga is een plaetſien gelegen an een Weſter tak van den revier Irtis daer zeven huyzen ſtaen: het wert de zeven denneboomen genaemt, na zo veel boomen, als voor gemelte huyzen ſtaen, hoewel ſommige dit plaetſien met Lankaraga voor een en het zelve neemen.

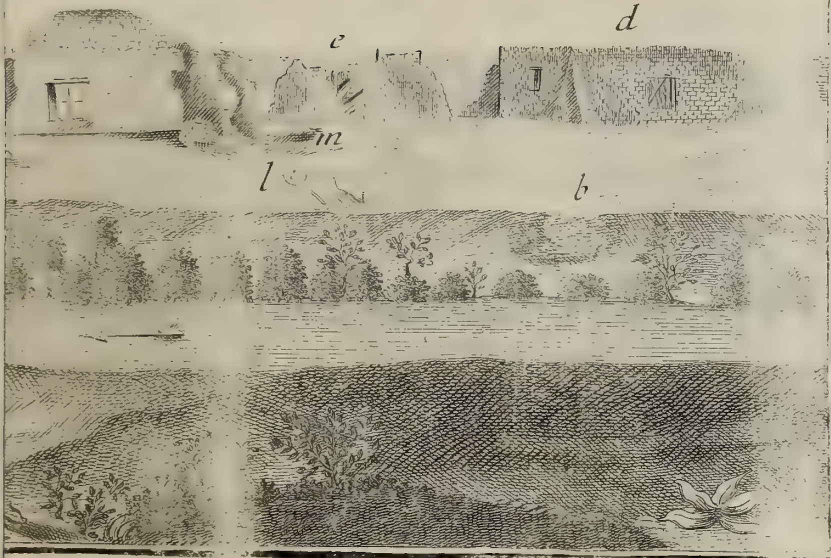
locus ſeruat, nempe quadraginta circiter leucis infra munimentum ſeptem palatiorum, vbi ſi narrationem Vitſianam ſequi vellemus, aliae ſeptem aedes ſtatuendae eſſent. Exploratum autem habeo, plures praeter has, quas primo loco dixi, nec ad ſeptem abietes, nec alibi extare. Vnde ergo talis confuſio orta? Paucis dicam. Pro *Lankaraga Dolon-Karagai* legendum: quod ſeptem pinus denotat: pinum autem dico arborem, quae Ruſſis cocна audit, quamque Belgae eo nomine, quo nos abietem, vocare ſolent. Ergo locus Vitſio Lankaraga dictus et ſeptem abietes vnum idemque ſunt, qui quidem recte ad occidentalem quendam riuum collocatur. Hic riuus in tabula Vitſiana *Ienculia* ſiue *Felcula*, Sibiriae autem incolis *Dolonka* dicitur. Amnis eſt ex occidente Irtin ingrediens, ad quem ſeptem pinus olim conſpicuae fuerunt. Caeſae autem perhibentur, cum copiae Ruſſicae viam in Buchariam minorem tentantes, aliquot leucis ſupra oſtium amnis in orientali Irtis fluuii ripa arcem, Dolonenſem dictam, (Долонская крѣпость) exſtruerent, quod paulo poſt, cum ob viciniam cum munimento ſeptem palatiorum nullius vſus iudicatum ſit, iterum deſtructum eſt. Interea locus etiamnum apud Calmuccos et Tataros in rei memoriam nomen *Dolon-Karagai* retinet, quem itaque cum ſeptem palatiis, propter numerum ſeptenarium vtrinque occurrentem, errore quodam confuſum eſſe, nihil dubites. Deuaſtatas puto has aedes annis circiter cIↄIↄcLX—LXX, quibus funeſtum bellum inteſtinum, diuiſo inter multos Calmuccorum imperio multas clades intuliſſe ex tabulariis Sibiricis mihi compertum eſt. Ex eo tempore fieri certe ſaepius potuit, vt Ruſſi deuaſtata fana intrarent,

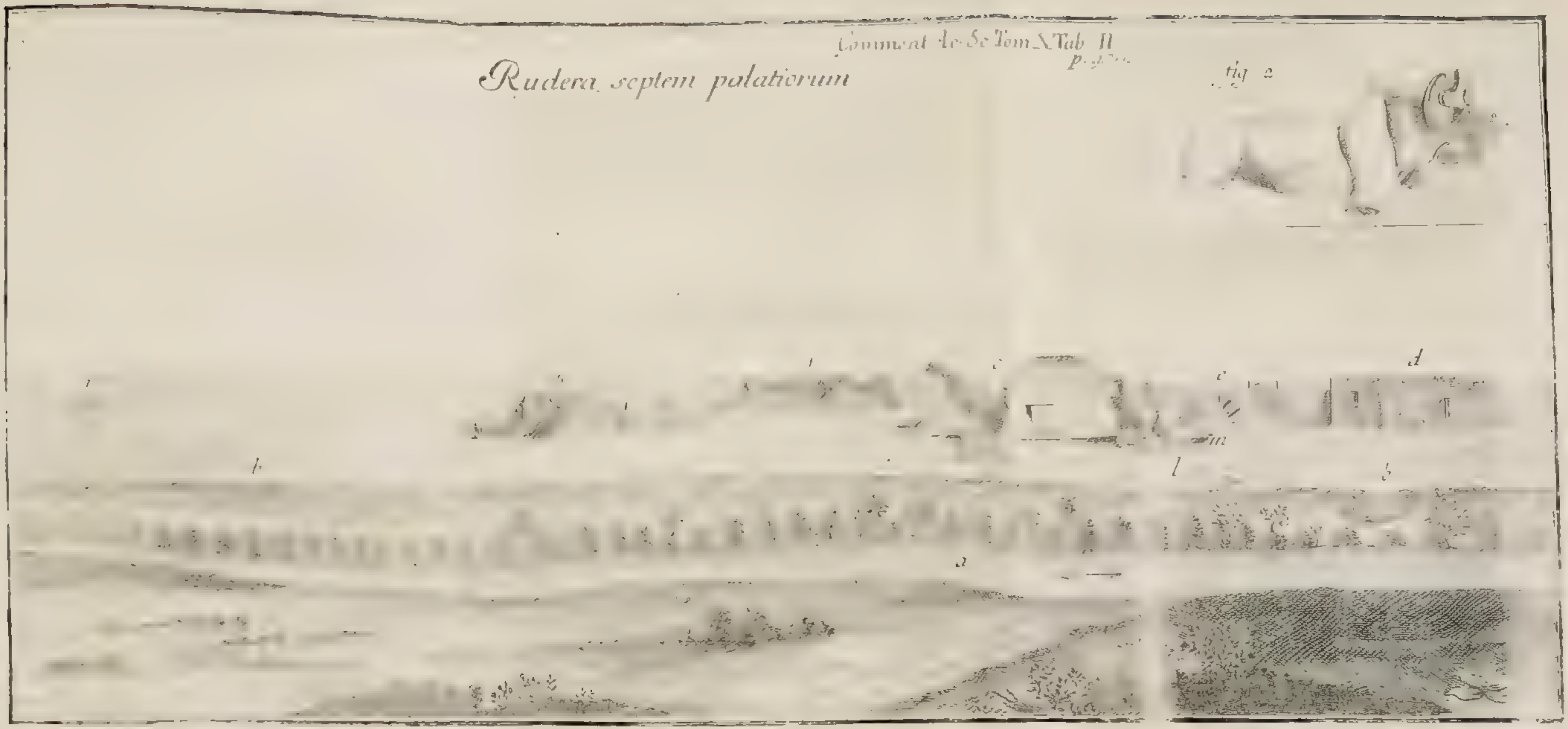
ſcripta

Tom. X Tab. II
p.

fig. 2.






Comment. Ac. Sc. Tom. X Tab. II
Rudera septem palatiorum
fig. 2

ſcripta et idola, quae magno numero ibi adfuerunt, ſibi vindicarent: ſed forſan, vt in plebe fieri aſſolet, non curarunt res, quae lucrum non afferrent. Nam ante expeditionem Buchholtianam, quae prima fuit ex illis, quibus in Buchariam eundum erat, coepit autem illa anno cIↄIↄccxiv, nihil de iis fere auditum, nulla de ſcriptis ignoti characteris in Sibiria repertis mentio facta. Illa, quae prima magno Imperatori a Praefecto Sibiriae oblata ſunt, inde deprompta fuiſſe, communis opinio eſt. Dicam, quae obſeruaui, cum, ex arce ſeptem palatiorum ad haec rudera profectus, propriis ea oculis luſtrarem.

Situs eorundem eſt in campo edito, ſua ſe planitie vndequaque efferente, et natura loci arido, quales campos vulgo *Step* vocare conſueuimus, prope ad ripam Irtis fluuii, qui in eo loco ex SOZO verſus NWZW curſum dirigit. Ex nomine intelligitur ſeptem aedes eſſe. Id autem ita capiendum, vt vnius aedificii duo conclauia, pariete diſtincta, eo quod per illas nullae ianuae tranſitum communicant, pro diuerſis aedificiis habeas. Nec moreris, vnum a reliquis dimidiam fere leucam diſtare. Structura plerorumque ex latere non cocto eſt, more per omnem Buchariam familiari. Vnicum tantum, quod praecipuum fuiſſe videtur, ad dimidiam altitudinem, quod inferiorem contignationem dicas, ex lapide ſciſſili conſtat, eo ipſo loco, vti videtur, ex terra eruto. Indicia enim eius in ripa hinc inde, vbi confragoſa eſt, clare ſe produnt. Figura omnium quadrata eſt, in nonnullis oblonga. Magnitudo varia, nulla tamen, quae quindecim communes paſſus excedat. Parietes craſſitie raro duos pedes ſuperant. Vnum aedificium in quatuor angulis Tab. II.

ad firmitatem, puto, ſtructurae addendam columnis fultum eſt, ex eodem latere non cocto ſtructis. Vnum pyramidis inſtar decreſcente paullatim ambitu exſurgit. Vnum in tria conclauia diuiſum. Vnum, quod dimidiam leucam diſtare dixi, reliquis minus eſt, magis autem excelſum fuit, vnde turrem dicunt, ad excubias agendas extructam. Iam ſere omnia collapſa ſunt, vel proximam ruinam minantur, quod ob materiam, qua conſtant, aliter fieri haud potuit. Quin miror, quod, ita comparata, tam diu et vltra ſeculum durauerint. Tecta, ſi veſtigiis quibusdam fides habenda, ex vimentis arborum conſtitiſſe videntur. Ianuarum oſtia fluuium reſpiciunt, vnico iſto aedificio excepto, quod in duo conclauia diſtinctum eſt. Haec enim conclauia cum fluuium verſus cohaereant, ideo ianua vnius ex aduerſo fuit. Feneſtra in quouis pariete vnica, eaque in medio ſita, plerumque ſatis anguſta. Fornices ſuper ianuas et feneſtras nulli. Superiorem lapidum aut laterum ſtructuram trabes ligneae ſuſtinent, transuerſim poſitae. Intus in vno vel altero ad parietes picturarum reliquiae cernuntur, quae, quantum oculis deprehendere in fugientibus adſpectum figuris licet, homines partim ſedentes, partim ſtantes, nec non animalia, dracones, aues, et maxime flores, caulibus et foliis inter ſe contextos, referunt, nullo artificio, nec lucis aut vmbrae diſcrimine, ſed primariis tantum, quod vocant, coloribus rudi admodum penicillo factae. In tribus aedificiis columnae ligneae, floribus ſubinde pictae, magna copia collapſae iacent; nec non animalium figurae, leones, dracones, ex ligno ſculpti, columnis inſidentes, quibus ſuperiores contignationes, dicam, an lacunaria? fulta fuiſſe

ad-

adparet. Vnam ex iſtis figuris in technophylacium Imperatorium miſi, quam hic delineatam ſiſto. In aedificio ex lapide ſciſſili exſtructo, in angulo quodam, rudera alicuius loci eminentioris extant, duas, et quod excurrit, orgyias ſupra ſolum eleuati, et columnis fulti, ſub quo picturarum reliquiae, vel quod locus in maiore dignatione habitus, vel quod ab aëre aliquantisper tutior fuerit, prae ceteris inſigniores obſeruantur. Ibidem etiam ſcripta recondita fuerunt, ex quibus autem noſtro tempore paucae admodum et minutae tantum ſchedulae ſupererant, perquam corroſae et exeſae, vt ſcripta ſolent, quae per tot annos ſub diu expoſita vermibus et putredini in praedam ceſſerunt. Dubitandum, an eo tempore, quo prima ſcripta ex Sibiria allata ſunt, adhuc fuerint integra. Incolae certe vicini, quod diximus, munimenti iſtud negant, ſuaque memoria nulla integra folia ibi inuenta eſſe aſſeuerant, potius omnia ruderibus Ablakitianis, de quibus deinceps agendi locus erit, accepta ferenda praedicant. Quidquid autem huius ſit? id ſane inficias nemo ibit, ſcriptorum, quae olim hic loci reperta ſunt, et Ablakitianorum eandem rationem fuiſſe, et ſi maturius curioſi rerum indagatores acceſſiſſent, illa aeque facile ac haec ab interitu ſeruari potuiſſe. Iacet praeterea pone aedes maiores inſignis magnitudinis ſaxum, oblongum, vt ſaxa ſepulchralia eſſe ſolent, in ſuperiori parte faciem humanam exculptam referens. Id olim erecte ſtetiſſe dicunt. Erat autem, neſcio quo caſu, in duas partes diffractum, quarum quaelibet fere orgyiam longitudine aequabat. Prope cauerna ſepulchralis conſpiciebatur, ex quo paucis ante nos annis aliquot vncias auri erutas eſſe, illi qui nos comita- Tab. II. Fig. 2.

Iii 3 bantur

bantur milites, referebant. Quod an indicio ſit, ſacrificulos Calmuccos hic etiam ſuos mortuos ſepeliiſſe, an vero hoc ſepulchrum ab antiquioribus illarum regionum colonis originem ducat, id quidem non ſatis liquet. Mallem tamen poſteriorem ſententiam praeferre, tum quod inter Calmuccos non moris ſit, mortuos adeo prope ab habitationibus terrae mandare, tum etiam quod veterum tumulorum ſepulchralium vbique iſtic frequens numerus ſit, qui profecto non recentioris ſunt aetatis, in eo cum hoc noſtro conuenientes, quod auri argentique theſauros foſſoribus ſaepe impertierint, vt alio loco a me dicetur prolixius. Ceterum conferas ſcenographiam, quam de ruderibus memoratarum aedium in ipſo loco fieri curaui. Conſpiciuntur in ea:

a. Irtis fluuius.

b. Ripa eiusdem orientalis cum lapide ſciſſili hinc inde prominente.

c. Aedificium, quod inter cetera praecipuum fuiſſe videtur, inferiore contignatione ex lapide ſciſſili, ſuperiore ex latere non cocto exſtructa, maximam partem collapſum, tecti veſtigiis ex virgulto ſupra adparentibus.

d. Aedificium in quatuor angulis columnis fultum.

e. Aedificium pyramidis inſtar paullatim exſurgens.

f. Aedificium in tria conclauia diuiſum, admodum collapſum.

g. } h. } Duo conclauia vno pariete cohaerentia, tota fere collapſa.

i. Ae-

i. Aedificium a reliquis dimidiam ſere leucam diſtans, intus ſuis ruderibus totum plenum, cum antea turris inſtar excelſum, vt refertur, fuerit.

l. Saxum ſepulchrale, in duas partes diffractum.

m. Sepulchrum apertum, in quo aliquot vnciae auri inuentae ſunt.

Alia ſimilium aedificiorum rudera viginti, et quod excurrit, leucas a prioribus, in eadem Irtis fluuii ripa, ab arce ſeptem palatiorum triginta ſeptem leucas, ex ſiniſtra viae regiae, quae ad arcem Uſtkamenogorenſem ducit, obſeruantur. Illa autem, cum iuxta proficiſcerer, fere ſolo aequata erant, et vix diſtinguebam vnum aedificium in ſex conclauia quadrangularia diuiſum fuiſſe. Referebatur, ante viginti annos parietes plus, quam vlnae altitudinem, habuiſſe, quo etiam tempore agriculturae veſtigia in vicinia ruderum conſpicua fuerint. Nos autem praeter foſſas, aquam in agros deriuandi gratia factas, nihil animaduertimus. Plura Vitſius (1) docet. *Ab his*, inquiens, *aedibus* (nempe a ſeptem palatiis) *Irtin vltra aſcendendo ſacrificulus aliquis Calmuccicus habitat, qui duo ſatis magna aedificia lateritia ſibi exſtruxit, extra calce obducta. Ille Bucharos in ſeruitio ſuo alit, qui agrum colunt; ibi triticum, hordeum, piſa et alia frumenta creſcunt. Buchari, proprias ſuas ſedes relinquentes, vltro huc receſſerunt.*

Vlti-

(1) l. c. meerder opwaerrs varende woont een Kalmukſch Laba of Prieſter, die daer heeft ſtaen twee groote ſteene gebouwen, van buyten met kalk beſtreken, heeft iu zyn dienſt Bucharen, en leeft van den Lantboew: aldaer waſt tarw, gerſt, erten, en andere granen. De Bucharen, welke onder zyn gezagh ſtaen, zyn uitwykelingen van hun eigen lant, en hadden zich der dezer plaetſe nedergeſtelt.

Vltima, in iſta quidem regione, quoad Sibiriae fines extenduntur, ſunt rudera Ablakitiana, de quibus iam ſupra rumorem nonnullorum memoraui, qui non ſine veri ſpecie ſcripta Tangutica, quotquot ex his terris alio perlata ſunt, inde omnia deprompta eſſe perhibent. Mihi ſaltem id perplacet. Nam hic fere vnicus locus eſt, in quo ſcripta adeo longe ab interitu ſeruari potuerunt. Fuere quidem ex incolis arcis Uſtkamenogorenſis, qui rudera anno demum cIↃIↃCCXXI exeunte a militibus ex vltima expeditione in Bucharias tentata, Lichareuiana ſcilicet, redeuntibus, inter haec, dum arx Uſtkamenogorenſis exſtrueretur, reperta eſſe mihi aſſeuerarunt: Sed haec non eo intelligi velim, ac ſi locus ante plane ignotus fuerit, et a nemine Ruſſorum viſitatus. Quin potius, cum iam indicia eius apud *Vitſium* (1) extant, ex multis certe annis cognitus fuiſſe debet; hoc tantum discrimine, quod primis temporibus notitia inter paucos ſubſtitit, quae deinceps, ex quo milites ex vicina arce Uſtkamenogorenſi eo penetrarunt, omnibus eſt patefacta. Doleo, quod, cum in memorata arce agerem, nec ipſi mihi rudera ſpectare, nec aliquem ex noſtris, qui ea deſcriberet, depingeretque, mittere licuerit. Pericula autumnali eo tempore a latronibus Coſaccis imminentia, de quibus vndique infauſti nuncii accurrebant, id prohibuerunt. Acceſſit feſtinatio itineris ante hiemem Kuſneziam vsque et Tomium continuandi: Miſi autem ſcribam, quem praefectus arcis ſuppeditauit, triginta militum praeſidio inſtructum, qui interea, quod ipſe ea, quae circa arcem agenda erant, abſoluerem, iter conficeret, ruderum deſcripti-

(1) loco infra citando, et in tabula ipſius Geographica.


Comment. Ac. Sc. Tom. X. Tab. III
p. 441.
Ichnographia aedium Àblakitensium et totius moenium ambitus quibus cinguntur


Tom X Tab. III
p. 441.
Ablakitensium et totus
moenium ambitus quibus cin
guntur

ſcriptionem, quantum poſſet, curaret, et ſcripta, quot equi portare valeant, nec non picturarum ſpecimina, et, ſi quae ſint, idola ſecum afferret. In hoc voti compos factus, plus quam ſesquimille ſcriptorum Tanguticorum et Mongolicorum folia, quatuor imagines diuorum in aſſeribus pictas, et ſex tabulas ligneas literis Mongolicis exſculptas, quae libris excudendis olim inſeruierunt, accepi, omnia technophylacio Imperatorio illata. Neque contemnenda, quae a ſcriba de hodierno ruderum ſtatu accepi. Adhibitis enim iis, quae ex ipſo et aliis praeterea requirendo reſciui, deſcriptio ruderum inde orta eſt, ſatis luculenta, vt mihi quidem videtur, quae autem manca erat, quoad picturae deficiebant. Sed et huic defectui medela parata eſt. Aliquot poſt nos annis opportuniore tempore adfuit Geodaetarum aliquis *Baſilius Schiſchkow*, ab Illuſtri *Tatiſchtſcheuio*, rebus tunc metallicis per Sibiriam praefecto, miſſus, qui tam ichnographiam loci generalem, quam ſpecialiorem aedificiorum ſcenographiam, et vnius aedificii interiorem faciem, quod picturas attinet, depinxit. Illa ego noſtra facere conſtitui, vt hi commentarii maiorem inde lucem accipiant.

Ablakitum Sibiriae incolis vrbs vocatur, eo quod moenibus cinctus eſt locus, antiquo more ſcilicet, quo Ruſſi quaslibet, quantumuis paucas, habitationes, dummodo muro munitae, aut caſtello praeditae ſint, vrbes (городы) dicere conſueuerunt. Calmucci *Ablainkît* efferunt, id quod *Ablaii fanum* denotat. Fuit autem *Ablaius* Princeps tribus Calmuccicae, *Choſchot* dictae, qui circa medium ſuperioris ſeculi floruit, at in bello inteſtino Calmuccico, de quo ſupra dixi, anno Chr. cIↄIↄcLXXI. ex Tab. III.

 his

his ſuis ſedibus profugus factus, conuertit ſe in regionem Iaïco et Volgae fluuiis confinem, vbi a Torgoutis, quos vulgo Calmuccos Volgenſes vocamus, cum illos crebris incurſionibus laceſſeret, captus eſt, et Ruſſis traditus, qui Aſtrachanum illum deduxerunt, vbi ſenectute confectus diem obiit. Lubet repetere verba *Vitſii* quae aedificiorum ad Ablaio exſtructorum mentionem faciunt. (1) *Eſt*, inquit, *in ea regione* (ad Irtin fluuium) *Beska amnis, ex rupibus profluens, ad quem Princeps Ablai duo aedificia lapidea exſtrui curauit, eaque moenibus muniuit, locum inter rupes ſeligendo, operariis ex Sinarum imperio ad illum miſſis.* Neſcio cum hic Beskam amnem auctor memorauerit, cur in eius tabula geographica aedificia Ablaiana ad Karbugam quendam poſita ſint. Ad hunc nempe videmus in duobus locis, id quod praeter rem eſt, verba haec: *Ablaiana fortalitia*, Belgica lingua, *Ablaiſche Sterkten*, adſcripta, et ad oſtium eius leguntur verba: *Boerchoe het hof van Prins Ablai*, i. e. *Burchu*, *aula Principis Ablaii*, vbi pro *Burchu* puto *Urgu* legendum, quae vox in lingua Calmuccica caſtra Principis denotat. Beska amnis in eadem tabula ſupra Karbugam Irtin influere conſpicitur: nullis tamen aedificiis aut habitationibus ad illum adnotatis. Ruſſis iſte amnis propter viciniam ruderum Ablakitenſium eodem *Ablakiti* nomine celebris eſt. Octo ille leucis ſupra arcem Uſtkamenogorenſem ex media inter auſtrum et occidentem regione in Irtin exit, et quaſi viam

(1) l. c. Noch vint men in dit gebiet en rivier genaemt Beska, dat meede uyt ſteene geberghte ſtort. Aldaer laet Prins Ablai timmeren twee ſteene gebouwen der wyſe als ſterktens, en dat tuſchen ſteene geberghte in, waer to hem uyt Sina meeſters zyn geſonden.

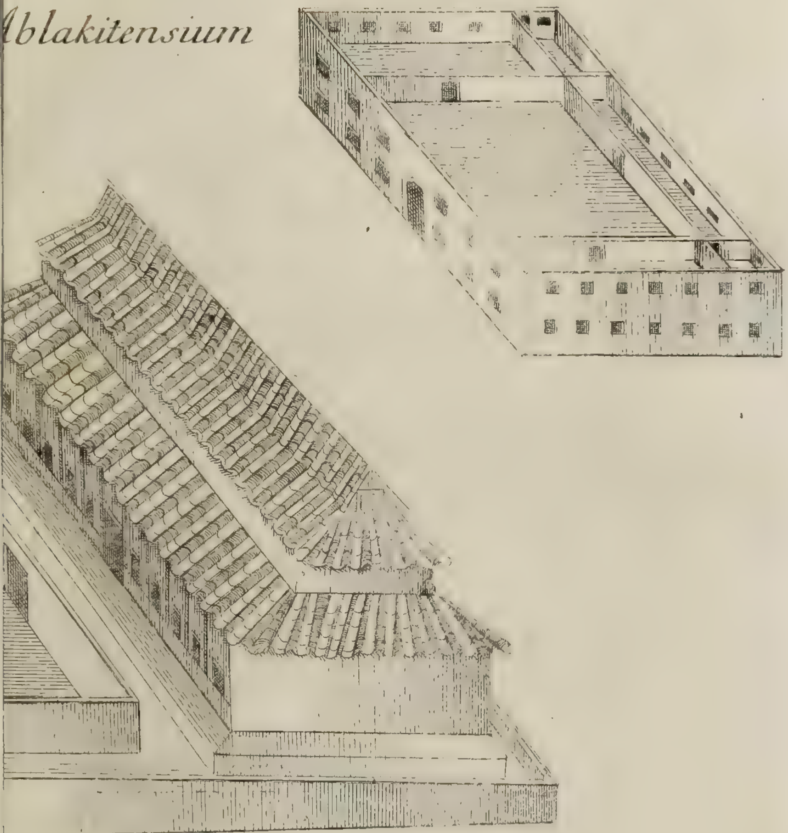
viam pandit his, qui iter ad rudera facere induxerunt. Irti nempe fluuio e regione arcis ſuperato, poſt viginti circiter leucas peruenitur ad praedictum amnem, vbi in ſiniſtra, ſiue occidentali, eius ripa tumulus olim ſepulchralis exſtitit, qui, paucis ante nos annis effoſſus, auri in tenues lamellas ducti, quali apud veteres defunctos principes inuoluere moris fuit, ad librae pondus prodidit. Ex hac ratione iſte locus nomen *Jolotucha* traxit. Inde amnis ripam orientalem legendo occurrit alius amnis, *paruuli Ablakiti* nomen ferens, qui ex Euro-Auſtro cum priori vndas miſcet, et ſex leucis a loco, Solotucha dicto, diſtat. Hoc ad oſtium eius traiecto iter pone ripam maioris amnis continuatur circiter viginti quatuor leucas, quae vbi facta via eſt, amnis ſubito curſum mutare, et, cum ante a meridie fere in ſeptentrionem fluxerit, iam ex oriente in occidentem labi conſpicitur. Locus ideo propter brachii incuruati ſimilitudinem Ruſſice *lokot* i. e. cubitus vocatur. Inde vsque ad rudera Ablakitiana, quae vnius circiter leucae ſpatio ab amne verſus meridiem abſunt, triginta praeterea leucae numerantur. Ergo totum iter a munimento Uſtkamenogorenſi octoginta circiter leucis conſtat. Via montoſa quidem, ſatis tamen commoda eſt: occupat nempe iſtam regionem montium ſeries, quae cum Altaienſi montium tractu, ex oriente Irtis fluuii ſito, cohaeret, et Sibiriam a terris ditioni Calmuccicae ſubiectis diſterminat. Ablakitum amnem ex vtraque ripa betulae, populi atque ſalices abundanter cingunt. Regio ceterum noſtro tempore non niſi a feris incolitur, quos inter cerui, alces, capreoli et rupicaprae eminent.

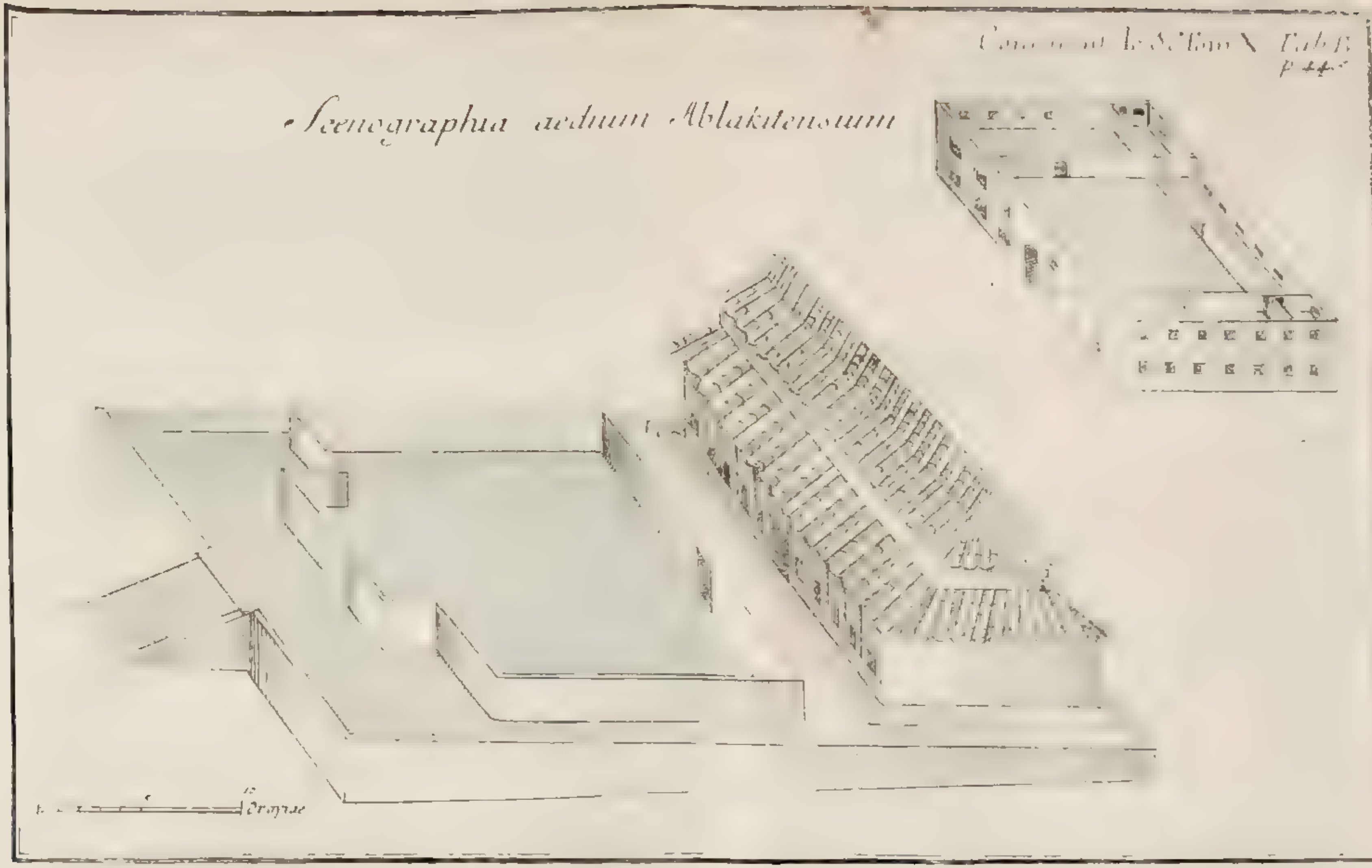
Ne ſim longior, illa, quae ex ſchematibus Schiſchkouianis patent, hic repetere nolo: dicam tantum de iis, quae vel plane non, vel non diſtincte ſatis, expreſſa ſunt, vel delineando exprimi haud potuerunt.

Situs loci in amoena planitie eſt, quam ad ſeptentrionem et occidentem excelſae rupes claudunt: rupes per quas moenia ducta ſunt, quae ipſae in nonnullis locis moenium vices ſuſtinent, quae lapides ad exſtruenda illa praebuerunt, quae lacum includunt, qui aquam incolis praeberet, vnde ambitus loci pentagonum aemulans ortus videtur. Ipſa moenia ſesqui orgyiam alta, tres autem et dimidiam vlnam craſſa referuntur. Porta, quae a meridie eſt, columnis ex latere cocto gaudet, quibus ſicut et alteri orientali portae fornices ex eodem latere impoſiti fuerunt, iniuria temporis collapſi, ipſis autem moenibus ex omni parte illaeſis. Per portam meridionalem intrantibus bina mox aedificia occurrunt, in aggere quodam exſtructa, qui figura quadrangulari ad ſesqui orgyiam a ſolo editus, extra latere cocto circumdatus, intra terra repletus, et ſuperne antibus lateritiis ad dimidiam hominis magnitudinem cinctus eſt. Scala in aggerem ex meridie itur, etiam lateritia, qua conſcenſa, in primum aedificium venitur, ſingularis ſtructurae, vt ex ſchemate adparet, et quod ſubſequenti alteri aedificio atrii loco inſeruiiſſe coniicio. Parietes lateritii, tectorio ex luto albicante inducti, vnam et dimidiam orgyiam in altum exſurgunt. Solum latere ſtratum. Lateres, quod vt ſemel moneam, vbique in his ruderibus eiusdem generis ſunt, et quamuis cocti, colorem tamen non rubentem ſed cinereum, et intus, ſi franguntur, nigricantem referunt. In duobus angulis

Comment. Ac. Sc. Tom. X. Tab. IV.
p. 445.

Ablakitenſium




Comm. nov. Ac. Sc. Tom X. Tab. II.
p. 44
Scenographia aedium Ablakitenſium
Orgyae

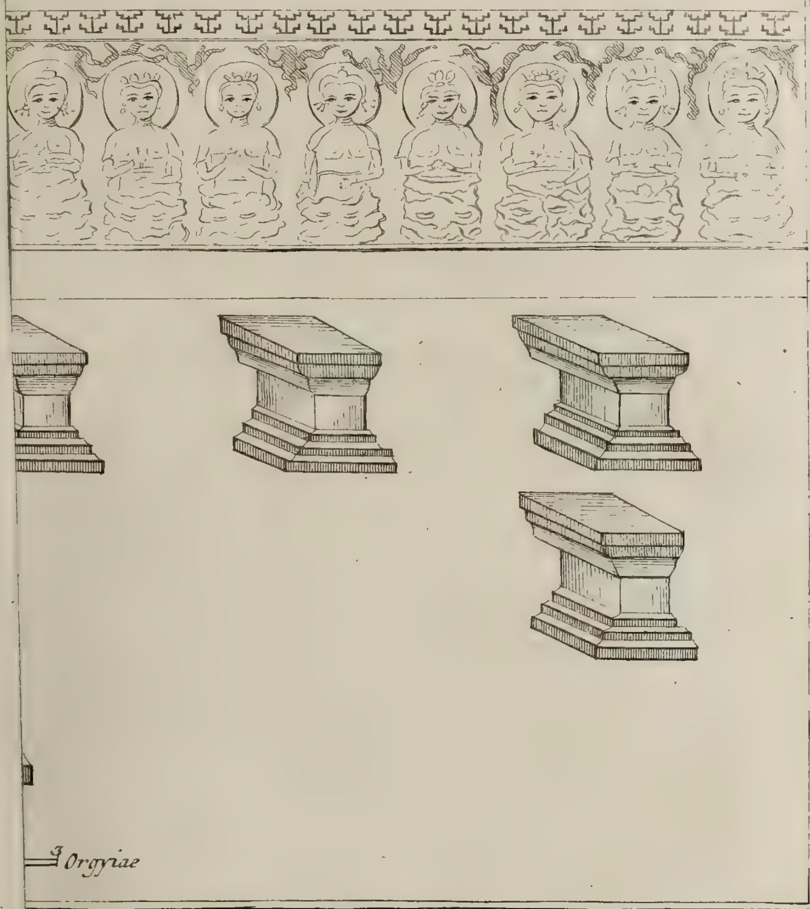
gulis duo furni excoctorii reperiuntur, exiguae molis, rotundi, ſupra et infra in anguſtos tubos deſinentes, cum foraminibus, vbi folles olim adplicati fuerunt, et, ſi ſuperiores ductus, fumo emittendo deſtinatos, excipias, ceterum integri. Hi in ſchemate Schiſchkouiano non extabant, ſunt autem debitis locis a nobis additi. Probabile eſt, ſacrificulos ibi tum metalla excoxiſſe, tum medicamenta paraſſe. Ille enim montium tractus diuitiis ſubterraneis abundat: nec eſt, cur artem chemicam et medicam illius familiae hominum in dubium vocemus, cum exempla eius non contemnenda ipſi cognouerimus. Praeterea nihil in iſto conclaui ſiue atrio obſeruatur. Nullae feneſtrae. Nullum tectum; cuius tamen reliquias quasdam hinc inde adparere, ac ſi exuſtum eſſet, relatum fuit. Quin etiam reliquiae iſtae non tecti, ſed ſuperioris parietis lignei, lateritio ſuperimpoſiti, propter abſentiam feneſtrarum putari poſſunt: aut ſi adfuit tectum, certe non communis ſtructurae fuit, quoniam luminis radii per illud in conclaue intrare debuerunt. Ceterum et ſcenographia harum et ſequentium aedium Schiſchkouiana conferenda eſt. Tab. IV.

Alterae aedes, de quibus dixi, quod eidem cum prioribus aggeri ſuperſtructae ſint, ex vnico pariter conclaui conſtant, ſed ornatiore et quadrangulari, idolis, picturis et ſcriptis ſacris vndique referto. Hoc ipſum delubrum fuit, in quo ſacrificuli ſacro cultui vacauerunt. Aditus eſt e regione priorum aedium, ſiue atrii, valuis clauſis, et ita comparatus, vt his apertis ex atrio in delubrum liber proſpectus pateat. Ad valuarum vtrumque latus ſex feneſtras noſtri numerarunt, ſcenographia Schiſchouiana decem ſiſtit. Eidem et alibi in feneſtrarum numero

mero cum noſtris commentariis non conuenit. Talis autem diſcrepantia leuis et nullius momenti eſt. Parietes ad altitudinem quinque vlnarum ex latere cocto conſtant, et ad orgyiae altitudinem ex trabibus ligneis, paullatim in tectum coëuntibus. Acropodium quadrangulare in medio collocatum, altitudine tres vlnas cum dimidia aequans, variis florum ornamentis pictum, cui idolum olim impoſitum fuit, hominem referens, pedibus diuaricatis erecte ſtantem, toga amictum Sinarum more duplici, longiore altera, et altera breuiore, capite et pedibus nudis, qui magnitudine inprimis capitis, quod plus quam giganteae monſtroſitatis fuiſſe dicitur, communem ſtaturam nonnihil excederet. Hoc noſtri in multa fruſta diffractum inuenerunt, cum ante paucos adhuc annos integrum extiterit. Clades ab ignorantia, an iniuſto zelo? militum ex vicino munimento venandi gratia hunc locum ſaepe viſitantium, idolo illata. Ex fragmentis ad me perlatis collegi, idoli ſtructuram interiorem ex vimentis arborum conſtitiſſe, quibus lutum inductum, et ad formam iuſtam compoſitum fuit, puriore quadam terra alba inſuper illita, tripolitanae ſimili, qualis hinc inde ad ripas Irtis fluuii inuenitur, ſine omnibus ceterum picturae aut colorum indiciis. Sedecim alia eiusdem formae et ſtructurae idola minora pone parietes orientalem, ſeptentrionalem et occidentalem conſpicua fuerunt, acropodiis minoribus impoſita, ſed, quod dolendum, eandem cum priori ſortem experta, ſolis acropodiis altitudine duarum vlnarum ſuperſtitibus. Parietes ab infimo ſolo vsque ad tectum variis picturis exornati obſeruantur, inter quas, quae ad parietem orientalem et occidentalem extant, tum magnitudine, tum corporis habitu

iani
ſita fuerunt .

Comment. Ac. Sc. Tom X *Tab. V.*
p. 447.



*Picturae fani Ablakitum
et acropodia quibus idola imposita, fuerunt.*

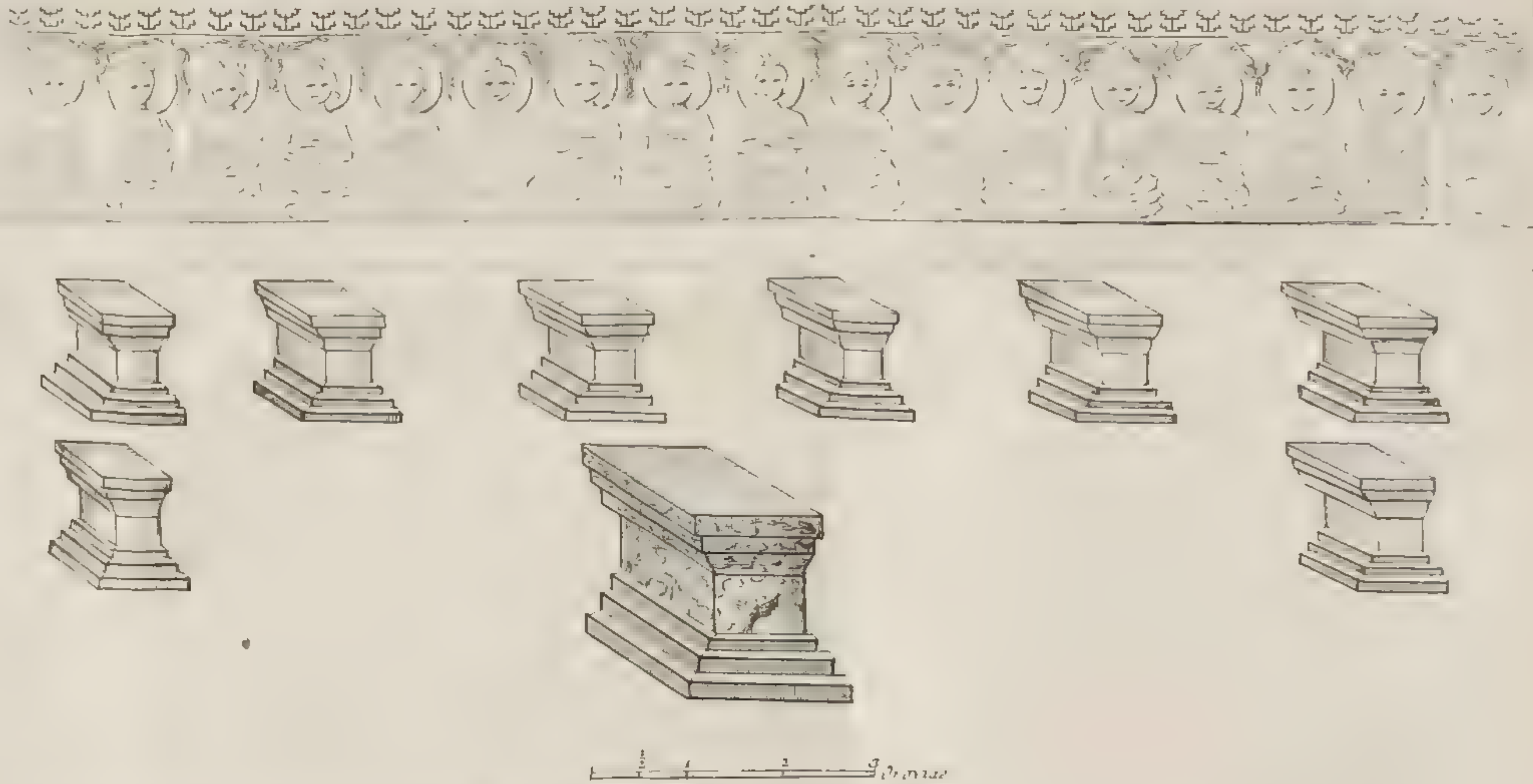




fig. 1.

fig. 3.

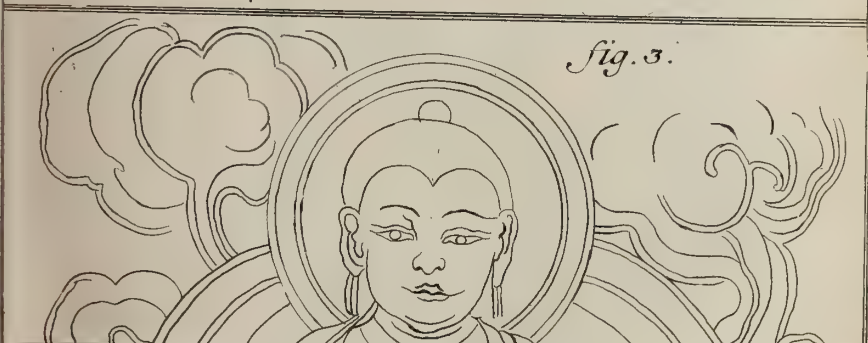



fig. 4
fig. 1
fig. 2
fig. 3

bitu inſigniores ſunt. Illarum ex oriente altera virum, altera foeminam refert. Occidentales ambo formas viriles exprimunt. Omnes pedibus erecte ſtantes pictae. Virorum formae inprimis multitudine capitum et brachiorum, qui frequentiſſimus apud varias gentes idololatricas diuinitates pingendi mos eſt, ſpectatorum in ſe oculos conuertunt. Ex occidentalibus alterum quatuor capitibus et viginti quatuor brachiis, alterum capitibus duobus et octo brachiis praeditum eſt. Prius praeterea pede dextro comae alius proſtrati hominis inſiſtit, aliosque duos ad genua ſua prouolutos ſpectat. Tertium virile, e regione pictum, duo pariter capita et quatuor brachia habet, duobus brachiis foeminam, quae ipſi ad latus eſt, complectens, et vno ore exoſculans, pedesque pedibus arcte iungens, dum reliquum caput, reliquaque duo brachia in ſitu erecto et naturali manent. Paries denique ſeptentrionalis continet ſeriem imaginum, quibus foeminae, pedibus in gremium intortis, ſedentes exprimuntur, mamillis, brachiis et plantis pedum nudis, colore corporis, quem aliae naturalem, aliae purpureum, luteum aliae, aliae ſubuiridem monſtrant, nec non geſticulationibus manuum diuerſae, caeterum inuicem perquam ſimiles. Hae, vt et acropodiorum figurae, in ſingulari tabula Schiſchkouiana expreſſae ſunt. Praeterea etiam totum lacunar talibus foeminarum imaginibus, in aſſeribus quadratis vnius vlnae magnitudine pictis, ornatum fuit, quarum etiamſi plurimae iam eo tempore auulſae et ablatae fuerint, aliquot centenas tamen reliquas noſtri dixerunt, ex quibus quatuor ad me attulerunt, quarum tres forma diuerſas ſpeciminis gratia hic minori forma delineatas ſiſto. Tabula enim Schiſchkouiana, quae totum lacunar

Tab. V.

Tab. VI. fig. 1. 2. 3.

nar exhibet, ſingulas imagines non accurate ſatis proponit, quare illam hic inſerere ſuperuacaneum viſum eſt. Artis modus in omnibus his picturis ſimilis eſt illi, quem inter rudera ſeptem palatiorum obſeruaui. Colores vbiuis aqua diluti, ex quibus non niſi primarii adhibiti ſunt, omni fere lucis et vmbrae diſcrimine neglecto. Animadverſione dignum. pleraſque imagines, inprimis circum capita, radiante aliquo lumine, quod vulgo nimbum vocant, fulgere, quali et Romanorum diuinitates quondam cinctas fuiſſe conſtat, et noſtrates ſanctos pingere moris eſt.

In eodem conclaui, ad parietem ſeptentrionalem inſignis magnitudinis ſcrinium extitit, multis loculis exemtilibus refertum, in quibus ſcriptorum Tanguticorum et Mongolicorum ſacra farrago adſeruata fuit. Illud autem, ex quo ab improbis manibus deiectum eſt, haec per totum conclaue diſperſa iacent, quae etiamſi a tot annis quauis occaſione a militibus et venatoribus Ruſſis inſignem diminutionem paſſa ſint, ita vt noſtra aetate in munimentis Irtenſibus mercibus inuoluendis et feneſtris ſarciendis vulgo inſeruierint, poſtremo quoque noſtri non contemnendam partem eorum abſtulerint, tanta tamen copia ſupereſſe dicuntur, vt vix decem equi iis auehendis ſuffecturi ſint. Tangutana in charta coerulea et ſubnigra literis aureis et argenteis picta, qualia illa fuerunt, quae immortalis gloriae Imperator in exteras terras miſit, iam non adeo frequentia occurrunt. Peregrinum enim chartae et ſcripturae genus plures ſemper amatores ſibi conciliauit: quae autem reliqua manſerant, pleraque noſtri abſtulerunt. Frequentiora ſunt in charta vulgari alba, charactere nigro, rarius rubro, aut rubro et nigro promiſcue ſcripta, literis

vnci-

vncialibus ſiue quadratis. Nec deſunt minori charactere tachygraphico, Tangutenſibus *Schar* dicto, exarata folia, illi, quod *Strahlenbergius* (1) edidit, perſimilia. Quin reperiuntur folia Tangutica charactere quadrato in charta tenuiori ex aduerſa facie typis excuſa, a tergo aliis foliis agglutinanda. Mongolica autem impreſſa nulla inuenta ſunt, cum tamen formae impreſſoriae Mongolicae, vt ſupra dixi, adfuerint, quarum etiam *Strahlenbergius* meminit, at ex iisdem falſo concludit, omnia ex talibus fanis allata folia, tam Tangutica, quam Mongolica et Calmuccica, prelo excuſa eſſe. Quae ad me peruenerunt Mongolica et Calmuccica, pleraque in charta vulgari alba charactere nigro ſignata, vel, quod rarius eſt, lineis rubris et nigris variegata, vel tota charactere rubro perſcripta ſunt. Perpauca vidi more Tangutico in charta nigra aureis literis picta. Libri ex betularum cortice compacti, quorum tres, idiomate Calmuccico perſcriptos, inde accepi, etſi non vulgares ſint, tamen nec inter rariora ponendi. Nihil enim, niſi chartae penuriam, illi indicant, quemadmodum et Ruſſos in longinquis Sibiriae locis, cum charta deficeret, betularum cortice ſubinde vſos eſſe nouimus. Rariſſimae ſunt diuorum imagines in charta pictae, quarum quidem nullae a noſtris inuentae ſunt: vnam tamen a milite quodam arcis Uſtkamenogorenſis, qui olim eam ſibi vindicauerat, pretio nactus ſum. Deam illa exprimit in charta nigra, trium pollicum quadratorum magnitudine, auro pictam, quae pedibus in gremium contortis, puluinari inſidet, dextram in genua demittit, ſiniſtra figuram cordis vel aliud quid ei ſimile geſtat. Facies et reliquae corporis partes,

(1) Tab. I. ad pag. 312.

quae nudae ſpectantur, totae aureae ſunt. De nimbis, qui hanc, vt alias imagines, ambiunt, ſupra dixi. Ad latus quaedam Tangutice ſcripta extant, cum interpretatione Mongolica, in cuius gratiam, nempe vt vox voci exacte reſpondeat, Tangutica iſta, quae alias transuerſim a ſiniſtra ad dextram ſcribuntur, Mongolico ſcribendi modo deorſum collocata ſunt. Cetera ectypus illuſtrat.

Tab. VI. Fig. 4. Eſt praeterea aliud aedificium prope orientalem moenium portam exſtructum, quod ſacrificulis domicilii inſtar inſeruiiſſe videtur. Conſtat enim ex vno conclaui maiori et aliquot ad latera ſecluſoriis, tali vſui inprimis aptis, vt ex duplici ſchemate, tam ichno-quam ſcenographico, conſpicuum eſt. Parietes hic, vt in reliquis, lateritii ſunt, nullis picturarum ornamentis, tectorio tamen ex luteſcenti albido, inducti. Et hi vnice eius ſuperſunt. Nam quae alia olim lignea contignatio lateritiae ſuperſtructa fuiſſe refertur, illa a multis annis collapſa eſt. Feneſtrae nec vitri nec lapidis ſpecularis veſtigia ſeruant, forte quod vel chartaceae vel membranaceae fuerint, more per Bucharias et in Sinis vſitato. Aulaeis autem ex panno ſerico Sinenſi confectis, tam in hoc, quam in praecedenti aedificio, ornatas eas fuiſſe perhibent, quae a primis inuentoribus, aëris iniuria iam ſatis ſuperque lacerata, ablata ſunt. Ceterum notari meretur, tria haec deſcripta nobis aedificia tali ſitu conſtructa eſſe, vt ianuae meridiem ſpectent. Nimirum hunc ſitum Calmucci et Mongolenſes tam in ſacris, quam in reliquis quibuscunque, aedificiis exſtruendis religioſe obſeruant, more a maioribus accepto, vt *Guilielmus de Rubruquis* (1) teſtatur, quem tamen in ſeptem palatiis neglectum eſſe vidimus. Vlti-

(1) Cap. II.

Vltimo loco minoris alicuius aedificii rudera ſuperſunt, a duobus prioribus ad occidentem poſiti, cuius parietes dimidiam hominis magnitudinem vix aequant, et in medio veſtigia foci monſtrant, ex quo coniicitur, culinam hanc fuiſſe, quae autem cum propior delubro, quam aedibus habitationi inſeruientibus, extructa fuit, alii praeterea vſui inſeruiiſſe videtur; forſitan ad ignem ſuffitus, idolis accendendi gratia, proxime petendum. Cetera intra moenia plana, et omnibus aedificiis vacua ſunt, nec vlla plurium aedificiorum veſtigia, quae olim ibi fuerint, adparent. Dum autem Ablaius Princeps moenia tanto ambitu duxit, id rationis ſubeſſe poteſt, vt ſibimet ipſi locum tutum ab hoſtium repentino incurſu, in quo tentoria ingruente bello figeret, proſpicere voluerit.

Ablaio frater fuit natu maior Utſchurtu Taiſcha dictus, qui primus inter Calmuccos Anno Chr. cIↃIↃCLXXII Chani honores affectauit. Is etiam ſuis ſacrificulis tale fanum extruxerat, quinque dierum itinere ab Ablakito verſus occidentem ſitum, et noſtro adhuc tempore *Utſchurtu-Chan-Kit* nomine notum. Deſtructum autem illud fanum eſt a Galdano Dſongarorum tribus principe, cui Utſchurtu-Chanus filiam ſuam deſponſauerat; a Galdano, inquam, qui deinceps Buſchuchtuchani nomen aſſumſit, poſtquam ſocerum Anno Chr. cIↃIↃCLXXVI regno exuiſſet. Hic, vt iniuriam diis illatam expiaret, vel ſui memoriam poſteris commendaret, aliud fanum, ſex dierum itinere ab Ablakito verſus euroauſtrum, in vicinia lacus Saiſſan condidit, *Buſchuchtuchan-Kit* dictum. Id, cum ille Princeps longo et difficili bello cum Mongolenſibus confligeret, Caſacci in ipſius ditionem magno impetu ir-

ruentes, Anno cIɔIɔcLXXXIX profanaſſe dicuntur. Haec, vt vt Sibiriae vicina loca ſint, dubito tamen, an cuipiam eius incolarum viſa? ego certe neminem inueni, qui mihi plura de illis dicere potuiſſet. Quae enim noui, a Calmuccis accepi. Quantumuis autem pauca in medium protuli, non potui tamen prorſus ea tacere, quin loca indicare omnino debui, ne poſteris hiſtoriarum orientis cupidis inuidere videar theſauros, futuris, quod auguror, temporibus, ſi quando Sibiriae limites vltra extendentur, aut regio ab inimicorum incurſionibus tutior reddetur, inde reportandos.

Sunt praeterea talia ſacraria ad Ieniſeam et ad Teſſum fluuios, in proximis a Sibiria Mongolenſium terris, ſpecus nempe idololatrica, in rupe exciſa, et aedes Ablakitianis ſimiles, quae, cum a Ruſſis Sibiriae incolis plus vice ſimplici viſitata, et ſcripta etiam ex priori loco allata ſint, magis innotuerunt. Inprimis mihi Anno cIɔIɔccxxxv Craſnoiarii verſanti praeter, quod ipſos homines, qui memorata loca viſitauerant, adhuc viuos offenderem, etiam ſcriptae relationes in tabulario vrbis publico obuenerunt, deſcriptiones iſtorum locorum ſatis amplas continentes, ex quibus, quid profecerim, non ſuperfluum erit indicare; tum vt *Strahlenbergium*, de ſcriptis Tanguticis ad Ieniſeam fluuium repertis differentem, illuſtrem, tum vt emendem locorum deſcriptionem *Bayerianam*, quam ex ore cl. *Meſſerſchmidii* ſe accepiſſe, beatus collega profeſſus eſt.

Strahlenbergius folium aliquod Tanguticum tachygraphico charactere exaratum exhibens, illud, et multa ſimilia, ad Ieniſeam fluuium, prope fluuiolum Kemtſchik, in

Sa-

Sacello quodam (*in einer Capelle*) inuenta eſſe tradit. (1) Haec qui legit, ambigere poterit de veritate illorum, quae de ſcriptis, ex ſeptem palatiis et ruderibus Ablakitianis allatis, a me dicta ſunt. Horum enim nulla ibi facta mentio eſt, quod vitio vertendum eſſet auctori, niſi in tabula ſua geographica ad Irtin fluuium verba quaedam adſcripſiſſet, ex quibus, illum veram ſcriptorum originem non ignoraſſe, palam eſt. Errat autem, dum ſacellum dicit, quaſi ex lapide vel ligno conſtructum, quae potius, vt dixi, ſpecus eſt, in rupe excauata. Errat etiam, dum Tangutica, Mongolica et Calmuccica omnia, ibi reperta, folia typis impreſſa eſſe, adfirmat. Sed non ſatis ipſe ſibi conſtat, dum mox addit, iſtud, a ſe exhibitum, folium Tanguticum manu exaratum eſſe.

B. *Meſſerſchmidius* Anno cIↄIↄccxxvIII ex itinere ſuo literario per Sibiriam inſtituto, redux factus, attulit ſcripta Tangutica et antiqua Mongolica, ex ipſa iſta ſpecu deſumta. Craſnoiarii illa nactus erat, a ciue quodam eius vrbis, qui ea olim, ſpecum viſitans, ſibi vindicauerat. Cumque Strahlenbergius Meſſerſchmidium eo tempore in itinere comitatus eſſet, folia nonnulla ab ipſo ſibi conceſſa retulit. Cur autem verum locum, aut conditionem eius, neſciuerit, certe coniectari nequeo. Meſſerſchmidium enim omnia probe cognita habuiſſe, fidem facit eius diarium, cuius pars quaedam apud Academiam noſtram ſcripto extat, vbi inter alia haec verba leguntur: *Anno* cIↄIↄccxxII *die* xIx *Februarii in vico quodam Medwedewa* (ditionis Craſnoiarenſis, ad Ieniſeam ſito) *retulerunt hoſpes et alii eius vici incolae: ad Ieniſeam fluuium,*

(1) pag. 312. ſqq.

um, ſupra fluuium Kemtſchik dimidii diei itinere, ad oſtium amnis Dſchakul, ſpecum extare, in qua varia curioſa, inprimis idola, tam virili quam foemineo habitu, et multa ſcripta reperiantur. De eo tempore, quo ſcripta Meſſerſchmidius Crasnoiarii accepit, diarium ſilet. Ita autem, vt ego accidiſſe dixi, idem ille homo, qui Meſſerſchmidio ſcripta tradidit, mihi retulit. Dicam iam, quae mihi de ſpecu iſta Ieniſeenſi cognita ſunt.

Decem circiter leucis ſupra oſtium fluuii Kemtſchuk, qui limites inter Imperium Ruſſicum et Mongolico-Sinicum in eo loco conſtituit, ex occidente Dſchakul, ſiue Tſchakul, amnis Ieniſeam influit, infra quem duae leucae ſunt, et ab occidentali ripa Ieniſeae fluuii tres leucae, vbi dicta ſpecus in rupe conſpicitur. Celebris montium Saianenſium catena hic ex auſtro in planitiem deſinere incipit, multis tumulis ſepulchralibus veterum colonorum frequentem, quorum etiam non pauci, lapidum ſtrue cumulati, ante ipſam ſpecum reperiuntur. Oſtium ſpecus Ieniſeae fluuio obuerſum, et adeo anguſtum eſt, ac humile, vt hominem non niſi flexo corpore admittat. Etiam internus ambitus non vltra orgyiam cubicam continet, dimidia eius parte infra oſtium ita in rupe excauata, vt homo in ſpecu erecte ſtans, extra intuentibus ſuperiore tantum dimidio corpore conſpici poſſit. Non naturae opus eſſe, ſed induſtria humana paratum, ex omnibus liquet. Extra ad vtrumque latus oſtii hominum ſimulacra, quae idola praedicantur, ex rupe ita ſculpta ſunt, vt dorſo cum ipſa rupe cohaereant, artificio, quod Gallica voce *bas relief* vocamus. Dimidiam autem hominis magnitudinem illa vix excedunt. Id, quod ad dextram

eſt,

idololatrica

Comment. Ac. Sc. Tom X Tab. VII.
p. 455.





Specus idololatrica
Comment: Ac. Sc. Tom X Tab. VII
p 458.
D.schakul r.
Ienisea fl.

eſt, dextram manum pectori admouet, ſiniſtram baculo, an dicam enſe? fulcit: id ad ſiniſtram, dextram ſemori, ſiniſtram pectori iungit. Praeter haec extra ſupra oſtium aliud ſimulacrum lapideum fuit, in quadam excauatione poſitum, quod hominem pedibus inflexis ſedentem referebat, at anno cIↄIↄccxxI a vicinis gentibus, neſcio in quem finem, ablatum eſſe conſtat. In ipſa ſpecu ad parietem oſtio oppoſitum tria porro idola extant, eadem ratione ac duo priora, eadem etiam magnitudine ex rupe ſculpta. Horum, quod in medio eſt, pedibus ſub ſemora inflexis tripodi inſidet, toto corpore nudo, manibus in gremium demiſſis. Illud ad dextram tunica ad genua vſque amictum, ſiniſtram manum pectori admouet, dextram libere remittit. Iſtud ad ſiniſtram toga indutum, ad pedes propendente, et mitram in capite geſtans, ſiniſtram manum remittit, dextram pectori imponit. Crasnoiarienſium aliquis huius ſpecus et idolorum ibi extantium iconem delineauit, quam addo. Tab. VII.

Scriptorum folia, quae, vt ex ſpeciminibus, a b. *Meſſerſchmidio* Petropolin allatis, et ex illo *Strahlenbergii* patet, Ablakitianis admodum ſimilia ſunt, per totam ſpecum diſperſa iacent. Multa etiamnum ſupereſſe dicuntur: at pleraque putredine corrupta. Non puto, ad hiſtoriam ſpecus pertinere, quod inter ſcripta etiam arcus et aliquot tela, nec non hordei modica penus inuenta ſit: tales enim reliquias maiori iure venatoribus adſcribas, qui forte in vicinia obambulantes, a tempeſtate oppreſſi, vel ad pernoctandum in ſpecum ſeceſſerunt, eandemque his rebus ex incuria auctiorem reddiderunt. De auctore huius monumenti idololatrici nihil habeo, quod dicam. Fama eſt,

eſt, vicinas gentes quotannis accedere, et idolis libamina offerre. Nec inſuetum gentibus idololatricis morem eſſe, delubra in rupibus exſcindendi, duobus apud *Haldium* (1) exemplis probatur.

Teſſum fluuium et aedes ad illum extantes Craſnoiarenſes ita deſcribunt. Oritur ille fluuius ex lacu *Sanjchin Dalai*, et occidentem verſus in alium lacum exoneratur, quem Mongolenſes non niſi generica adpellatione *Dalai* vocant, vicini autem Tatari Saianenſes *diuerſicoloris* nomen, ipſorum lingua *Alak-Kul*, illi indunt. In vicinia ex euroauſtro Charatal fluuius profluit, qui Selengam ſubit. Ex borapeliote Ieniſeae fontes non procul diſtant. Verſus meridiem autem quatuor vel quinque dierum itinere a Teſſo peruenitur ad fontes ſuperioris Irtis fluuii, qui in lacum Saiſſan duobus alueis exit. Ieniſeam ducem ſequuti ſunt, qui olim iter ad Teſſum fluuium fecerunt, ripam eius orientalem legentes vsque ad confluentes duorum riuorum, *Ulu-kem* et *Bei kem* dictorum, qui Ieniſeam fluuium conſtituunt. His ad oſtia traiectis, per campos aridos et deſertos, recta via ad Teſſum perrexerunt. Aedes duae ſunt ad dextram fluuii ripam, aequali fere ab vtroque lacu ſpatio, in loco editiore rupeſtri ſitae, ex latere non cocto ſtructae. Vnae duabus contignationibus conſtant, quarum inferiorem tantum noſtri viſitarunt, et aliquibus in locis ad parietes picturas, in aſſeribus pictas, et vernice obductas, obſeruarunt. Ex poſtica parte quaſi atrium eſt, et in illo ſecluſorium, aſſeribus cinctum, in quo ſcripta iacent, ianua cum conclaui contigua aditum in illud praeſtante. Non audiui autem, vnquam ex his ſcriptis quaedam Craſnoia-

(1) Tom. IV. p. 444. et 454.

noiarium perlata eſſe. Alterae aedes his proximae vnius contignationis ſunt, omnibus ornamentis aliisque rebus vacuae. Dicunt inter has aedes et lacum Sanſchin eiusdem generis alias aedes in ſiniſtra ripa Teſſi fluuii reperiri, quas autem nemini noſtratium videre contigit. Ceterum haec illa regio eſt, quae perpetuis bellis a Calmuccis et Mongolenſibus vexata fuit; cumque illa inter vtrumque regnum fere limitanea ſit: ideo ex occidente laudati fluuii a Sinenſibus Mongolenſium patronis perpetuae excubiae aguntur; quin etiam in litore auſtrali lacus Sanſchin munimentum Sinenſes exſtruxerunt, palis circumdatum terrae infixis, quod aliquot millia praeſidiariorum cuſtodiunt. Conditor aedium Looſanus Mongolenſium Princeps fuiſſe perhibetur, Altin-Chani filius, qui annis cIↃIↃCLX — cIↃIↃCLXXX floruit, et in iſta regione ſuas ſedes habuit: a Buſchuchtuchano autem Calmuccorum Principe anno cIↃIↃCXC regno eiectus eſt. Hinc Mongolica voce *Looſan-kît*, Ruſſice Лозановы палаты, vocantur. Antiquiores certe ex ſtructura nemo facile putabit, nec, qui earum gentium res geſtas nouit, recentiores credet. In regione enim perpetuis bellis expoſita, quis tales aedes poſt Looſanum condere occeperit?

His praemiſſis, *Bayerianam* (1) locorum deſcriptionem conferamus. Confuſo rumore *Bayerus* de ſeptem palatiis audiuerat. Igitur rogauit *Meſſerſchmidium* ex Sibiria tunc redeuntem, eiusdemque generis ſcripta, qualia priora erant, quae ex ſeptem palatiis deſumta praedicabantur, afferentem, vbi iſte locus ſitus ſit? Hic oſtendiſſe dicitur: *ſitum fuiſſe ad Irtin fluuium, haud longe ab eius fontibus, et ab*

(1) in praef. muſei Sinici p. 109.

lacu Sangin Dalai. Heu quanta locorum confuſio! quae meo quidem iudicio viro, per nouem annos in Sibiria ſatis ſuperque verſato, tribui neutiquam poteſt. Irtin quidem fluuium vltra vrbem Taram ille non frequentauit. Reſcire autem ab incolis facili negotio potuit, ſeptem palatia non ad fontes eius ſita eſſe. Strahlenbergius, homo in captiuitate detentus, et non tot, quot Meſſerſchmidius, ſubſidiis inſtructus, qui etiam ſeptem palatia et Ablakitum ipſe non vidit, tamen vera illis loca in ſua tabula geographica aſſignauit. Curque lacum Sangin immiſcuit? qui idem eſt cum lacu Sanſchin, ex quo Teſſus oritur. Notitiam certe de terris Mongolenſium ſatis luculentam ſibi comparauit, quam vt verum ſitum lacus Sanſchin et fontium Irtis fluuii et Teſſum neſciuiſſet. Legimus enim in ipſius diario: cIↃIↃCCXXII *die* VI. *Martii Craſnoiarii ſibi a quodam interprete Calmuccico, ex vicinia lacus Saiſſan oriundo, et terrarum Mongolenſium adprime gnaro, relatum eſſe, Irtis fluuii fontes quatuor dierum itinere verſus auſtrum a fluuio quodam Ktieſch* (Teſſus eſt) *diſtare, hunc autem duobus lacubus terminari, quorum alter, verſus occidentem ſitus,* Sangin, *alter verſus orientem* Sankin, *vterque cognomento* Dalai, *i. e. mare, nuncupetur.* Addidit interpres Sankin Dalai *ſignificare* mare ventoſum: Sangin *autem alterum lacum dici a quodam ſacrario, in eius vicinia ſito. Sangin* Meſſerſchmidius ſcripſit pro *Sanſchin*, gallicam literarum pronunciationem imitando, vt *ſch leue* ſiue ж Ruſſorum exprimeret. Eſt autem illud nomen apud Mongolenſes et Calmuccos hominibus tribui ſolitum. Fieri ergo potuit, vt ſacrificulus aliquis, *Sanſchin* dictus, alteras iſtas aedes, quas lacui Sanſchin propiores

dixi

dixi, ſibi exſtruxerit, *Sanſchin kit* ab ipſo vocatas, vnde et lacui illud nomen inditum. Quod vero eius et fontium Irtenſium mentionem fecerit *Meſſerſchmidius*, cum de ſeptem palatiis quaereret *Bayerus*, id ego ita capio. *Meſſerſchmidius* primo loco ſpecum idololatricam Ieniſeenſem narrauit, ex qua ſcripta ab ipſo allata deſumpta erant. Huius occaſione etiam memorauit aedes ad Teſſum fluuivm prope lacum Sanſchin ſitas, ſimilemque ſcriptorum farraginem continentes, et ab illis aliquot dierum itinere Irtin fluuium oriri dixit, ad quem ſeptem palatia extent. *Bayerus* autem, cum Geographiam iſtarum regionum non ſatis perſpectam haberet, alia ex narratis oblitus, alia non recte intellexiſſe videtur, ſicque inueterata perſuaſione deceptus, ac ſi ſeptem palatia vnicus locus eſſent, in quibus ſcripta Tangutica reperta fuerint, omnia quantumuis longe diſſita alia eiusdem farinae loca iis aſſimilauit.

Plura geographiam iſtarum regionum illuſtrantia in medium proferre poſſem: Sed paucis me expediam. Tabula *Strahlenbergiana* Teſſum fluuium, quem Kteſſ, dicit ex lacu Sengin in lacum Sankin verſus Euroauſtrum deriuat, id quod ex narratione, quam Meſſerſchmidio factam ſupra diximus, quamque Strahlenbergius praeſens audiuit, ortum eſt. In eo autem hic ſcriptor ſibi non ſatis conſtat, quod de lacu Sengin dicit, illum mare ventoſum, et Chinchintalai a *M. Paulo Veneto* vocari. Meſſerſchmidius enim, vt ante vidimus, interpretationem maris ventoſi de lacu Sankin, non Sangin, ſibi datum eſſe tradit: et *Veneto* (1) Chinchintalas, non Chinchintalai, nomen regionis eſt, non lacus, quod mihi *Chinchin-talà* legen-

Mmm 2 dum

(1) L. I. C. XLVII.

dum videtur. *Talà* enim, quod Strahlenbergius cum *dálai* confiidit, et ideo per *talai* expreſſit, in lingua mongolica campum ſignificat ſiue planitiem, qualem hic locorum степь dicere ſolemus. Tabulae *Haldianae* Teſſim fluuium ex Borapeliote verſus Noto Zephyrum non quidem ex lacu, ſed quaſi ex ſcaturigine, in lacum quendam *Upſa* dictum decurrentem ſiſtunt. Alium autem lacum *Sanguin Talguin nor* ex oriente ponunt, qui ex Teſſo nullas aquas accipiat. Et has fere *Haſiana* tabula imitatur, ex Strahlenbergiana tantum *Chinchintalai* nomen aſſumens, lacui Sankin additum. Haec cum noſtris conciliaturus concedo, lacum *Sanſchin*, quod Mongolicum illius nomen eſt, a Saianenſibus Tataris prope habitantibus *Upſa* dici. Concedo etiam *Sankin* et *Sanguin* idem lacus nomen eſſe, qui cum Teſſo fluuio nihil commune habeat, ſicque Meſſerſchmidio, acſi Teſſus ab illo recipiatur, falſo relatum eſſe. Sed volo etiam, vt mihi concedatur, alium lacum eſſe, cui Teſſus ex lacu Sanſchin vel Upſa profluens ſuas vndas inferat. Hoc enim relationes Craſnoiarenſium, qui iſta loca ſaepe frequentarunt, omnino poſtulant.

De aliis aedificiis antiquis in Sibiria extantibus, de quibus incertum eſt, an eidem vſui inſeruierint, hoc loco agere ſuperſederem, niſi affinitas argumenti id exigeret, quod alibi forſitan non e re foret tractare. Sunt nimirum aedificiorum rudera in terris Baſchkirorum ad Toguſacum et Uuelcam fluuios in Uium, qui Tobolem intrat, fluentes, quae a Ruſſis communiter Чудскïе палаткu appellantur, quaſi *Tſchudorum palatiola* dicas. Tſchudi autem Ruſſis omnes veteris aeui cuiusuis regionis coloni dicuntur,

euntur, cuius demum illi gentis fuerint. Illorum ea, quae ad Uuelcam ſunt, ego ipſe vidi. Cum enim Anno cIↄIↄccxLI Baſchkirorum regiones peragrarem, et nomen aedificii audirem tam magnificum, etiamſi locus plus quam nonaginta leucis a via diſtaret, et a Caſaccorum incurſionibus non minus periculoſus eſſet, non potui tamen me continere, quin eo proficiſcerer. Sumto itaque ex arce Tſchilaebienſi ſufficienti praeſidio per arcem Itkulenſem, quae vltima in ea regione Ruſſorum colonia eſt, ad Uuelcam perueni, et obſeruaui rudera ad ſiniſtram fluuii ripam in planitie elatiore ſita, quindecim leucis ob oſtio eius diſſita. Aedificium vnius conclauis fuit, quadrangulare, ex latere cocto ſtructum, parietibus aequali menſura praeditis, qui tres et dimidiam orgyiam longitudine vix excederent, craſſitie dimidiam vlnam aequarent, altitudine, quod nulla amplius tecti veſtigia ſuperſint, et ſuperne lateres hinc inde multi excidiſſe videantur, incerta quidem, quae tamen in aliquibus locis adhuc tres orgyias efficit. Anterior facies, auſtro oppoſita, ornamentis quibusdam architectonicis gaudet, columnas ſiue paraſtatas et proiecturas aut loricas quaſi referentibus. Eadem autem media ſui parte, vbi oſtium fuit, a faſtigio corruit, qualis quidem apertura etiam in pariete ſeptentrionali conſpicitur, minor autem, quae ſpectatores inducere poſſet, vt crederent, aliud ibi oſtium e regione prioris fuiſſe. Sed tum indoles aedificii, quod, ſi fanum fuit, pluribus oſtiis inſtructum fuiſſe nequit, tum etiam concameratio quaedam ſubterranea fornicata, quae extra ad parietem illum extat, et ſolum in eo loco altius reddit, quam vt oſtio conuenire poſſit, talem coniecturam refutant. Lateres, vt vt cocti,

et ſatis rubri, manibus tamen omnes facile franguntur. Plerique formam praeſerunt quadratam, nonnulli oblongam, vt noſtri ſolent, noſtris autem tenuiores ſunt, nec inter ſe craſſitie aequales. Sic et lutum, quo cohaerent, non bonae indolis fuiſſe videtur. Calcis autem indicia prorſus nulla. In pariete orientali, vbi lateres aliquot exciderunt, trabs ex pinu conſpicitur, eidem fini interpoſita, quem in Calbaſſunicis et ſeptem palatiorum ruderibus obſeruaui. Tectorium, ſi quod adfuit, temporis iniuria omne periit. Feneſtrae nullae adparent. Forſitan quod ſupra oſtium in pariete auſtrali, tum etiam in pariete ſeptentrionali, vbi apertura eſt, vna aut altera fuerunt, de quibus autem non certo conſtat. Forſitan etiam lumen per apertam ianuam aut per tectum intrauit. Concameratio fornicata, de qua dixi, quod extra ad parietem ſeptentrionalem extet, maximam partem collapſa eſt, et tum ſuis tum aedificii ruderibus plena. Hinc quam profunda fuerit, diiudicare haud potui. Amplitudinem autem diametralem, rotunda enim eſt, duarum orgyiarum animadverti. Alia ipſi ex oriente ad latus eſt, contigua, oblonga, vlnam longitudine, latitudine autem et altitudine ſemi vlnam aequans. Cui vſui hae concamerationes fuerint, certe diuinare nequeo. Si ſepulchra credes, rem concipies, genio gentis aduerſam. Fanum enim profanatum dicerent, ad quod mortuus tam propinque ſepeliretur. Si caueam ſtatues, cui vſui illa fuit? vt vbi in illam aditus? huius enim veſtigia nulla obſeruaui. Ex maiori concameratione inter laterum ſtruem duae betulae procreſcunt ſatis procerae, et craſſitie brachium robuſti hominis aequantes, quae indicio ſunt, fornicem non hodie aut

nudius

medius tertius corruiſſe. Baſchkiri, vicinarum regionum incolae, quorum plures ego ſaepius interrogaui, annon ipſis de hiſtoria huius aedificii aliquid ex narratione maiorum conſtet? nihil mihi dicere potuerunt. Sua lingua *Keſchenä* vocant, tum haec, tum alia eiusdem generis rudera, quae vox nihil amplius, quam quod Ruſſica палатма, inuoluit. Bucharorum enim habitacula, quae partim ex latere, tum cocto, tum incocto, partim autem ex mero luto conſtructa ſunt, eadem adpellatione vocitant. Aedificii ad Tuguſacum extantis eadem omnino ratio perhibetur. Talia plura in Caſaccorum confiniis ſita referuntur, inprimis magnificum vnum, variis coloribus pictum, ad Turuchaium fluuium, prope eius oſtium, quo in lacum Akſagal ſe exonerat. Sed quid plura memoro? Quae adhuc dixi, ſatis ſuperque ſufficiunt, fanorum in quibus Tangutica ſcripta reperta ſunt, rationem commonſtrandi. Reliquum eſt, vt dicam, quid in interpretando folio Tangutico Furmontiano in Sibiria praeſtiterim.

Cum anno cIↄIↄccxxxv Selengiae verſarer, operae pretium mihi viſum eſt, caſtra *Lobſani*, Principis Mongolici, tribus *Zongol*, viſitare, qui tunc quidem octoginta circiter leucas ab vrbe iſta ad Tſchicoium fluuium ſub poteſtate Ruſſica degebat, tum vt mores gentis obſeruarem, tum quoque, quod audiuiſſem, ſacrificulum quendam non infimae conditionis, ex Tangutia oriundum, apud Principem commorari, cuius opera de cultu Tangutico et Mongolico vberiorem mihi notitiam comparare, nec non Tangutici folii fide dignam interpretationem obtinere ſperabam. Non infructuoſum ſane iter fuit. Sacrificulus, cui cum Principe aequalis a ſuis honor exhibebatur, ex eo ordine

erat,

erat, qui Mongolenſibus et Calmuccis *Gelun* vocantur. *Zordſchi* ipſi nomen erat, homo ad ſuae gentis morem non indoctus, affabilis, et ſi quis alius officioſus. Talem deprehendens, ſtudui, vt, quod donis fieri ſolet, arctiorem cum ipſo amicitiam contraherem, quam ille tam in iſtis caſtris, quam aliquot diebus poſt, cum Selengiae me inuiſeret, et poſtea etiam per literas ingenue coluit. Omnino multa ab hoc viro profeci, in iis potiſſimum, quae de ratione cultus Tangutici ſcire cupiebam, nec prorſus in caſſum mihi ſpes fuit, quod interpretationem folii Tangutici ſpectaret. Prima cura fuit, vt verſionem Furmontianam amico explicarem, ne, ſi forte illa ſatis congrua ipſi viſa fuerit, ſuperfluos labores expoſcerem. Ille autem maximo ſtupore meo hanc ne hilum quidem cum Tangutico textu conuenire aſſeuerauit. Rogaui deinde ſacrificulum, vt ipſe operam ſuam interpretationi conferre non grauaretur, quod cum libenter ſe facturum promiſiſſet, Selengiae in muſeo meo laborem voluit perficere. Vix autem incepit verſionem, cum animaduertit, ad integrum folium abſoluendum plus temporis requiri, quam quod humaniſſimus vir mihi deſtinaſſet. Ideo poſt aliquot lineas ſubſtitit, reliqua domi ſe interpretaturum dicens. Ego autem hoc concedere non potui. Inſtabat enim tempus, quo iter perſequendum erat: nec perſuadere volui, vt me praeſente pergeret, ne alia perquirendi facultate me fraudarem; quin viſum fuit, vel ex tali ſpecimine totam cauſam ſatis ſuperque cognitam fore. Rogaui tantum, vt ſuam quoque textus Tangutici pronunciationem adſcriberet, quod fecit. Haec lingua et literis Mongolicis ſcribebantur. Defuit eo tempore interpres,

qui

qui Mongolica in aliam mihi notam linguam transferret. Nam etiamſi plures eſſent, qui Mongolicam linguam aeque ac Ruſſicam ſatis commode loquerentur, et in ſermonibus miſcendis operam ſuam non inutiliter praeſtarent, nemo tamen ſublimibus, quod dicebant, locutionibus ſacrificuli, quibus in ſcriptione vſus eſſet, transferendis, parem ſe pronunciauit. Poſt aliquot menſes, quibus Nertſchiam totamque regionem Argunenſem et extremos Sinenſium limites viſitauimus, cum Vdinii aliquam moram facere cogeremur, impetraui a Praefecto Selengienſi virum ex Ruſſis, qui ipſe literas Mongolicas intelligeret, aliumque ex ſacrificulorum familia, gente Mongolenſem, qui, quae difficiliores eſſent locutiones, orali circumlocutione clarius explanaret. Sed nec horum opera multum profeci. Obſcuritatis verſionem Mongolicam arguebant, quae inde orta ſit, quod ſacrificulus Tangutanus linguam Mongolicam non ſatis calleret. Id tamen intellexi, initium eius his verbis conſtare: *Qui intellectu* (*conſcientia*, *corde*,) *ſuo omnia comprehendit* (*intelligit*) etc. Haec iam nihil certe cum interpretatione Furmontiana commune habent, id quod etiam de ſubſequentibus, cum verſionem Furmontianam illis explicarem, et quaererem, annon aliquod verbum occurrat, quod ei verſioni reſpondeat, interpretes teſtati ſunt. Si forte aliquis, quod tamen non facile futurum ſpero, de veritate horum dubitauerit, illi ſcripta teſtimonia afferre poſſum, quae fidei faciendae cauſſa, ne aliquid finxiſſe videar, ab iſtis hominibus mihi dari curaui. Praeterea teſtem inuoco Cl. Gmelinum, qui omnibus meis ſtudiis interfuit. Teſtimonium etiam praebeat ipſa a ſacrificulo data verſio Mongolica, quam vna cum

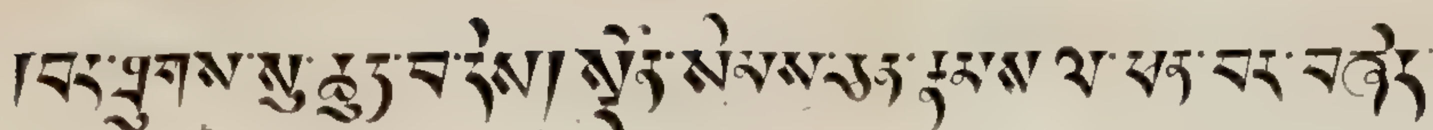
 textu

textu Tangutico, vt aeri incidatur, addo. In iisdem tabu-
Tab. VIII. et IX. lis textus Tangutici pronunciationem adſcripſi, vnam a ſacrificulo Mongolicis literis expreſſam, alteram ſecundum Mongolicas latinis literis redditam, vt Germani eas efferre ſolent. Et hanc vltimam quidem in gratiam illorum, qui literis Tanguticis pernoſcendis operam dare cupiunt, textui Tangutico proxime ſubieci. Gauiſus ſum, eam cum regulis olim a me concinnatis admodum conuenire, quas, ſi operae pretium videbitur, alio loco dabo. Verſionem autem Mongolicam ſtudio ſeruaui, ſpe fretus, fore, vt interpretem aliquando inuenirem, literis Mongolicis ſatis innutritum, qui vel coniectando eius ſenſum aſſequi poſſit. Nec feſellit euentus. Illuſtri Goldbachio hanc gratiam debemus, quod, quo eſt in quaeuis literarum ſtudia incredibili amore et induſtria, etiamſi Muſis ereptus videatur, ad magis ardua negotia admotus, non defuerit meis precibus, quin per interpretes linguarum Mongolicae et Calmuccicae, qui Petropoli in collegio Imperiali res exteras curante aluntur, periculum fieri curauerit, annon verſionis Mongolicae aliquem ſenſum dare poſſint. Ecce hic egregium ſe praeſtitit *Petrus* ille *Smirnouius*, linguae Calmuccicae peritiſſimus interpres, quem iam alias laudaui. (1) Hic adhibito in opem Mongolenſe quodam, homine ab infantia inter ſacrificulos ſuae gentis educato, et omne dictionis genus, quod non niſi in ſacris eorum libris occurrit, egregie callente, concinnauit verſionis Mongolicae verſionem Ruſſicam, quod ad indolem ſacri ſtili, qui

(1) in collectione notitiarum ad hiſtoriam Ruſſicam ſpectantium, quam olim lingua germ. edidi. P. III. p. 275.

ba…

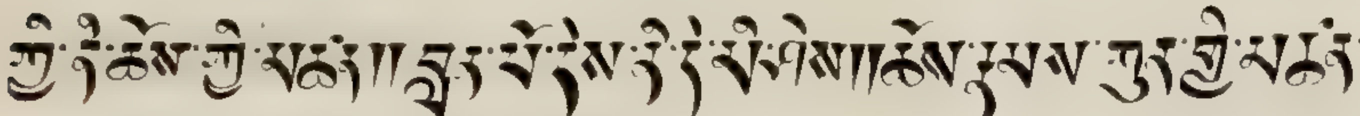
hai,



bar tug[k] su tschud ba deĭ; don sem dschan nam la pan bar sched



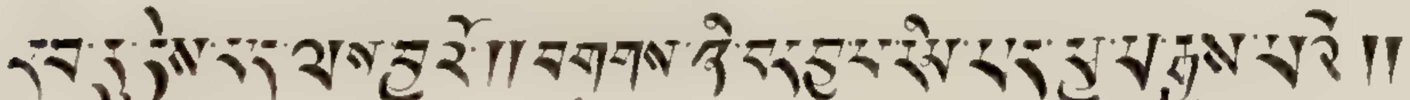
naĭ, di dag[k] tam dschadschod, schei dscha bar ni mi schei so: . tschoi nam



dschi ni tschoi dschi tsan: lun bo dei ni de mi schei: tschoi nam qun dschi tsan

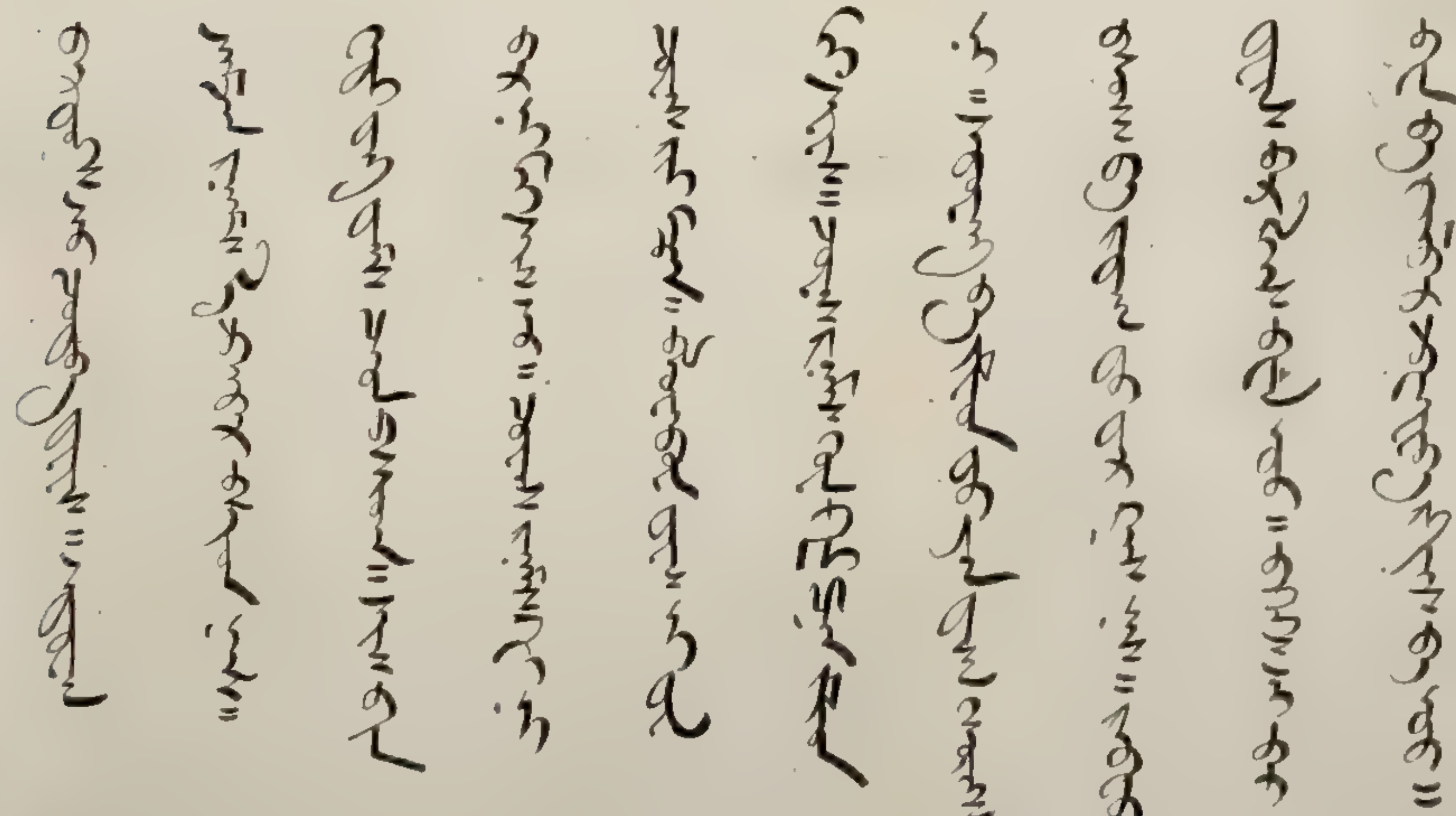


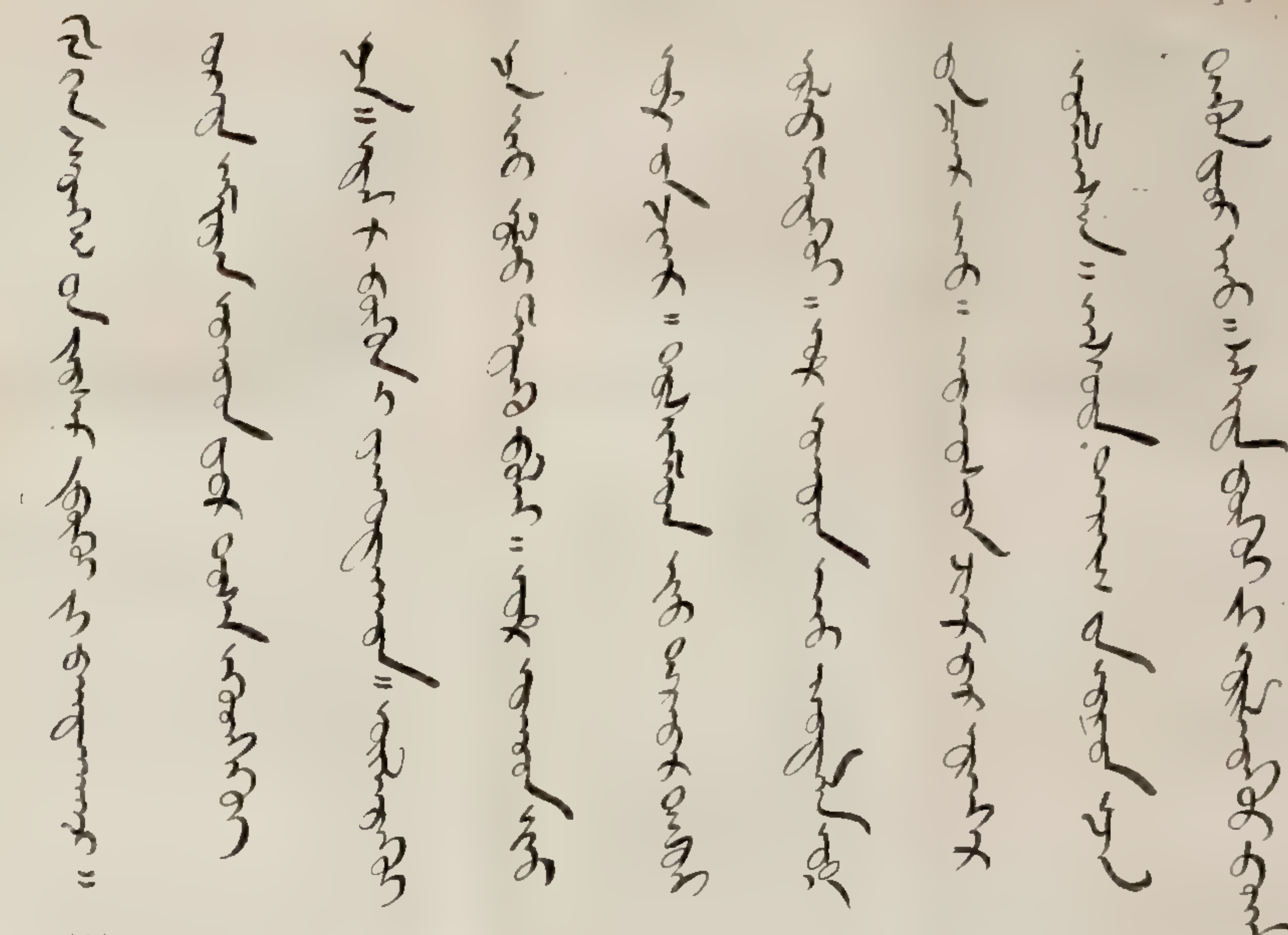
njid ni dong ba njid du jang dag[k] sung: dag[k] ba dag[k] du der nai nai



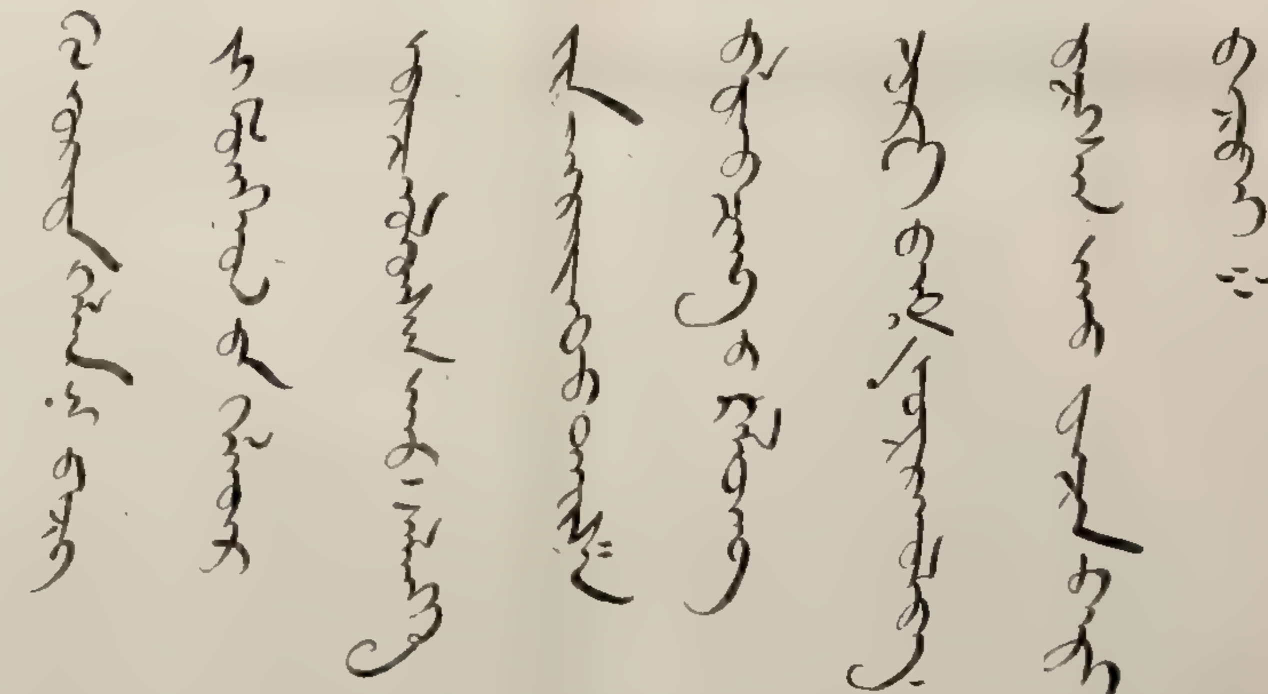
rab du dei bar lai dschao: geg[k] schi bar dscha barim bortscheba dschi bao

Pronunciatio textus Tangutici literis Mongolicus expressa





Testimonium interpretis, quod versioni suæ adscripsit



qui multa lectorum diuinationi relinquit, ſatis luculentam. Eam ego hic ſub finem latinam faciam, et addam verſionis Mongolicae diſtinctam pronunciationem, noſtris literis expreſſam, quibus omne negotium expeditum, et liti promouendae obicem poſitum eſſe mihi blandior.

TEXTVS MONGOLICI PRONVNTIATIO
CVM INTERPRETATIONE VERBALI.

Tſchin ſedkilun ſubſara bjukui bagadchaktſchi
Firma conſcientia mediante omnia parui pendendo

urida amitan nogud-dur tuſa eguiuskekui eze.
in principio viuenti cuicunque auxilium oritur inde.

edeger bjukuni dagudagun, uiledkui eze anu uliu
quibus omnibus conſummatis, futurum quid, nemini

medeku bolai. Nom nogud anu nomun tſchinar.
notum eſt. Religio tota namque religionis explicatio.

Tuſchimed anu tereber teguni uliu medekui.
Magnates autem intellectu (ſuo) ea non comprehendunt.

Nom nogud anu chotola nomun tſchinar anu.
Religio tota videlicet omnia (continet) religionis explicatione.

Chogoſun tſchinar ber uneger nomlakſan, naſuda
Incorporeorum explicatio verè praedicata eſt, ſemper

tarni ſun oron eze tegun dur anu. Aſchida bjukui ii
ab occulatione id dependet. Semper omnes id
uiledkui bolai.
inuenire poſſunt.

TESTIMONIVM INTERPRETIS

Urida Töböd kelenni bitſchik ii Mongolun
Ante ex Tibetica lingua ſcriptum hoc in Mongolicam

keleber ortſchigulukſan anu Selengein
linguam vertit (apud) Selengienſem

chariatu taiſcha Lobſangi Gelun
ſubditum principem Lobſanum (commorans) Gelun

Zordſchi Lama ortſchigulba.
Zordſchi Lama vertit.

Bitſchikſen anu Datſchin Bandi bitſchidei.
Scripſit Datſchin Bandi ſcripſit.

DE

DE TRANSITV LVNAE
PER HYADES
d. $\frac{22.\ Decembr.}{2.\ Ianuar.}$ *an.* $173\frac{7.}{8.}$
PETROPOLI OBSERVATO
ET METHODO DETERMINANDI LOCVM STELLAE AD LVNAM, QVANDO HAEC ISTAM TRANSIT.

G. Heinſius.

§ 1.

Elegantiam et vſum obſeruationis tranſitus huius lunae per Hyades occultationum frequentia commendat. Quatuor ſcilicet ſtellae interuallo aliquot horarum diſcum lunarem ſubire viſae ſunt. Vt autem obſeruatio magis completa ſit, plura Palilicii ad lunam loca determinaui. Obſeruationes et deductiones ſequenti modo in ordinem redactas praemitto, methodos obſeruandi et quaeſita deducendi poſtea explicaturus.

Ordo obſeruat.	*Tempus horol.*	*Tempus verum à meridie d. 2. Ian. ſt. n. computatum.*	*Obſeruata et deducta.*
	hor. min. ſec.	*hor. min. ſec.*	Finito maxima ex parte crepuſculo veſpertino, luna iam fixam, quae prima Hyadum vocatur, tranſiit. Nec ſtella quam per *d* in fig. 1. deſigno, in conſpectum venit, niſi cum notabili interuallo à

 lim-

limbo lunae lucido iam diſtaret. Acceſſit deinceps luna ad ſtellam a *Bayero* per θ notatam, quae duplex eſt, Borealior ex his duabus ſtellis a *Flamſtaedio* in Catalogo Brittannico per 1 ad θ, auſtralior per 2 ad θ, notae *Bayeri* conformiter diſtinguitur, et vtraque 5tae magnitudinis aeſtimatur.

Phaſis lunae erat gibboſa creſcens ex nomenclatura *Hevelii*, vnde propter nimium eius lumen longioribus tubis opus erat pro obſeruandis harum ſtellarum a luna occultationibus. Cl. *de l'Isle* tubo Newtoniano, ego tubo 15. ped. vſi ſumus. Stellae ad limbum lunae obſcurum diſparuerunt, ad lucidum emerſerunt.

h. ′ ″

1. 7. 24. 52 Tegitur ſtella 1 ad θ. ex obſeruatione. Situs huius ſtellae mox occultandae reſpectu macularum lunarium ita comparatus erat, vt linea a ſtella ad centrum Copernici ducta tranſiret inter Keplerum et Marium

			rium, magis tamen ad Keplerum, quam Marium accederet.
		h. ′ ″	
2		7.28. 8	Occultatur ſtella 2 ad θ. ex obſeruatione.
	h. ′ ″		
3	2.49.11	7.56.48	Ex obſeruatione deprehenſa eſt differentia aſcenſionum rectarum centri lunae et Palilicii 7′ 27″ in tempore primi mobilis; et differentia declinationum eorundem 35′ 50″ circuli maximi.
4		8. 2. 4	Coniunctio viſa ſtellae 2 ad θ cum centro lunae. Diſtantia centrorum minima 6′ 43″ circuli maximi. Stella a centro lunae auſtrum verſus abeſt. Ex calculo
5		8. 2.26	Coniunctio viſa ſtellae 1 ad θ cum centro lunae. Diſtantia centrorum minima = 1′ 6″ circuli maximi. Stella a centro lunae auſtrum verſus diſtat, ex calculo.
6		8.36. 0	Emergit 2 ad θ ex calculo.
7		8.40. 0	Emergit 1 ad θ ex calculo. Emerſiones vtriusque ſtellae ipſas non obſeruauimus, licet obtutu fixo per tubos memoratos ad iſtas attenderemus.

Prop-

		Propter lumen enim lunae admodum forte ſtellae ad limbum lucidum emergentes non niſi interuallo aliquo iam ab iſto limbo diſtantes in conſpectum venerunt. Hoc modo quidem ſtellam 2 ad θ non multum a limbo lunae diſtantem primo vidimus; ſed tempus primae huius apparitionis non notauimus ad Emerſionem ipſius 1 ad θ attenti, cuius obſeruationem ſperabamus certiorem. Spes non ſucceſſit. Primo quidem apparuit 1 ad θ, $8^h\ 41'\ 15''$ temp. ver. in tubo 15. ped. aſt tunc iam diametro Copernici a limbo lunae lucido aberat. Cl. *de l'Isle* eandem quoque ſtellam non niſi iam aliquo interuallo a limbo lunae lucido diſtantem per Tubum Newtonianum conſpexit, ex quo interuallo aeſtimauit emerſionem eius circiter factam fuiſſe $8^h\ 40'$ Id quod optime cum calculo conuenit.
8	h. ′ ″ 8. 46. 16	Tegitur ſtella a luna, quam in

			in fig. 1 *c* voco et ſextae magnitudinis cenſeo. Circa inſtantem occultationem ſtella in linea recta erat cum centro Platonis et macula aliqua anonyma, quae media eſt inter montem Baroniſium et Atlantem minorem iuxta nomenclaturam *Heuelii*. Ex obſervatione.
	h. ′ ″	h. ′ ″	
9	4. 13. 15	9. 20. 23	Circa culminationem lunae ex huius et Palilicii tranſitu per meridianum a Cl. *de l'Isle* obſeruato determinata eſt differentia Aſcenſionum rectarum centri lunae et Palilicii $5' \, 15\frac{1}{3}''$ in temp. 1mi mobilis; et differentia declinationum eorundem $27' \, 35''$ circuli maximi.
10		9. 21. 23	Coniunctio viſa centri lunae et ſtellae *c*. Diſtantia centrorum minima $= 6' \, 2''$ circuli maximi, qua ſtella borealior erat centro lunae. Ex calculo.
11		9. 56. 30	Emergit ſtella *c*. Ex calculo obſeruationem huius emerſionis de induſtria omiſimus, certi, iſtam propter exiguam

ſtellae magnitudinem non fore ſucceſſuram.

Luna ad Palilicium appropinquabat, vnde denuo poſitionem eius ad lunam iuxta methodum poſtea explicandam determinaui. Deprehendi autem inter Palilicium et centrum lunae

Differentiam

	h. ′ ″	h. ′ ″	*Aſcenſionum rectarum in temp. 1mi mobilis.* ′ ″	*Declinationum in partibus circuli maximi.* ′ ″
12	5. 26. 39	10. 33. 21	3. $21\frac{1}{3}$.	21. 26.
13	— 37. 25	— 44. 3	3. $2\frac{3}{4}$.	20. 20.
14	— 44. 47	— 51. 23	2. 51.	19. 58.
15	6. 2. 34	11. 9. 3	2. 23.	18. 32.
16	— 20. 32	— 26. 56	1. $53\frac{1}{4}$.	17. 2.
17	— 28. 38	— 34. 58	1. 40.	16. 9.
18		12. 18. 45		
19		12. 38. $35\frac{1}{2}$		

Palilicium diſparet ad limbum lunae obſcurum. Paulo ante diſparitionem Palilicium in linea recta circiter fuit cum centris macularum Platonis et Eudoxi. Ex obſeruatione.

Coniunctio viſa Palilicii et centri lunae ex obſeruatione Im-

	h. ′ ″	
		Immerſionis et Emerſionis eius deducta. Diſtantia centrorum minima 12′, 37″ circuli maximi, qua Palilicium borealius erat centro lunae, ex duratione occultationis definita.
20	12. 58. 26	Emergit Palilicium. Huius emerſionis obſeruatio optime ſucceſſit. Stella ad limbum lunae lucidum inſtar puncti luminoſi excreſcebat et per duo circiter ſecunda temporis in limbo morabatur, priusquam certa et lumine ſolito inſtructa in contactu limbi apparuit. Tempus certae huius apparitionis fuit 12^h 58′ 27″ vnde propter moram iſtam momentum Emerſionis 12^h 58′ 26″ conſtitui. Obſeruatio haec peracta eſt tubo 15. ped. Cl. *de l'Isle* qui emerſionem iſtam per Tubum Newtonianum obſeruauit, momentum eius 6. ſecundis ſerius ſeu 12^h 58′ 32″ annotauit. Poſtea denuo loca Palilicii ad lunam obſeruaui et deprehendi inter Palilicium et centrum lunae

			Differentiam.	
			Aſcenſionum rectarum in temp. 1mi mobilis	*Declinationum in partibus circuli maximi.*
	h. ′ ″	h. ′ ″	′ ″	′ ″
21	8. 4. 34	13. 10. 21	1. 1¼.	11. 11.
22	8. 10. 40	13. 16. 25	1. 10¼.	10. 46.

§. 2. Monenda quaedam ſunt de hac recenſione. In iſta rite diſtinxi momenta quae immediate ex obſeruatione habentur, ab iis, quae ex calculo deducta ſunt. Cl. *de Isle* et ego ſeiuncti phaenomena 1, 2, 8, 18, 20, obſeruauimus et tempus iuxta diuerſa horologia notauimus. Facta horologiorum comparatio conſenſum obſeruationum 1, 2, 8, 18, intra ſecundum temporis fere monſtrauit. Diſcrepantia tamen aliqua prodiit in obſeruatione 20, vt monui; horologiorum licet mutua relatione non mutata, vt ex comparatione iſtorum innotuit. Tempus horologiorum ad tempus verum reduxi ope obſeruatarum culminationum Palilicii d. 2. et 3. Ianuar. et culminationum Solis d. 3. et 4. Ianuar: Hanc vero reductionem ad quatuor horologia, praecipue in obſeru. 1, 2, 8, 18, 20, examinaui et exoptatiſſimum conſenſum deprehendi.

§. 3. Ad obſeruanda lunae loca ad Palilicium quadrantem portatilem radii 2. ped. adhibui, teleſcopio inſtructum, in cuius foco quatuor fila HR, VT, Oo, Qq ad angulos ſemirectos in centro communi C. adornata ſunt. Tubus ſic diſpoſitus fuit, vt filum HR proxime ſitum horizontalem, filum VT verticalem nanciſceretur; poſitio enim exacta horizontalis vel verticalis filorum non requiritur. His praeparatis ad tempus horologii notaui appulſus tum limbi lunae luminoſi tum Palilicii ad tria fila,

qua-

quacunque iſta fuerint. Obſeruationes habitae ſunt ſequentes, quas iisdem numeris in fronte diſtinxi, quibus obſeruationes reſpondentium locorum lunae ad Palilicium in recenſione §. 1. notantur.

Obſeru. 3.

	h.	′	″
A ad |	2.	49.	11.
I ad —		53.	31½.
✱ ad —		55.	32.
✱ ad \		57.	48.
✱ ad |		58.	23.

Obſeru. 12.

	h.	′	″
S ad —	5.	26.	39.
A ad \		27.	49.
A ad |		29.	7½.
✱ ad \		30.	47½.
✱ ad |		33.	10.
✱ ad /		34.	45.

Obſeru. 13.

	h.	′	″
A ad /	5.	37.	25.
A ad \		37.	47½.
A ad |		38.	1.
✱ ad \		40.	32½.
✱ ad |		41.	48.
✱ ad /		42.	36.

Obſeru. 14.

	h.	′	″
A ad \	5.	44.	47.
S ad —		45.	15½.
A ad |		46.	28¼.
✱ ad \		47.	22.
✱ ad |		50.	1.
✱ ad /		51.	37.

Obſeru. 15.

	h.	′	″
A ad \	6.	2.	24.
S ad —		2.	34.
A ad |		4.	3½.
✱ ad \		4.	38½
✱ ad |		7.	7.
✱ ad /		8.	27½.

Obſeru. 16.

	h.	′	″
S ad —	6.	20.	32.
A ad \		21.	22.
A ad |		22.	41.
✱ ad \		23.	12.
✱ ad |		25.	13.
✱ ad /		26.	12½.

Obſeru. 17.

			h.	′	″
S	ad	—	6.	28.	38.
✱	ad	\		29.	35.
A	ad	│		29.	46.
✱	ad	│		32.	6.
✱	ad	/		33.	14.

Obſeru. 21.

			h.	′	″
S	ad	—	8.	4.	34.
✱	ad	│		5.	0.
A	ad	│		5.	17.
✱	ad	/		5.	44½.
✱	ad	—		7.	4.

Obſeru. 22.

			h.	′	″
S	ad	—	8	10.	40.
✱	ad	│		11.	55.
✱	ad	/		12.	16.
A	ad	│		12.	23.
✱	ad	—		12.	53.

Deſignat hic *A* limbum lunae praecedentem; I inferiorem; *S* ſuperiorem, iuxta apparentiam ſcilicet in tubo aſtronomico; ✱ Palilicium. Lineolae adiectae ſitu ſuo diſtinguunt fila, ad quae appulſus facti ſunt. Sic – denotat filum HR, │ filum VT, / filum Oo \ filum Qq. In obſervatione 3. luna extitit in orientali coeli quadrante, vnde in tubo apparenter deſcendebat a dextra ad ſiniſtram. In reliquis obſeruationibus luna in quandrante coeli occidentali morabatur et apparenter in tubo aſcendebat à dextra ad ſiniſtram.

§. 6. Motum horologii, juxta quod in obſeruationibus hisce tempus notaui, ex comparatione cum reliquis horologiis admodum uniformem deprehendi. Ex culminationibus autem Palilicii et Solis deduxi, vnam horam temporis primi mobilis aequalem eſſe 1ʰ 0′ 10″ horologii;

rologii; horam vero temporis veri aequiualere 1.^{h} 0.$'$ 21.$''$ horologii. Ex quibus aequationibus tempus quod vis horologii datum in tempus primi mobilis vel tempus verum et vice verſa conuertere licet.

§. 5 Praeter iſtas horologii conditiones ad ſequentem tractationem requiritur, vt cognita ſit relatio temporis eiusdem horologii ad motus tum ſtellae tum lunae, quibus utraque reticulum tubi traiecit; Motus Palilicii idem eſt cum motu primi mobilis ab oriente in occidentem factus in diurno 15.° 57.$'$ ab aequatore diſtante, cuius proinde diurni 15. gradus abſoluit Palilicium in vna hora temporis primi mobilis ſeu in 1.^{h} 0.$'$ 10.$''$ horologii. §. 4. Vnde velocitas ſtellae in hoc diurno patet.

§. 6. Motus lunae per reticulum compoſitus eſt. Luna motu primi mobilis defertur ab oriente verſus occidentem. Eadem ſimul mouetur in orbita ſua ab occidente verſus orientem et continuo declinationem mutat. Compoſitus ergo hic lunae motus decomponi debet, vt ſinguli motus inde reſultantes diſtincte cognoſci poſſint. Abſtraham primo a mutatione declinationis lunae et motum ſolummodo referam ad diurnum aliquem conſtantem, mutationis iſtius poſtea ubi opus eſt, rationem habiturus. Ponatur diurni huius, quem luna è ſuperficie terra ſpectata percurrere viſa eſt, diſtantia ab aequatore 15.° 40.$'$ hic enim diurnus medius eſt inter eos, quos luna apparenter percurrit eo tempore, quo poſitiones lunae ad Palilicium obſeruatae fuerunt. Facta hac abſtractione ſolus lunae motus in hoc diurno conſiderandus reſtat. Velocitas, qua luna motum hunc in ſuo diurno peragit, reſultat ex velocitate primi mobilis, qua luna in eodem

diurno

diurno ab oriente in occidentem propter reuolutionem terae diurnam mouèri videtur, et ex velocitate, quae ex motu lunae proprio in orbita ab occidente in orientem directo deriuatur, et ad eundem diurnum refertur, ſic vt propter hos motus in plagas contrarias factos, velocitas lunae in ſuo diurno aequalis ſit differentiae utriusque velocitatis iam memoratae. Velocitatem hanc lunae in ſuo diurno ex vtraque iſta reſultantem ſimpliciter *velocitatem lunae* in ſequentibus vocabo.

§. 7. Cum motum lunae conſideremus in eodem diurno §. *6*. determinabitur lunae velocitas, ex interuallo temporis, quo luna integrum ſuum diurnum, velocitate iſta abſoluit. Ex culminationibus lunae d. 2. et 3. Ianuar. à Cl. de *l' Isle* obſeruatis interuallum temporis quo luna integrum diurnum deſcripſit velocitate ſua, inventum eſt 24.^{h} 55.′ 48.″ horologii. Luna ergo in 1.^{h} 2.′ 19½.″ vel rotunde in 1.^{h} 2.′ 20.″ horologii 15. gradus ſui diurni peragrauit et velocitas eius inde patet. Celeritatem autem ſtellae conſtantem eſſe, motumque etiam lunae toto obſeruationis noſtrae tempore uniformem ſupponi poſſe conſtat.

§. 8. Diurnus Palilicii diſtat ab aequatore 15.° 57.′ §. 5. lunae 15.° 40.′ §. *6*. Hi diurni parum à ſe invicem diſcrepant, ſic vt 15. gradus diurni Palilicii magnitudine ſua vix ſenſibiliter differant à 15 gradibus diurni lunae; quae differentia eo magis minuitur, quo pauciores gradus vel huius ſubdiuiſiones ſumuntur pro ſpatio à ſtella vel luna in diurno percurſo, vt in hac tractatione fieri ſolet. Idem ratiocinium valet de quouis alio diurno, in quo morata eſt luna durante eius tranſitu per

Hyades,

Hyades, ſiquidem declinationis lunae mutatio interea facta admodum exigua eſt. Durante igitur tranſitu lunae per Hyades absque errore ſenſibili motum lunae et Palilicii in diurnis aequalis magnitudinis factum conſiderare licet, hoc eſt, gradus diurni cuiusuis lunae et diurni Palilicii aequales cenſeri poſſunt cum gradibus alicuius diurni communis, cuius diſtantiam ab aequatore ob rationes §. 6. allatas 15° 40′ pono; cuius proinde diurni 15. gradus abſoluuntur à ſtella in $1^h\ 0'\ 10''$, à luna in $1^h\ 2'\ 20''$ temp. horologii, §. 6. 7. Patet inde ratio velocitatum lunae et ſtellae in iſto diurno, quae propter velocitatem vtramque conſtantem reciproca eſt temporum, quibus idem ſpatium 15. graduum diurni tum à ſtella tum à luna percurritur. Erit ſcilicet velocitas lunae ad velocitatem ſtellae $= 1^h\ 0'\ 10'' : 1^h\ 2'\ 20'' = 3610'' : 3740'' = 361 : 374$.

§. 9 Manifeſta inde eſt Solutio: Dato tempore, quo ſtella datum ſpatium in ſuo diurno abſoluit velocitate ſua, inuenire tempus, quo ſtella idem ſpatium traieciſſet, ſi velocitate lunae mota fuiſſet. Analogia eſt 361, 374, ita datum tempus ad quaeſitum.

§. 10. Gradibus 15. diurni reſpondent in motu ſtellae $1^h\ 0'\ 10''$ in motu lunae $1^h\ 2'\ 20''$ temporis horologii; in tempore autem primi mobilis $1^h\ 0'\ 0''$, Horum ergo temporum mutua relatio patet et facile tempus horologii in motu tum ſtellae tum lunae reducitur ad tempus aequiualens primi mobilis, verbi cauſa, ſi datum tempus motum lunae reſpiciens conuerti debeat, in tempus primi mobilis, analogia ſit, $1^h\ 2'\ 20'' : 1^h\ 0'\ 0''$ ita datum tempus ad quaeſitum primi mobilis.

§ 11. Diurnus communis, ad cuius portiones tanquam ſpatia percurſa motum lunae et ſtellae §. 8. retuli, diſtat ab aequatore 15° 40′ Huius ergo diurni 15. gradus aequiualent 14° 26′ 34″ circuli maximi, vi proportionis, qua eſt datus arcus diurni dati ad arcum circuli maximi aequiualentem vt ſinus totus ad coſinum declinationis iſtius diurni. Data ergo motus conditione, datoque tempore, quo ſpatium aliquod deſcriptum eſt, hoc ſpatium in partibus circuli maximi definiri poteſt. Scilicet ſpatium 14° 26′ 34″ circuli maximi abſoluit luna ſua velocitate in 1^h 2′ 20″ et Palilicium ſua celeritate in 1^h 0′ 10″ horologii. Sic ſi v. c. detur tempus, quo luna ſpatium aliquod percurrit ſeu per quod ſpatium aliquod exprimitur, ex analogia 1^h 2′ 20″ : 14° 26′ 34″ ita datum tempus ad quartum, invenitur ſpatium iſtud dato tempori reſpondens in partibus circuli maximi. Vice verſa ſi detur ſpatium per partes circuli maximi expreſſum, definiri poteſt tempus horologii, quod ſpatio iſto in motu vel lunae vel ſtellae reſpondet et partibus circuli maximi datis aequiualet.

§. 12. Comparationem temporis horologii cum mutatione declinationis lunae reſpondente hoc modo deduco. Ex altitudinibus lunae meridianis d. 2. et 3. Ianuar. à Cl. *de l'Isle* obſeruatis per ſextantem muralem, prodit differentia declinationum centri lunae, 1° 53′ 48″ adhibitis, quae requirebantur correctionibus ſic tamen vt ad differentiam parallaxeos in vtraque lunae altitudine non reſpexerim, cum de apparenti declinationis mutatione agatur. Quoniam ergo tempus horologii ab vna lunae culminatione vsque ad alterum praeterlapſum, ſit 24^h 55′

48″

48.'' §. 7. patet relatio huius temporis ad declinationis mutationem interea factam 1° 53.' 48.'' Inuenitur inde variatio declinationis vni horae horologii reſpondens 4.' 34.'' circuli maximi; vt adeo ad datum quoduis tempus horologii declinationis mutatio congrua determinari poſſit.

§. 13. Quae hactenus praemiſi, elementa ſuppeditant ad determinationem poſitionis lunae ad Palilicium neceſſaria. Ipſa iam huius determinationis oeconomia exponi debet. Dantur nempe momenta appulſuum tum limbi lunae tum ſtellae ad tria fila reticuli, et ex his definiri debent, poſitio mutua lunae, ſtellae circulorum coeleſtium et diameter lunae. Duplici modo haec peragenda ſuſcipio. Diſpiciam primo, quaenam ex ſuppoſita lunae et ſtellae diſtantia, ſuppoſitoque motu vtriusque per reticulum, ſequantur conditiones appulſuum lunae et ſtellae ad fila reticuli, vt inde intelligatur, qua ratione ex conditionibus appulſuum per obſeruationes datis ad conditiones poſitionis mutuae lunae, ſtellae, circulorum coeleſtium et diametri lunaris concludi poſſit; quam methodum concludendi analyſi priori ſtatim ſubiungam. Deinde proceſſum determinationis loci lunae ad ſtellam ex ordine exponam et exemplo obſeruationis 12. illuſtrabo.

§. 14. Ductae ſint lineae HR, VT, ad ſe inuicem normales. Anguli VCR, VCH biſecentur per rectas OC*o*, QC*q*, et ſyſtema harum linearum repraeſentabit reticulum tubi §. 3. Deſignet HR filum horizontale, VT verticale; et figura accommodata ſit ad apparentiam in tubo aſtronomico, ſic vt reuera infra ſit Septentrio, ſupra meridies, ad dextram oriens; ad ſiniſtram occidens. Iuxta hanc apparentiam appulſus in obſeruationibus ſunt Fig. 3.

 notati,

notati, nec ulla inde confuſio metuenda eſt, cum invertendo chartam, cui inſcripta eſt figura, ſtatim innoteſcat ſitus eius erectus.

§. 15. Vi dictae apparentiae luna et ſtella per reticulum ſemper mouentur a dextra ad ſiniſtram, et quidem deſcendendo, ſi in orientali; aſcendendo, ſi in occidentali coeli plaga obſeruatio peragitur. Eligam caſum poſteriorem et vt determinate loqui poſſim, limbum lunae ſucceſſiue ad fila CR. C*q*, CT, ſtellam vero ad C*q*, CT, C*o*, appuliſſe ſupponam. In reliquis caſibus habita ratione filorum, ad quae appulſus facti ſunt, ſimili modo proceditur. Tangat iam lunae limbus apparenter ſuperior filum HR in R et centrum lunae ſit in L ſtella autem eodem momento in S, ſic vt poſitio mutua centri lunae, ſtellae et filorum reticuli eadem ponatur, quae tenera fuit in obſeruatione aliqua propoſita ad momentum temporis appulſus limbi ſuperioris lunae ad HR. Ponatur porro LM ſemita, quam centrum lunae trajiciendo reticulum poſtea deſcripſit; SAD vero ſit diurnus, quem ſtella peragrauit, dum ad fila C*q*, CT, C*o*, ſucceſſiue appulit. Detur denique conditio motus tum lunae tum ſtellae, ſic vt ſpatio cuiuis dato tempus, quo iſtud vel a ſtella percurritur, aſſignari poſſit.

§. 16. His poſitis cum ſtella ſit in S, quando limbus lunae ſuperior in R appellit ad HR; in punctis vero A, B, D, quando fila C*q*, CT, C*o*, trajicit; dabuntur ſpatia SA, AB, B*d*, quae ſtella deſcripſit interuallis temporum inter appulſus limbi lunaris ad HR et ſtellae ad fila C*q*, CT, C*o*, quae proinde interualla temporum ipſa ex motus ſtellae conditione dabuntur, eaque,

eaque, propter velocitatem ſtellae conſtantem, eandem habebunt rationem cum ſpatiis, quae illis temporibus deſcribuntur; vt adeo temporum interualla inter appulſus limbi lunaris ad HR, et ſtellae ad fila C*q*, CT, C*o*, ſint vt ipſa ſpatia SA, AB, B*d* interea deſcripta.

§. 17. Ab inclinatione diurni ſtellae AD ad fila reticuli C*q*, CT, C*o*, pendet ratio ſpatiorum AB, B*d* a ſtella intra fila C*q*, CT, C*o* deſcriptorum. Certae inclinationi certa ſpatiorum AB, B*d* ratio reſpondet. Cum igitur haec ſpatia ſint vt tempora, quibus ſtella angulos *q*CT, TC*o* traiecit §. 16; manifeſtum eſt ab inclinatione diurni AD ad fila reticuli pendere rationem temporum, quibus anguli reticuli *q*CT, TC*o*, traiiciuntur.

§. 18. Datis loco ſtellae in S, poſitione diurni SAD et conditione motus ſtellae, definita ſunt tempora, quibus ſpatia SA, AB, BD, deſcribuntur §. 16. Inclinatio diurni SAD neceſſario connectitur cum ratione temporum, quibus anguli reticuli *q*CT, TC*o*, traiiciuntur §. 17. Conuertere ergo licebit ratiocinium et concludere, quod, datis temporibus motus ſtellae per angulos *q*CT, TC*o*, et quibus ſpatia SA, AB, B*d* a ſtella percurruntur, definiri poſſit inclinatio diurni ſtellae ad fila reticuli et locus ſtellae in S. Hic eſt ſcopus quem tendo, et propter quem Analyſin precedentem premiſi.

§. 19. Dentur ergo ex obſeruatione interualla temporum inter appulſus limbi lunaris ad HR et ſtellae ad fila C*q*, CT, C*o*; et definiendus ſit locus ſtellae in S. In filo CR, quarto verſus dextram a filo C*o*, ad quod appulſus ſtellae vltimus factus eſt, capiantur ab interſectione filorum communi C rectae CE, EF in ratione Fig. 4.

temporum, quibus ſtella angulos TC*o*, *q*CT traiecit. Per E et F ducantur recte E*b*, F*a*, parallelae ad C*o*, ſecantes fila CT, C*q* in *b* et *a*. Iungantur *b* et *a* recta *dba* filum C*o* in *d* ſecante. Erit argumento prop: 2. VI. Elem. *db* : *ba* = CE: EF, hoc eſt ratio rectarum *db*, *ba*, eadem eſt cum ratione temporum, quibus ſtella angulos TC*o*, *q*CT traiecit; adeoque recta *da* habebit inclinationem diurni §. 17. et omnes rectae ad *da* parallelae diurnum ſtellae repraeſentare poſſunt.

§. 20 Determinata ſic diurni ſtellae inclinatione ad fila reticuli, definiri quoque poterit locus ſtellae in S, ſi modo menſura conſtituta ſit, ad quam ſpatia a ſtella percurſa poſſint referri. Cum ex obſeruatione non niſi tempora dentur, quibus ſtella ſpatia SA, AB, BD deſcripſit, horum vero ſpatiorum eadem ſit ratio, quae eſt temporum, quibus percurruntur; expedit iſta ſpatia exprimere per tempora, quibus traiiciuntur. Haec menſurae electio nulla difficultate laboraret, ſi modo tempora ex obſeruatione omnia ad eundem motum pertinerent. Aſt cum in praeſenti tractatione motus diuerſi occurrant, lunae ſcilicet et ſtellae, qui tempora tranſitus lunae vel ſtellae per reticulum definiunt, ſingularis iſtorum temporum ad diuerſos motus pertinentinm ratio haberi debet, vt communis ſpatiorum tum a luna tum a ſtella deſcriptorum habeatur menſura. Motus iſti tum ratione celeritatum, tum ratione directionis inter ſe differunt. Motus ſtellae fit in diurno, lunae in ſemita aliqua propter declinationis mutationem a diurno diuerſa. A mutatione declinationis lunae tantiſper abſtrahere, eamque in diurno aliquo a diurno ſtellae parum vel nihil diſrepante §. 8. Quem proinde *diur-*

Fig. 3.

diurnum conſtantem in poſterum appello, conſiderare licet. Iſtius ſcilicet mutationis ratio poſtea habebitur; diuerſitas autem celeritatum lunae et ſtellae in diurno iſto conſtanti in praeſenti negotio expendi debet. Si enim ſpatia a luna in diurno conſtanti deſcripta exprimerentur per tempora, quibus a luna deſcripta ſunt; ſpatia vero a ſtella percurſa per tempora quibus ſtella iſta traiecit; communis menſura ſpatiorum adeoque et ſchematis non daretur, cum ſpatia a luna deſcripta, ad ſpatia quae ſtella peragrauit, ſint in ratione, non ſimplici temporum, ſed compoſita temporum et velocitatum lunae et ſtellae. Vt igitur ſchematis habeatur menſura communis, neceſſe eſt, vt vnus motus ad alterum reducatur, hoc eſt, vt datis temporibus, quibus ſpatia quaedam in vno motu v. c. ſtellae, deſcripta ſunt, inueniantur tempora, quibus eadem ſpatia in altero motu v. c. lunae traiici poſſint. Hoc pacto motus tum ſtellae tum lunae eadem celeritate in diurnis cuius gradus ſunt iidem §. 8. factus concipitur et ſpatia percurſa tunc exiſtunt in ratione temporum, quibus deſcribuntur, adeoque per haec exprimi poſſunt. Res adhuc clarior euadit, ſi conſideretur, locum ſtellae in S. definiendum eſſe ad momentum appulſus limbi lunae ad HR, et quidem ex conditione motus ſtellae per ſpatia SA, AB, BD, quae ſtella a momento appulſus limbi lunaris ad HR, vsque ad momentum appulſus ſui ad filum C*o* peragrauit. Stella continuo poſitionem reſpectu lunae mutat interea, dum haec ſpatia traiicit. Fieri ergo non poteſt, vt ex hoc motu ſtellae per dicta ſpatia acquiratur locus ſtellae ad momentum appulſus limbi lunaris ad HR, niſi efficiatur, vt ſtella, dum ſpatia SA, AB,

AB, B*d* percurrit, ſitum reſpectu lunae non mutet. Hoc autem obtinetur ſi lun: et ſtella in diurnis ſuis eadem velocitate motae concipiantur, ſeu quod idem eſt, ſi vnius motus ad motum alterius reducatur. Perinde iam eſt ſiue motus ſtellae reducatur ad motum lunae, ſiue motus lunae ad motum ſtellae. Eligam caſum priorem et motum ſtellae referam ad motum, quam luna habet relatiue in ſuo diurno conſtanti; quo poſito ſchematis menſura communis conſtituitur in partibus temporis motus lunaris ad diurnum relati.

Fig. 4. §. 21. Vt igitur determinetur locus ſtellae, capiatur ex obſeruatione interuallum temporis inter appulſus ſtellae ad fila C*q*, C*o*. Hoc tempus cum a motu ſtellae in ſuo diurno pendeat reducatur ad motum lunae in eodem diurno ſeu per §. 9. inueniatur tempus, quo ſtella eundem angulum *q*C*o* traieciſſet, ſi velocitate lunae mota fuiſſet. In recta *da* §. 19. deſignata, ope ſcalae alicuius, iuxta quam ſchema conſtruere libet, capiatur *dx* aequalis tot partibus ſcalae, quod tempus iſtud reductum continet minuta ſecunda. Per α ad C*o* fiat αA parallela, ſecans filum C*q* in A. Per A ducatur DAS indefinita, parallela ad *da*. Interuallum temporis inter appulſum lunae ad HR et ſtellae ad filum C*q*, reducatur ad tempus motus lunaris §. 9. eique ope eiusdem ſcalae aequalis capiatur AS. His factis, cum ſpatia SA, AD ($=$ *d*α) ſint vt temporum interualla inter appulſus limbi lunaris ad HR et ſtellae ad fila C*q*, C*o*, reducta ad motum lunae in diurno (conſtr:); SAD vero habeat inclinationem diurni ſtellae ad fila reticuli §. 19. patet in S eſſe locum ſtellae quaeſitum ad momentum appulſus limbi

limbi lunaris ad HR; et communem ſchematis menſuram dari per partes temporis motus lunaris ad diurnum relati. §. 20.

§. 22. Dantur ergo ex conſtructione obſeruationis ſpatia SA, AD etc. Magnitudine, diurnus ſtellae SD poſitione, et locus ſtellae in S ad illud tempus, quo limbus lunae appulit ad HR. §. 21. Reſtat ergo, vt ad idem tempus locus centri lunae in L definiatur, quo facto locus ſtellae ad lunam ad datum temporis momentum, appulſus ſcilicet limbi lunaris ad HR, innoteſcit qui quaeritur. Quemadmodum autem ad determinationem loci ſtellae neceſſaria erat cognitio inclinationis diurni ſtellae ad fila reticuli; ita quoque pro inueniendo lunae loco inclinatio ſemitae lunaris ad fila reticuli, ſeu quod perinde eſt, ad diurnum ſtellae iam deſignatum, cognoſcatur neceſſe eſt. Semitam enim lunae ad diurnum ſtellae parallelam non eſſe inde patet, quod luna continuo declinationem mutet; cuius mutationis ratio nunc haberi debet. Conditiones ergo inclinationis ſemitae lunaris ad diurnum ſtellae iterum ex hypotheſi §. 15. analytice expendendae ſunt, priusquam conſtructionem loci lunae ex obſeruatione ſuſcipiamus.

§. 23. Sint igitur omnia, vt in hyp. §. 14. Detur ſcilicet poſitio mutua ſemitae lunaris LM et diurni ſtellae AD. Per punctum quoduis M ſemitae lunaris LM ducta ſit M*m* parallela ad diurnum ſtellae AD. Ex alio eius puncto L, quod ab M diſtet verſus dextram, demittatur LM perpendicularis ad M*m*. Et manifeſtum eſt, motum lunae per LM, hoc modo decompoſitum eſſe in motus laterales L*m* *m*M, quorum hic parallelus, iſte perpendiculariter directus eſt ad diurnum ſtellae. Motus Fig. 3.

 lunae

lunae per *m* M eſt iſte ; qui abſtrahendo a declinationis mutatione , tanquam in diurno aliquo conſtanti conſiderari ſolet , vt in §. 6 ; LM vero eſt mutatio declinationis lunae interea facta : dum luna relatiue portionem diurni conſtantis *m* M percurrit. Data ergo poſitione mutua ſemitae lunaris LM et diurni ſtellae AD ſeu *m* M , quae ad AD parallela eſt; dabitur relatio mutua motus lunae in diurno conſtanti , vt *m* M , et motus eius in declinationem vt L*m* , in ea menſura , ad quam ſchema refertur.

§. 24. Quod ad ſitum ſemitae lunaris LM reſpectu lineae *m* M diurnum ſtellae repraeſentantis , patet , ſemitam LM vel ſupra vel infra lineam *m* M cadere poſſe. Si LM in ſchemate ſupra *m* M ponitur , punctum *m* ab L diſtat verſus ſeptentrionem , adeoque motus in declinationem iuxta L*m* dirigitur verſus ſeptentionem , quod fit , quando declinatio lunae vel eſt borealis creſcens vel auſtralis decreſcens. Si LM infra M*m* cadit , punctum m ab L diſtat verſus Auſtrum , adeoque motus in declinationem directus eſt verſus meridiem , quod contingit , quando lunae declinatio eſt vel borealis decreſcens vel auſtralis creſcens. Prior caſus in figura occurrit , poſterior omiſſus eſt ne ex nimia linearum multitudine ſchema turbetur. Patet ergo ex ſitu ſemitae lunaris LM reſpectu lineae *m* M diurnum ſtellae repraeſentantis cognoſci conditionem declinationis lunae , an ſit borealis creſcens vel auſtralis decreſcens , an borealis decreſcens vel auſtralis creſcens.

§. 25. Quemadmodum diurnus ſtellae AD transfertur ad ſemitam lunarem LM ducendo *m* M ad AD parallelam §. 23. ita vice verſa ſemita lunaris LM ad diurnum ſtellae DA referri poteſt , ſi per punctum aliquod diurni

DA

DA recta aliqua parallela ducatur ad LM. Sit ergo per punctum quoduis in diurno ſtellae ad ſiniſtram ſumtum, vt D, recta Dλ parallela ad ſemitam lunarem LM. Ex puncto quouis alio μ in diurno ſtellae verſus dextram ad arbitrium aſſumto erigatur μλ perpendicularis ad SD diurnum ſtellae, ſecans iſtam Dλ in λ; eritque Δ Dμλ omnino ſimile Δ L*m*M. Eodem igitur modo vt in §. 23. data mutua poſitione diurni ſtellae SD et ſemitae lunaris ſeu rectae Dλ ad ſemitam lunarem parallelae, dabitur relatio mutua motus lunae in diurno conſtanti vt μD, et motus in declinationem μλ, hac ſcilicet ratione, vt λμ exhibeat declinationis mutationem interea factam dum luna relatiue in diurno, vel quod perinde eſt, ſtella velocitate lunae mota peragrauit ſpatium μD. Eodem autem ratiocinio, quo §. 24. vſi ſumus, manifeſtum eſt, ſi punctum λ cadat ſupra DS, declinationem lunae eſſe vel creſcentem borealem vel decreſcentem auſtralem; ſin vero punctum λ infra DS cadat, declinationem eſſe vel borealem decreſcentem vel auſtralem creſcentem.

§. 26. Conuertendo iam ratiocinium patet, data mutua relatione motus lunae in diurno aliquo conſtanti, et motus in declinationem dataque conditione declinationis lunae; dari poſitionem ſemitae lunaris et diurni ſtellae tum inter ſe tum reſpectu plagarum coeli. Detur enim μD ſpatium dato tempore a ſtella velocitate lunae mota deſcriptum. Detur μλ mutatio declinationis lunae tempori iſti reſpondens in eadem menſura, in qua datur ſpatium μD; et dabitur Δ^lum Dμλ ad μ rectangulum, adeoque Dλ poſitione reſpectu diurni ſtellae DS. Ex conditione autem declinationis lunae cognoſcitur, an pun-

ctum λ ſupra, an infra DS cadat. Prior ſcilicet caſus occurret, ſi declinatio lunae ſit borealis creſcens vel auſtralis decreſcens; poſterior, ſi iſta ſit borealis decreſcens vel auſtralis creſcens.

Fig. 4. §. 27. Conſtructio igitur ſchematis §. §. 19. 20. 21. iam incepta, hoc modo continuatur. Ad tempus ex arbitrio electum quaeratur mutatio declinationis lunae reſpondens in partibus circuli maximi §. 12, quae reducantur ad partes temporis in motu lunari aequiualentes §. 11. Ex puncto quouis in diurno ſtellae aſſumto, (quod euidentiae gratia ſit D, in quo diurnus ſtellae ſecat filum vltimum C*o*) capiatur verſus dextram ſpatium Dμ expreſſum per tempus, ad quod declinationis mutatio quaeſita eſt. In μ ad rectam DS perpendicularis conſtituatur μλ aequalis inuentae mutationi declinationis in partibus temporis motus lunaris, quae vel ſupra vel infra DS pro declinationis lunae conditione §. 26. poni debet. In noſtro caſu, quo lunae declinatio eſt borealis creſcens, μλ ſupra DS cadit. Iungatur Dλ eaque indefinite producatur, erit Dλ linea, ad quam ſemita lunaris in ſchemate parallela eſt. Spatium μD ſcilicet conſideratur tanquam a luna percurſum, eo tempore, quo exprimitur, et quo luna per λμ declinationem mutauit, vtriuſque autem ſpatii μD et λμ datur menſura communis, in partibus nempe temporis motus lunaris ſeu in partibus ſcalae ad quam ſchema conſtruitur §. 26. et 20.

§. 28. Hoc modo in quouis caſu, ſeruata ſemper eadem ratione ſpatii Dμ ad μλ definitur inclinatio lineae Dλ ad diurnum ſtellae, ad quam parallela eſt ſemitae lunae, vbicunque iſta ſita ſit. Vera enim ſemitae lunaris poſi-

poſitio reſpectu reticuli adhuc ignoratur, nec, niſi ad datum aliquod tempus locus centri lunae reſpectu reticuli cognitus ſit, determinari poteſt. Sed ad ſcopum praeſentem hactenus expoſita ſufficiunt, qui eo tendit, vt definiatur locus centri lunae v.c. in L, ad illud temporis momentum, ad quod locus ſtellae in S §. 21. inuentus eſt, quodque in noſtro caſu eſt tempus appulſus limbi lunae ad filum HR. Ex hyp. §. 15. iterum ratiocinium incipiam, vt inde conditiones appulſuum limbi lunaris ad fila reticuli innoteſcant, iisque perſpectis, concluſio fieri poſſit, pro determinando centri lunae loco.

§. 29. Sit ergo per hyp: § 15. ad momentum appulſus limbi lunae ad HR, locus, centri lunae in L, R*pr* peripheria diſci tangens filum HR in R; LR radius eius; LM parallela ad Dλ, ſit ſemita centri. Ad filum C*q* ducta ſit parallela GI tangens limbum lunae in *r*; et ad filum CT parallela ſit KN, tangens limbum in *p* Scilicet rectae GI, KN ad C*q*, CT, reſpectiue parallelae ducuntur, quia limbus lunae ex hyp: §. 15. ad fila C*q*, CT appulit. Si appulſus iſti ad alia fila facti fuerint, pari modo ad haec parallelae concipi debent limbum lunae tangentes. Intelligantur jam rectae GI, KN, cum limbo lunae in *r* et *p* cohaerere, et motu ſibi ſemper parallelo transferri, quando centrum lunae per LM mouetur. Quoniam LM parallela eſt ad Dλ §. 25, translationes linearum GI, KN, per rectam λD eodem modo fiunt ac per LM, dum centrum lunae LM traiicit. Referam ergo dictarum linearum translationes ad rectam λD. His poſitis, quando centrum lunae eſt in L, recta GI ſecat iſtam Dλ in I. Dum ergo luna motu ſuo ab L verſus M limbo ſuo *r* appellit Fig. 3.

ad filum Cq; recta GI motu ſibi parallelo transfertur per Iy et ad momentum appulſus limbi r ad Cq coincidit cum Cq. Traiicitur ergo ſpatium Iy interuallo temporis inter appulſum limbi in R ad HR et limbi r ad Cq. Pari modo, quando centrum lunae eſt in L, recta KN ſecat ipſam Dλ in N. Dum vero luna motu per LM limbo ſuo p appellit ad filum CT; recta KN motu ſibi parallelo tranſfertur per NZ et ad momentum appulſus limbi p ad CT coincidit cum CT; quare ſpatium NZ abſoluitur interuallo temporis inter appulſus limbi lunaris ad HR et ad CT. Hoc ergo modo, ſi, vi hypotheſeos dentur ad momentum appulſus limbi lunae ad HR locus centri in L, radius diſci LR, poſitio ſemitae centri LM ſeu ipſi parallelae λD; inueniri poſſunt ſpatia Iy, NZ, et tempora per Iy et per NZ, hoc eſt, interualla temporum inter appulſus limbi lunaris ad HR et ad Cq, ad HR et ad CT.

§. 30. Conuertendo igitur ratiocinium, ſi dentur interualla temporum inter appulſus limbi lunaris ad HR et ad Cq, ad HR et ad CT, et poſitio rectae Dλ, ad quam ſemita lunae parallela eſt; nec non conditio motus lunae in ſua ſemita, ſeu, quod perinde eſt ad rectam Dλ relati; determinari poſſe locum centri lunae in L, eiusque ſemidiametrum, facile perſpicitur.

§. 31. Poſitio iſtius Dλ reſpectu diurni ſtellae DS datur §. 27. Conditio motus lunae in ſua ſemita vel ad rectam Dλ relati habetur ex conſideratione trianguli D$\mu\lambda$, vbi λD ad μD exhibet rationem celeritatis lunae in ſua ſemita ad celeritatem eius in diurno. Denique ex obſeruatione dantur appulſus limbi lunaris ad fila HR, Cq, CT per

CT per hyp: §. 15; adeoque interualla temporum inter appulſus limbi lunaris ad HR et ad Cq, ad HR et ad CT. Quibus datis conſtructio obſeruationis ſequenti modo ad finem perducitur.

§. 32. Ex punctis Z, Y, in quibus recta $D\lambda$ ſecat fila CT, Cq ad quae luna appulit (excluſo eo filo HR, in quo appulſus lunae definit tempus loci ſtellae ad lunam quaeſiti) demittantur Zf, yG perpendiculares ad diurnum ſtellae AD. Ope ſcalae, iuxta quam ſchema conſtruitur, capiantur fn, gi, reſpectiue aequales interuallis temporum inter appulſus limbi lunae ad HR et ad CT, ad HR et ad Cq. Per n et i ad gy ducantur parallelae nN, iI ſecantes $D\lambda$ in N et I; erunt ZN, yI ſpatia, quae in lunae ſemita $D\lambda$ iisdem reſpectiue temporibus deſcribuntur, quibus a luna percurruntur fn, gi relatiue in diurno; hoc eſt ZN, yI ſunt reſpectiue ſpatia a luna relatiue in recta $D\lambda$ interuallis temporum inter appulſus limbi lunae ad HR et ad CT, ad HR et ad Cq deſcripta. Per N ad CT et per I ad Cq ducantur reſpectiue parallelae KN, GI, ſeſe mutuo interſecantes in X. Cum perinde ſit, ſiue luna relatiue per ſpatia NZ, Iy datis temporibus accedat ad fila CT, Cq; ſiue fila haec ad lunam immotam per eadem ſpatia iisdem temporibus recedant; manifeſtum eſt ex analyſi §. 29. rectas GI, KN, tangere limbum lunae, quando limbus eius ſuperior appulit in R ad filum HR. Dantur ergo tres rectae HR, KN, GI, ſeu KR, Kx, xI poſitione, huius conditionis, vt omnes tangat limbus lunae verb. cauſ. in R, p, r, reſpectiue, ad momentum temporis, quo limbus lunae appulit ad HR. Biſecentur Fig. 4.

centur

centur anguli RKx, KxI per rectas KL, xL quae ſeſe interſecent in puncto L. Cum quaeuis recta vt KL vel xL, biſecans angulum RKx vel KxI a duabus tangentibus KR, Kx; vel Kx, xI interceptum, tranſeat per centrum circuli, cuius tangentes iſtae ſunt; patet in L eſſe centrum diſci lunaris, qui rectas KR, Kx, xI tangit in R, p, r. Datur ergo centrum lunae ad momentum appulſus limbi lunaris ad HR; et ſi ex L ad vnam ex iſtis tangentibus v. c. ad KR perpendicularis LR ducatur; dabitur ſemidiameter lunae LR. Menſura huius datur in partibus ſcalae, iuxta quam ſchema conſtructum eſt, quippe per quas, vi conſtructionis, expreſſae ſunt rectae ZN, yI; a quibus poſitio mutua tangentium KR, Kx, xI pendet, vt adeo ſemidiameter lunae exprimatur per tempus, quo centrum lunae relatiue in diurno percurrit ſpatium aequale ſemidiametro lunae.

§. 33. Cum admodum exigua ſit mutatio declinationis lunae $\mu\lambda$ reſpectu ſpatii μD, quod eodem tempore luna relatiue in ſuo diurno deſcribit, quo declinationem per $\mu\lambda$ mutat; propter angulum λDμ hinc valde parvum, rectae ZN, fn; yI, gi, reſpectiue inſenſibiliter a ſe inuicem different. Igitur absque errore in conſtructione ſchematis rectae ZN, yI, ope ſcalae hactenus adhibitae, aequales fieri poſſunt interuallis temporum inter appulſus limbi lunaris ad HR et ad CT; ad HR et ad Cq; quibus §. 32. rectas fn, gi reſpectiue aequales feci propter diuerſitatem motus lunae in ſua ſemita et in diurno. Hoc modo conſtructio breuior efficitur.

§. 34. Ordinem denique temporis reſpiciendum eſſe, iuxta quem appulſus limbi lunaris ad fila HR, Cq, CT etc: facti

factî ſunt, per ſe patet. Ex hoc enim ordine cognoſcitur directio acceſſus rectarum GI, KN, per ſpatia yI, ZN ad diſcum lunae, qui in noſtro caſu in L in momento appulſus limbi lunaris ad HR immotus perſtitiſſe conſideratur, v. c. Si, ceteris paribus, appulſus limbi lunaris ſerius ad HR contigiſſet quam ad Cq; tunc rectam GI a Cq non verſus dextram (vt in noſtro caſu), ſed verſus ſiniſtram diſtare debere, manifeſtum eſt; cum hoc caſu limbus lunae r iam vltra Cq progreſſus eſt, quando limbus ſuperior appellit ad HR. Eodem modo in reliquis caſibus ordo appulſuum conſiderandus eſt.

§. 35. Datur ergo per conſtructionem obſeruationis locus ſtellae in S reſpectu reticuli §. 21. Ad idem tempus datur quoque locus centri lunae in L reſpectu eiusdem reticuli vna cum ſemidiametro eius §. 32. Dabitur ergo mutua poſitio lunae et ſtellae, quam quaeſiui. Schematis autem communis menſura conſtituta eſt per partes temporis horologii, quatenus iſtud ad motum lunarem in diurno conſtanti refertur; hoc eſt, vnaquaeque linea ſchematis conſiderari debet inſtar ſpatii, eo tempore, per quod exprimitur, percurſi a luna in diurno conſtanti.

§. 36. Si ea, quae §. §. 19. 20. 21. 27. 32. 33. 34. expoſita ſunt, conſiderentur, in quolibet caſu obſeruationum §. 4. enumeratarum, locum lunae ad ſtellam, ad datum aliquod tempus determinari poſſe patet. Sed cum ordinem conſtructionis per analyſin ſubinde interrumpere et plura alia euidentiae cauſa immiſcere debuerim, expedit, generaliter conſtructionem cuiusque obſeruationis propoſitae ordine exponere, eamque exemplo obſeruationis 12. illuſtrare, in qua caſus iſte occurrit, quem hactenus conſideraui.

§. 37. Ordo conſtructionis hic eſt.

Fig. 4. 1) Delineatum ſit Syſtema linearum VT, HR, *Oo*, Q*q*, quod reticulum repraeſentat §. 14. ducendo HR, VT ad ſe inuicem normales et biſecando angulos HCV, VCR per rectas Q*q*, O*o*.

2) In obſeruatione propoſita diſtinguantur fila reticuli, ad quae appulſus ſtellae facti ſunt. Iſtud filum, quod primo attigit ſtella, vocetur *primum*; iſtud, quod deinceps traiecit, *medium*; et quod vltimo tranſiit ſtella *vltimum.* In noſtra obſeruatione 12. appulit ſtella ad C*q*, CT, C*o*, iuxta ordinem, quo recenſentur §. 3.; vt adeo C*q* ſit primum, CT medium, C*o* vltimum filum.

3) Cognoſcatur quoque coeli plaga, in qua tempore obſeruationis ſtella extitit; inde enim intelligitur, an ſtella in tubo apparenter aſcenderit, an deſcenderit §. 15. Obſeruatio noſtra facta eſt in occidentali coeli plaga §. 3. vnde ſtella apparenter aſcendit a dextra ad ſiniſtram. Figura hoc modo ad apparentiam tubi aſtronomici componitur §. 14.

4) His cognitis quaerantur interualla temporum, quibus ſtella traiecit angulos a filis primo et medio, medio et vltimo formatos; inde enim pendet inclinatio diurni ſtellae ad fila reticuli §. 17. In noſtro caſu quaeri debent tempora tranſitus ſtellae per angulos *q*CT, TC*o*, per §. 3.

Appulſus ſtellae ad CT—5^h 33′ 10″ horologii
— — — — — ad C*q*—5. 30. $47\frac{1}{2}$.

Mora tranſitus per *q*CT. 2. $22\frac{1}{2}$. ſeu $142\frac{1}{2}''$

Appulſus ſtellae ad C*o*—5^h 34′ 45″ horol.
— — — — — ad CT—5. 33. 10.

Mora tranſitus per TC*o* 1. 35. ſeu 95″.

Hinc tranſitus per TC*o* ad tranſitum per *q*CT$=95:142\frac{1}{2}$

5) In

5) In ſilo CR, quod quartum eſt verſus dextram a filo vltimo C*o*, ope ſcalae a centro reticuli C capiantur verſus dextram rectae CE, EF, in ratione temporum tranſitus ſtellae per angulos a filis vltimo et medio vt TC*o*, medio et primo, vt *q*CT, formatos; in hoc caſu vt 95 : 142½. Per puncta ſic inuenta E, F ducantur E*b*, F*a*, parallelae ad filum vltimum C*o*, ſecantes fila, medium CT, et primum C*q*, in *b* et *a*, iungatur *ba* eaque indefinite producatur, vt ſecet filum vltimum in *d*. Diurnus ſtellae ad rectam *dba* hoc modo determinatam parallelus erit §. 19.

Poteſt etiam conſtructio ordine contrario ſuſcipi.

Sint v. c. fila, primum CT, medium C*o*, vltimum CH, ad quae ſtella appulit, vt dentur morae tranſitus ſtellae per angulos TC*o*, HC*o*. In filo CQ, quod quartum eſt verſus ſiniſtram a primo CT, capiantur a centro reticuli C verſus ſiniſtram rectae CE, EF in ratione temporum tranſitus ſtellae per angulos TC*o*, HC*o*, a filis primo et medio, medio et vltimo formatos. Per E et F ducantur E*b*, F*d* parallelae ad filum primum CT, ſecantes fila, medium C*o*, et vltimum CH, in punctis *b*, *d*. Iungantur *d*, *b*, recta *dba* ad quam diurnus ſtellae parallelus erit. Conſtructio prior exactior procedet, ſi mora tranſitus ſtellae per angulum a filis primo et medio interceptum maior, ſit mora tranſitus per angulum a filis medio et vltimo formatum. Sin vero iſta hac minor ſit, conſtructio poſterior praeſtabit. Fig. 5.

6) Definiatur mora tranſitus ſtellae per angulum a filis primo et vltimo comprehenſum, addendo tranſitus per

angulos a filis primo et medio, medio et vltimo formatos, qui n. 4. definiti ſunt. In noſtro caſu quaeritur tranſitus per qCO. Iuxta n. 4. eſt.

Tranſitus ſtellae per qCT $= 142\frac{1}{2}$.
— — — — — — — TCo $=$ 95. vnde

Tranſitus ſtellae per qCo $= 237\frac{1}{2}$.

7) Tempus huius tranſitus, cum ad motum ſtellae pertineat, reducatur ad tempus motus lunaris in diurno §. 20.; et in hoc caſu inuenietur ope §. 9. tranſitus ſtellae per qCo celeritate lunae motae $= 246''$.

8) Ope ſcalae alicuius geometricae, iuxta quam ſchema conſtruere libet in recta *da* n. 5. definita a *d* interſectione eius cum filo vltimo capiatur verſus dextram *dα* aequalis tempori n. 7. inuento (in hoc caſu $= 246''$). Per *α* ducatur *α*A parallela ad filum vltimum Co, ſecans filum primum Cq in A. Per A fiat DA parallela ad *da* eaque indefinite producatur, ſecans filum vltimum Co in D. Erit AD ($=$ *dα*) ſpatium a ſtella ab appulſu ſuo ad filum primum vsque ad appulſum ad vltimum filum deſcriptum et expreſſum per partes temporis motum lunae in diurno reſpicientis §. 21.

9) Conſiderentur iam fila, ad quae limbus lunae appulit, et ex iſtis appulſibus eligatur aliquis, ad cuius momentum locus ſtellae ad lunam definiri debet, quod in ſequentibus *momentum obſeruationis*; filum vero, ad quod limbus lunae momento obſeruationis appulit, *primarium filum* vocabo. In noſtro exemplo ſit HR filum primarium; et momentum appulſus limbi lunaris ad HR, quod §. 3. eſt $5^{h.}\ 26'.\ 39''.$ temp. horologii, erit momentum obſerua-

ſeruationis, ad quod locus ſtellae ad lunam ex conſtructione ſequenti emergit.

10) Inueniatur interuallum temporis inter momentum obſeruationis et momentum appulſus ſtellae ad primum filum, eorum, quae, traiecit ſtella; in hoc caſu interuallum inter appulſus lunae ad HR et ſtellae ad C*q*. Per §. 3.

Appulſus ſtellae ad C*q* —	5^h	$30'$	$47\frac{1}{2}''$ horol.
— — — limb. ☽nae ad HR	5.	26.	39.
Interuallum		4.	$8\frac{1}{2}$. ſeu $248\frac{1}{2}$.

11) Reducatur hoc ad tempus motus lunaris, vi §. 20, et inuenietur iſtud per §. 9. in noſtro exemplo = $257\frac{1}{3}''$ proxime.

12) A puncto A, in quo ſtella primum filum tranſiit, transferatur recta AS aequalis interuallo n. 11. vel verſus dextram vel verſus ſiniſtram, prout appulſus ſtellae ad primum filum vel ſerius vel citius factus eſt, quam appulſus lunae ad filum primarium; eritque in S locus ſtellae quaeſitus ad momentum obſeruationis. In noſtro caſu, quo ſtella ſerius ad C*q* appulit, quam limbus lunae ad HR, capiatur AS = $257\frac{1}{3}$. part. ſcalae n. 11. verſus dextram; vt habeatur locus ſtellae in S ad momentum horologii 5^h $26'$ $39''$ (n. 9.)

13) Definiri iam debet inclinatio ſemitae lunaris DX ad diurnum ſtellae DS §. 27. Hunc in finem eligatur tempus aliquod, cui reſpondens quaeratur declinationis lunae mutatio, quae §. 12. dabitur in partibus circuli maximi. Reducantur hae per §. 11. ad partes temporis in motu lunari aequiualentes, vt habeatur mutatio declinationis in partibus ſcalae §. 27. Sit tempus ex arbitrio aſſumtum

 10'

10′ ſeu 600″ temp. horologii; erit per §. 12. mutatio declinationis reſpondens 46″ part. circuli maximi, quae per §. 11. efficient $3\frac{1}{3}''$ fere temporis horologii motum lunae in diurno reſpicientis.

14) Ex puncto in diurno ſtellae ad arbitrium ſumto, quod euidentiae cauſa ſit D, in quo diurnus ſtellae ſecat filum vltimum, capiatur verſus dextram in diurno ſtellae ſpatium Dμ aequale tempori n. 13. electo (in hoc caſu = 600″ temp. horol. ſeu partium ſcalae). Ex conditione declinationis lunae cognoſcatur, an iſta ſit borealis creſcens vel auſtralis decreſcens, an vero borealis decreſcens vel auſtralis creſcens. Ex puncto iam definito ſupra DS in priori caſu, infra DS in poſteriori erigatur perpendicularis $\mu\lambda$ ad DS aequalis inuentae n 13. declinationis mutationi (= $3\frac{1}{3}$. part. ſcalae in hoc caſu). Per λ et D ducatur indefinita Dλ. Ad hanc ſemita lunaris parallela erit §. 27. Ratio Dμ : $\mu\lambda$ = 600 : $3\frac{1}{3}$. eſt conſtans et in conſtructione omnium obſeruationum §. 3. adhiberi poteſt, vbi quoque, cum lunae declinatio ſit borealis creſcens, punctum λ ſemper ſupra DS cadit.

15) Pro definiendo iam loco centri lunae ad momentum obſeruationis, capiantur interualla temporum inter iſtud momentum et momenta appulſuum limbi lunaris ad reliqua fila, ad quae luna appulit. In noſtro caſu quaeruntur interualla temporum inter appulſus lunae ad HR et ad C*q*, ad HR et ad CT. Per §. 3. eſt

Appulſus limbi lunaris ad C*q* 5^h 27′ 49″ horol.
— — — — — — — ad HR 5. 26. 39.

Interuallum 1. 1. 10. ſeu 70″

Ap-

Appulſus limbi lunaris ad CT 5^h $29'$ $7\frac{1}{2}''$
— — — — — — — ad HR 5. 26. 39.

Interuallum 2. 2. $28\frac{1}{2}$ ſeu $148\frac{1}{2}''$

16) Ab interſectione fili, cui eiusmodi interuallum, excepto filo primario reſpondet, cum recta Dλ poſitionem ſemitae lunaris referente, capiatur in hac Dλ recta aequalis dicto interuallo vel verſus dextram vel verſus ſiniſtram, prout appulſus lunae ad iſtud filum vel ſerius vel citius factus eſt, quam appulſus lunae ad filum primarium. In noſtro caſu reſpondet interuallum primum filo C*q*, interuallum ſecundum filo CT; et appulſus lunae ad vtrumque filum C*q*, CT ſerius facti ſunt, quam ad filum primarium HR. Igitur ex *y*, interſectione fili C*q* cum Dλ ſumi debet verſus dextram *y*I aequalis interuallo primo, nimirum $= 70''$; et ex Z interſectione fili CT cum Dλ capi debet verſus dextram ZN aequalis interuallo ſecundo $= 148\frac{1}{2}''$.

17) Per puncta I et N ſic definita ducantur parallelae ad fila reſpondentia, nimirum in noſtro caſu GI ad C*q*; KN ad CT quae ſeſe mutuo interſecent in *x*; et habebitur Syſtema rectarum HR, KN, GI, ſeu RK, K*x*, *x*I, quas omnes limbus lunae tangit ad momentum obſeruationis.

18) Biſecentur anguli RK*x*, K*x*I, ab his tangentibus RK, K*x*, *x*I formati, per rectas KL, *x*L, quae ſeſe interſecent in L, erit in L centrum lunae ad momentum obſeruationis.

19) Ex L ad vnum ex iſtis tangentibus v. c. KR ducatur normalis LR; habebitur ſemidiameter lunae LR in par-

partibus ſcalae, quae eaedem ſunt cum ſecundis temporis horologii motum lunae in diurno reſpicientis. In noſtro caſu inuenitur ſemidiameter lunae $64\frac{1}{2}$. part. ſcalae ſeu ſecunda temporis motus lunaris, adeoque diameter lunae = 2′ 9″ = morae tranſitus diſci lunaris per meridianum vel alium quemuis horarium.

20) E centro lunae L n. 18. definito demittatur perpendicularis LW differentia declinationum centri lunae et ſtellae; WS vero differentia Aſcenſionum rectarum centri lunae et ſtellae in diurno ad momentum obſeruationis. Vtriusque menſura datur in partibus ſcalae ſeu ſecundis temporis motus lunaris in diurno §. 35. In noſtro exemplo inuenitur LW = $92\frac{1}{2}$″; WS = $209\frac{1}{4}$″

21) In §. 11. datur mutua relatio temporis horologii et motus lunaris in ſpatiis per partes circuli maximi expreſſis. Reducantur ergo per §. 11. diameter lunae (= 2′ 9″) et differentia declinationum centri lunae et ſtellae (= $92\frac{1}{2}$″) ad partes circuli maximi; et inuenietur prior = 29′ 53″ poſterior = 21′ 26″ part. circuli maximi.

22) In §. 10. datur mutua relatio temporis primi mobilis et temporis horologii motui lunae in diurno reſpondentis. Huius ope differentia Aſcenſionum rectarum centri lunae et ſtellae, quae n. 20. in tempore motus lunaris datur, reducitur ad partes temporis primi mobilis aequiualentes. In noſtro caſu inuenitur WS = $201\frac{1}{3}$″ = 3′ $21\frac{1}{3}$″ temp. primi mobilis.

23) Denique momentum obſeruationis iuxta tempus horologii notatum ope § 4. et culminationum ſolis in tempus verum transmutari ſolet, vt conſtat. In noſtro caſu

mo-

momento obſeruationis $5^h\ 26'\ 39''$ temp. horologii reſpondent $10^h\ 33'\ 21''$ temp. veri.

§. 38. Hac methodo ex obſeruationibus 12, 13, 14, 15, 16, in quibus tum Palilicii tum lunae appulſus ad tria fila reticuli dantur, inuentae ſunt differentiae declinationum centri lunae et Palilicii in partibus circuli maximi; et differentiae Aſcenſionum rectarum eorundem in tempore primi mobilis, prout ab initio huius diſſertationis §. 1. ad momentum cuiusque obſeruationis tum iuxta tempus horologii tum iuxta tempus verum notatum ponuntur. Diameter lunae media earum, quae ex iisdem obſeruationibus deductae ſunt, deprehenſa eſt $2'\ 9\frac{1}{2}''$ temporis horologii ad motum lunae relati ſeu $30'\ 0''$ circuli maximi, quae proinde ad altitudinem mediam illarum, quas luna in iſtis obſeruationibus habuit, referri debet. Hac diametro poſtea vſus ſum in determinatione loci Palilicii ad lunam ex reliquis obſeruationibus 3, 17, 21, 22, in quibus tantum appulſus limbi lunae ad duo fila reticuli dantur. Conſtructio in his caſibus eodem modo vt §. 37. peracta eſt, niſi, quod loco trium rectarum, quas limbus lunae ad momentum obſeruationis tetigit, n. 15. 16. 17. §. 37. inuentarum; hic duae tantum rectae poſitione eadem methodo determinentur, quas limbus lunae ad momentum obſeruationis tangit. Diameter lunae data vices tertiae tangentis ſuſtinet. Biſecto enim angulo, quem tangentes iſtae duae comprehendunt, habetur recta, in qua alicubi centrum lunae haeret. Igitur ope ſemidiametri lunae datae diſcus lunaris iſtis tangentibus facillime inſcribitur, reliquaque vt ante definiuntur, quorum recenſio fit §. 1.

Fig. 1. §. 39. In fig. 1. loca centri lunae ad Palilicium methodo praecedenti definita, in vnum Syſtema redegi, ſic tamen vt figura repreſentetur in ſitu erecto, cum e-contrario ſchemata § 37. ſitu inuerſo conſtructa ſint. Ducta ſcilicet recta PD diurnum Palilicii referente, et conſtituto in P Palilicio, ex datis per partes ſcalae ſeu communem omnium ſchematum §. 37. conſtructorum menſuram differentiis Aſcenſionum rectarum et declinationum centri lunae et Palilicii, definiui puncta 3, 9, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 22; quae centri lunae ad Palilicium loca in obſeruationibus homologis exponunt. Per puncta ſic inuenta ducta eſt, ſemita centri lunae, quae curuatura ſua ſatis monſtrat, quanta deflexio a ſemita rectilinea per variationem parallaxeos lunae effecta ſit.

§. 40. Vt ſemitae huius poſitio etiam habeatur reſpectu fixarum, quas luna in tranſitu per Hyades praeſenti vel occultauit vel tranſiit, per ſextantem muralem culminationes iſtarum diebus aliquot poſt obſeruaui, et repetitis aliquoties his obſeruationibus deprehendi

Differentiam.

inter Palilicium et	Aſcenſionum rectarum in temp. primi mobilis	Declinationum in part. circ. maxim.
primam Hyadum	16′ 0″	59′ 10″
d.	9. 28.	57. 40.
1 ad *θ*	7. 16¼.	36. 10.
2 ad *θ*	7. 10¼.	41. 40.
c.	5. 19.	21. 40.

quae omnes ſtellae quoad declinationis differentiam auſtraliores.

liores ſunt Palilicio; quoad Aſcenſionum rectarum differentiam vero Palilicium praecedunt. Ex his ſecundam et quintam litteris *d* et *c* diſtinxi, quippe quarum nullum extat nomen. Stellam *c* in catalogis neque Heuelii neque Flamſteedii inueni; eam tamen ſextae magnitudinis cenſeo. Reliquas ſeptimae magnitudinis ſtellas, quae in figura deſignatae ſunt, ex Catalogo Flamſteedii facta debita reductione deſumſi. Omnium autem ſtellarum differentiae tum aſcenſionum rectarum tum declinationum ad communem ſchematis menſuram (ſeu partes temporis horologii ad motum lunae in diurno relati) reductae et hoc modo figurae inſcriptae ſunt. Ope ſemidiametri lunae in menſura ſchematis datae, ex datis ſtellarum 1 ad θ, 2 ad θ, *c*, locis interſecui ſemitam lunarem reſpectiue in punctis 1, 2, 6, 7, 8, 11, vt habeantur loca centri lunae in Immerſione ſtellae 1 ad θ, Immerſione 2 ad θ, Emerſione 2 ad θ, Emerſione 1 ad θ, Immerſione ſtellae *c*, et Emerſione ipſius *c* reſpectiue; et his numeris obſeruationes vel deductiones reſpondentes in §. 1. indicaui.

§. 41. Datis ex conſtructione figurae 1. interuallis locorum centri lunae in ſemita, datisque ex obſeruatione temporibus, quibus centrum lunae loca iſta tenuit, motus lunae horarius in ſemita facillime definiri potuit. Hoc modo deprehendi lunam circa culminationem ſeu obſeruationem 9. §. 1. in vna hora temporis veri percurriſſe in ſemita (fig. 1.) e ſuperficie terrae viſa 23′ 25″; circa obſeruat. 12 vsque ad 17, 24′ 3″ circa coniunctionem viſam cum Palilicio 24′ 35″ partium circuli maximi. En alterum effectum variationis parallaxeos lunae, quem luna

mutata ſua elongatione a meridiano paſſa eſt. Ex parallaxeos enim mutatione, in viciniori lunae ad horizontem ſitu, variationes horariae Aſcenſionis rectae lunae creſcunt; his autem creſcentibus, horarios quoque in ſemita augeri patet. Horarium primum adhibui ad definiendam durationem occultationis ſtellae *c*; ſecundum ad computandas durationes occultationum ſtellarum 1 ad *θ*, 2 ad *θ*, (circa haec enim tempora luna aequaliter remota fuit a meridiano, ac in obſeruationibus 12, 13 etc.); tertio denique horario vſus ſum in determinatione diſtantiae minimae centrorum lunae et Palilicii in coniunctione viſa.

§. 42. Et haec ſunt, quae de determinatione loci ſtellae ad lunam, quando haec iſtam tranſit, methodo ſpecialiori differere volui. Methodus ipſa autem ita comparata eſt, vt paucis mutatis maxime generalis euadat, et ad poſitiones mutuas ſtellarum ſibi vicinarum definiendas, coniunctiones planetarum inter ſe et cum fixis obſeruandas, maculas ſolares vel lunares in diſco ſolis vel lunae deſignandas, phaſes Eclipſium ſolis vel lunae menſurandas etc. facillime adhiberi poſſit. Obſeruationes ſimplici negotio abſoluuntur; appulſus enim tantum ad fila reticuli, inſtrumento immoto, iuxta horologium bonae notae annotari debent. De ſitu reticuli et inſtrumenti obſeruator ſolicitus eſſe non debet, niſi periculum refractionis in vicinia horizontis id ſuadeat; in reliquis caſibus iſte quiuis eſſe et ad obſeruationem commode peragendam eligi poteſt; modo inſtrumentum durante obſeruatione immotum perſiſtat. Syſtema quoque filorum reticuli aliter adornatum eſſe poteſt, ac iſtud, quod in prae-

ſenti

ſenti obſeruatione adhibui; modo inclinationes filorum ad ſe inuicem cognitae ſint. Vt adeo methodus haec propter facilitatem obſeruandi methodum iſtam antecellere videatur, qua obſeruationes ſimiles ope tubi reticulo ſuo inſtructi et ſuper machina parallactica repoſiti expediri ſolent. Ex vtraque methodo aeque exacta quaeſiti determinatio habetur, prout ex harmonia exoptatiſſima eorum, quae hac methodo in §. I. deduxi, cognoui; et licet deductio quaeſiti in hac methodo paululum intricatior videatur ac in reliqua; facta tamen comparatione eorum, quae in vtraque ad determinationem quaeſiti requiruntur, exigua diſcrepantia deprehendetur. Sed hac de re plura diſſerere limites praeſentis diſſertationis prohibent.

NOTA

Diſſertationes ſequentes

I. Ammani de Camelo Bactriano, ad annum 1739.
Diſſertationis Hydraulicae P. II. —— —— 1740.
I. G. Gmelini de frigore et calore glaciei, niuis et aquae. —— —— 1739.
G. F. Mulleri de Scriptis Tanguticis in Sibiria repertis commentatio —— —— 1744.
I. Weitbrechtii Solutio problematis Phyſiologici —— 1739.

pertinentes, ſecundum ſeriem temporis ſerius quidem euulgandae fuisſent, huic tamen Tom. X. certas ob cauſas inſertae ſunt.

Emen-

Emendanda.

P. 19. l. 3. loco $+\frac{1}{6}$ lege $+\frac{1}{9}$.

— — l. 10. loco $+5.7.$ lege $+\frac{1}{5.7.}$

— — loco $+\frac{1}{7}$. lege $+\frac{1}{7.9.}$

p. 21. l. 6. loco $\int E x^5$ lege $s\int E x^5$

p. 28. in margine loco Fig. I. lege Fig. 2.

p. 32. l. 9. loco $\frac{\int u\,dx}{a+b-x} = X$ lege $\frac{\int u\,dx}{a+b-x} = lX$.

p. 46. §. 10. l. 9. lege potius

$$(a+bx^n)\,Tx^2dy + (a+bx^n)\,yx^2\,dT - (a+bx^n)\,T^2x^2y^2\,dx + (g+bx^n)\,dx = o + (c+fx^n)\,Tyxdx.$$

p. 201. §. 4. in margine ſupple Tab. XVI. fig. I. et

p. 202. §. 5. in margine ſupple Tab. XVI. fig. 2.

p. 208. l. 4. in margine ſupple Tab. XVII.

— — l. 5. loco RB lege AB

— — l. 6. loco RE*e* lege AE*e*.

NATURAL HISTORY

BRITISH [MUSEUM] NATURAL HISTORY.

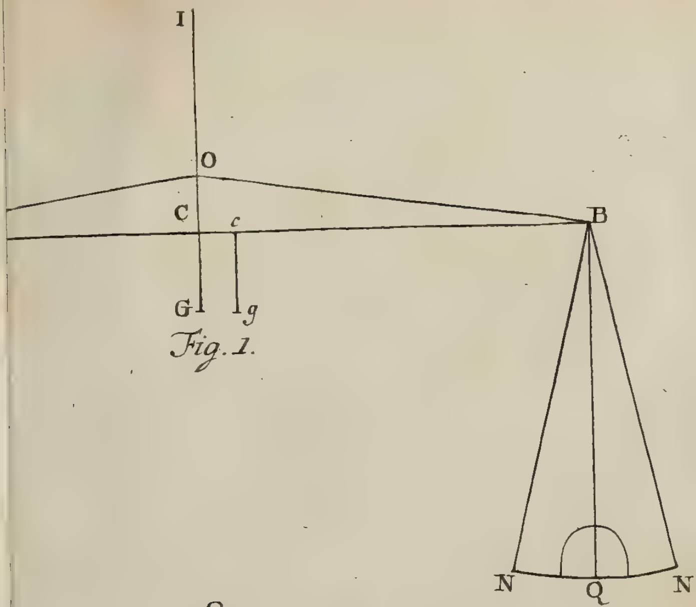


Fig. 1.

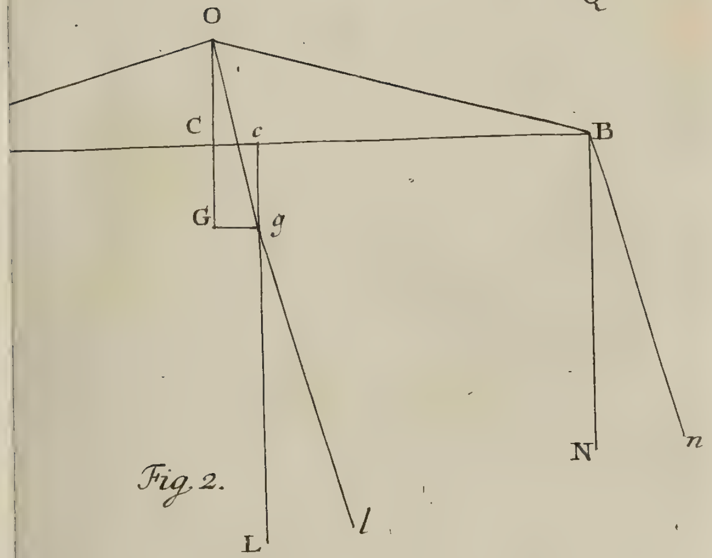


Fig. 2.

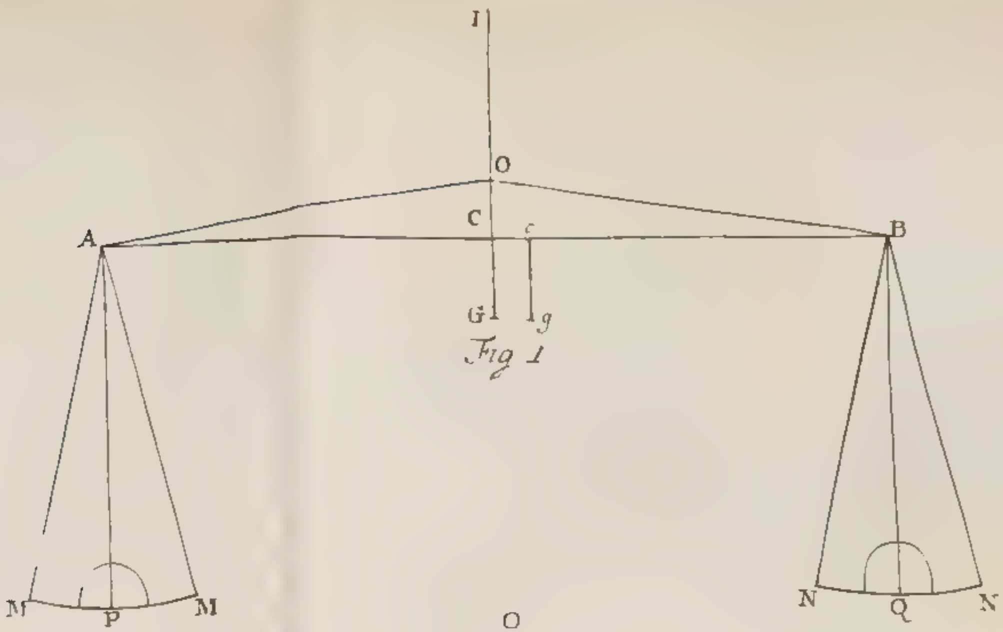


Fig. 1

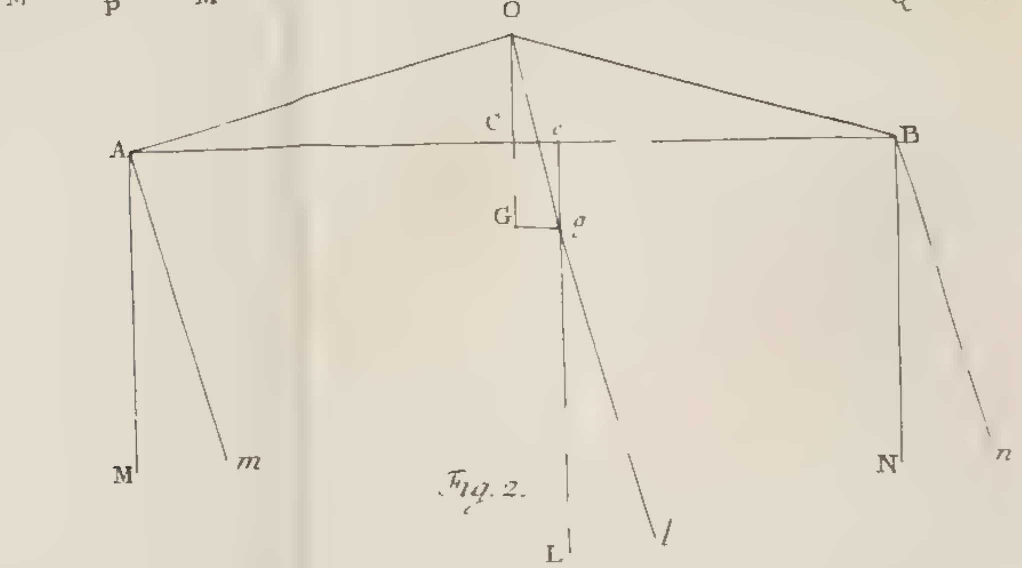
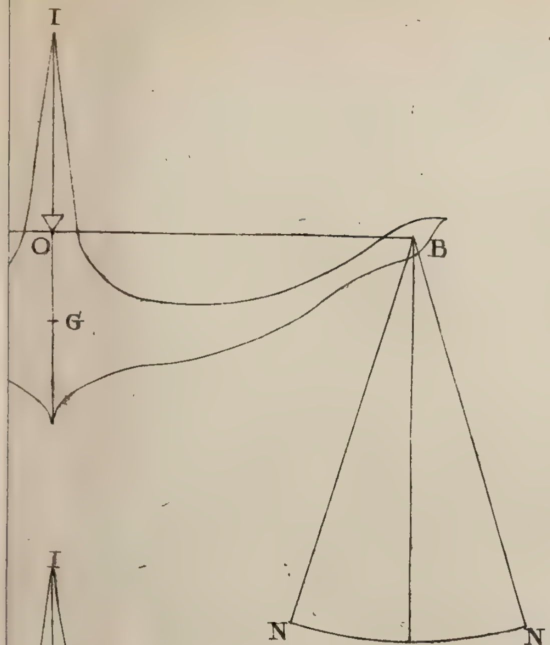


Fig. 2.



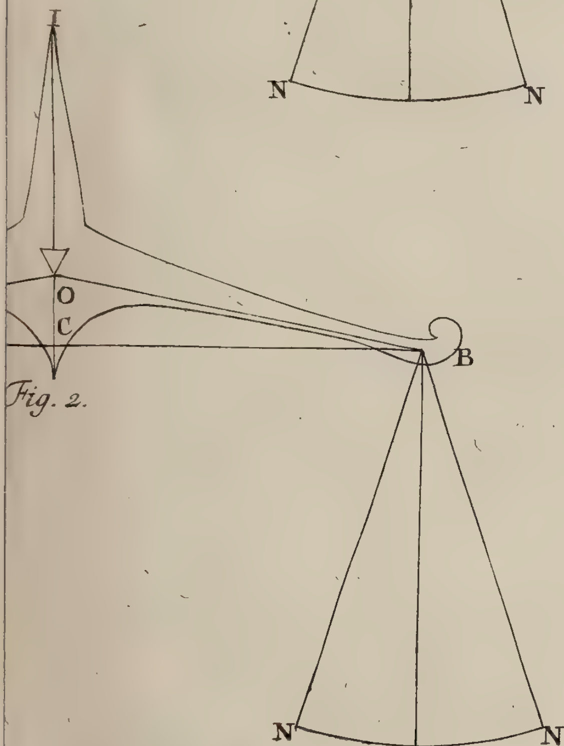
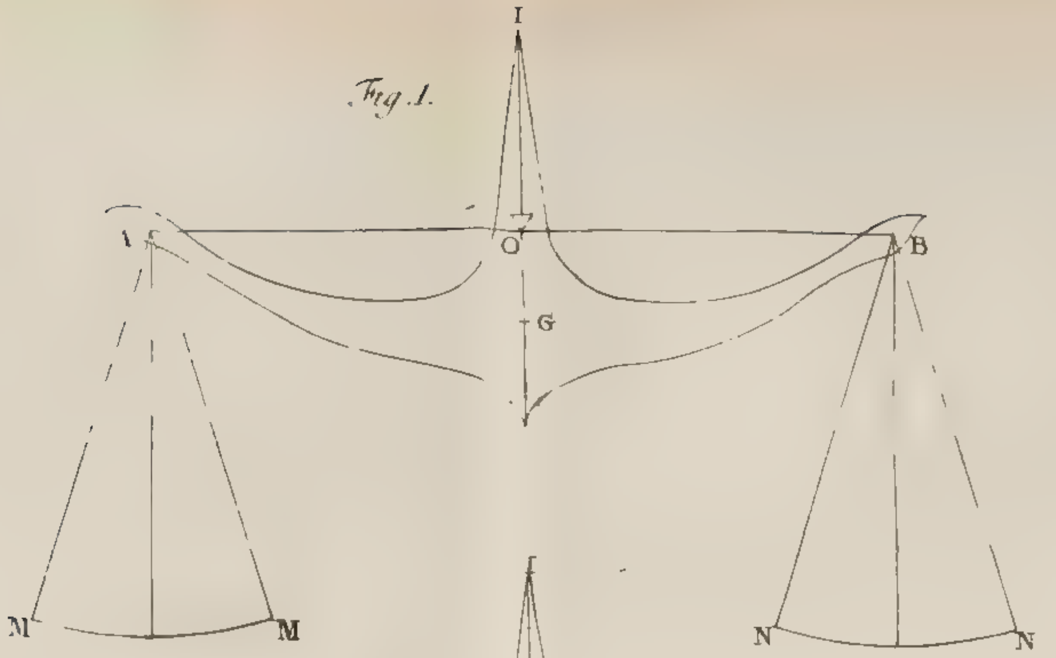


Fig. 2.

Fig. 1.



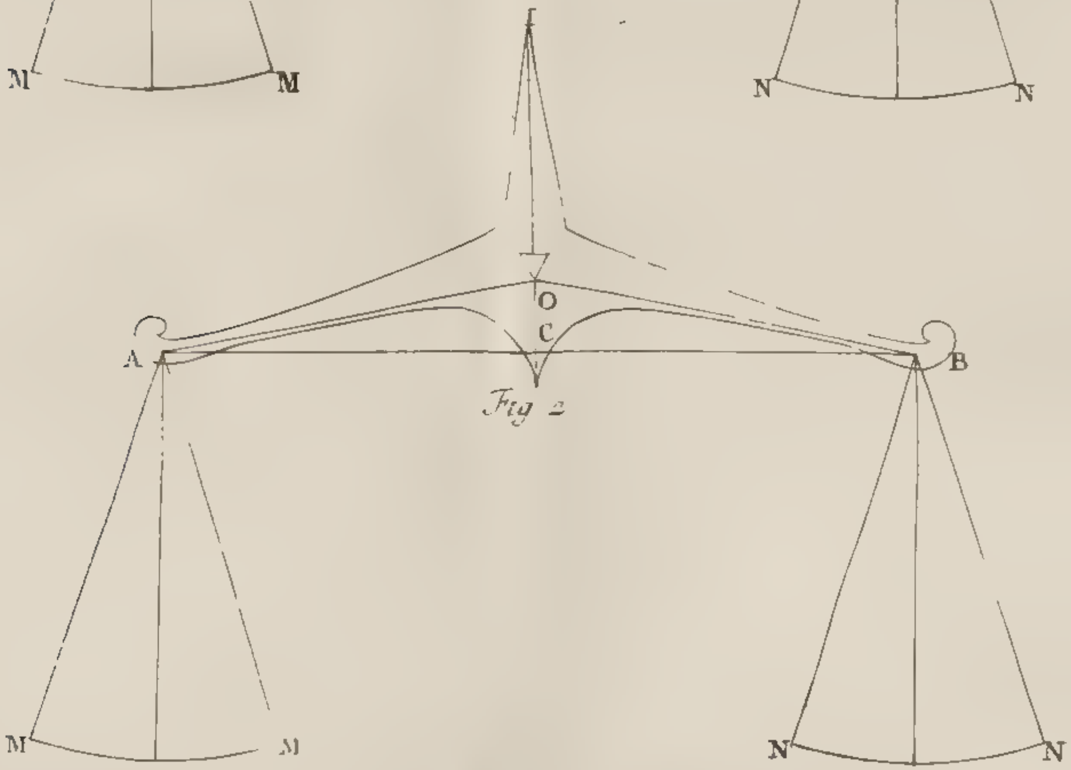
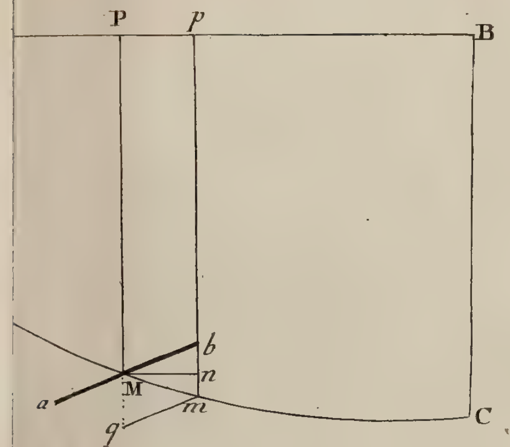


Fig. 2





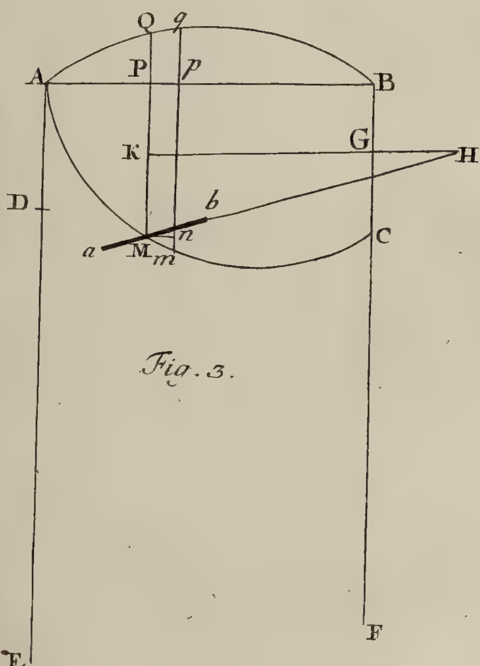


Fig. 3.

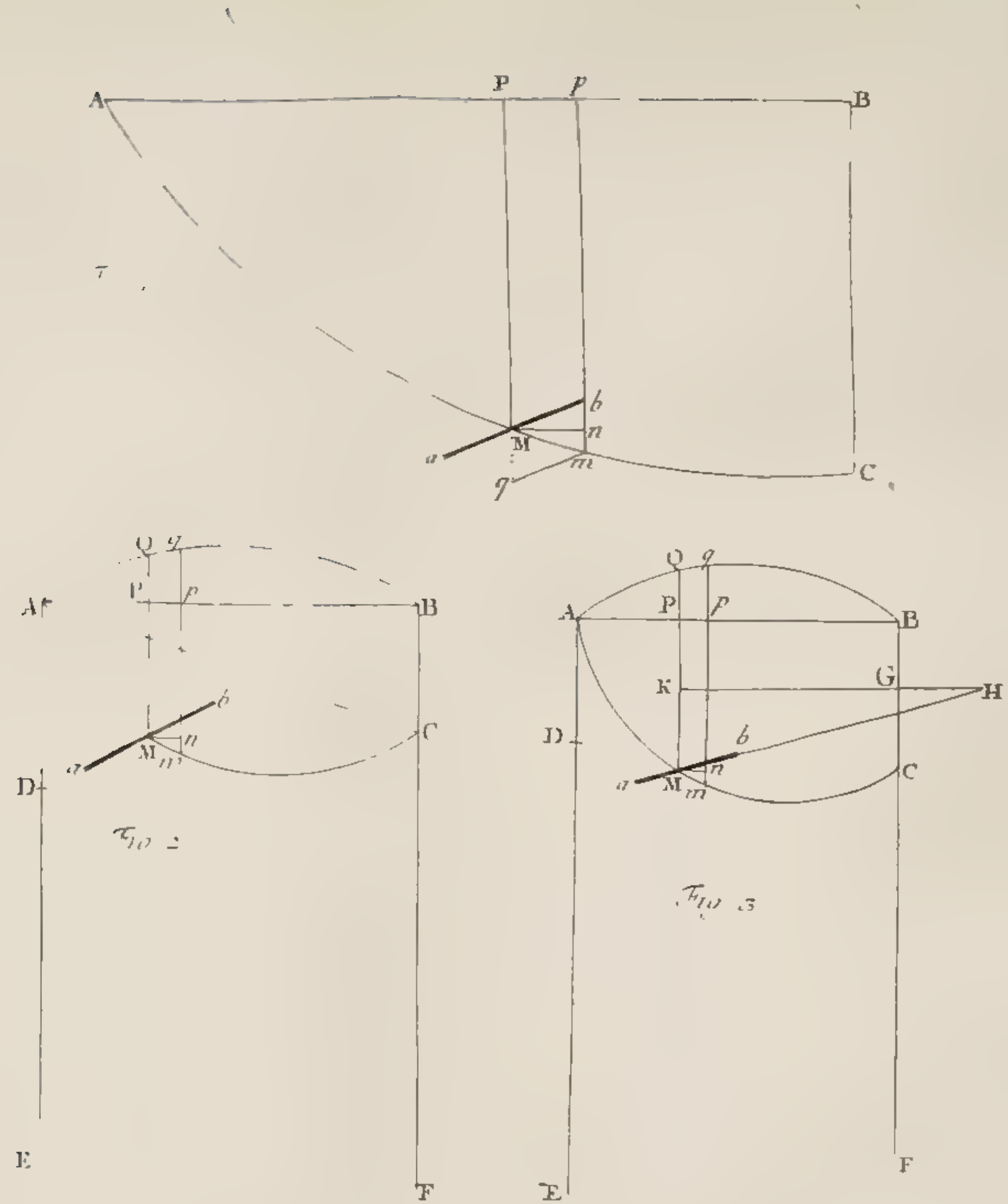
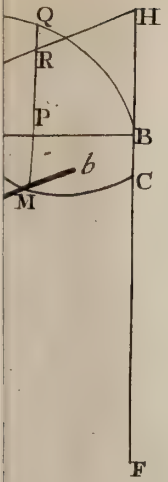


Fig. 2

Fig. 3



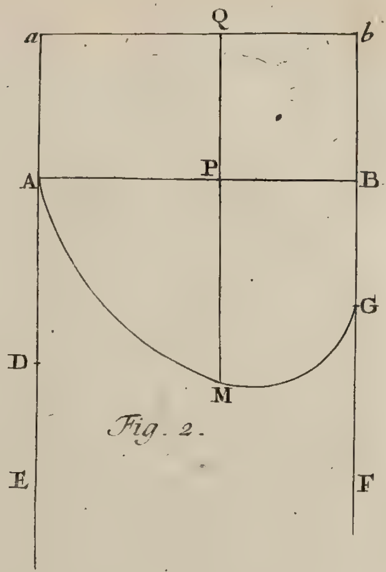
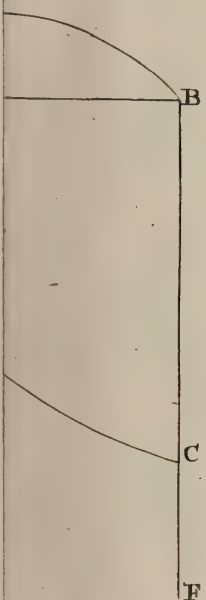


Fig. 2.



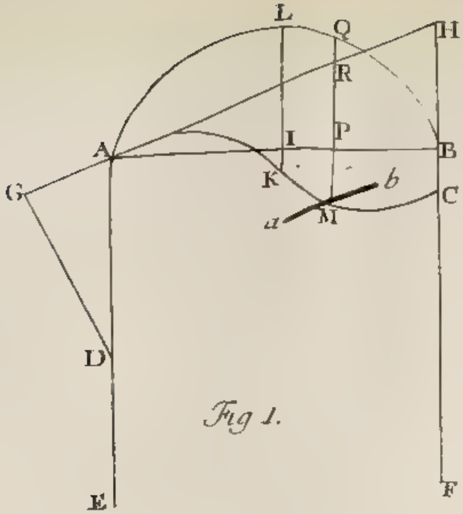


Fig 1.

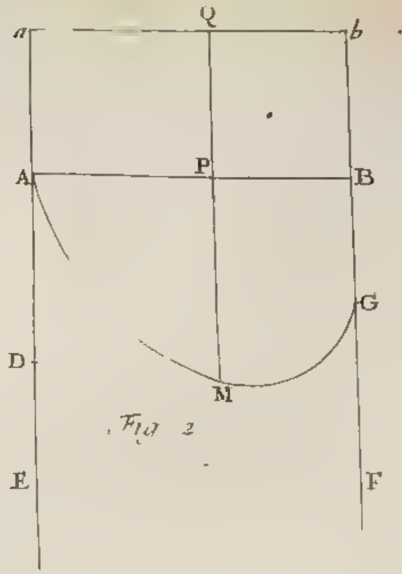


Fig 2

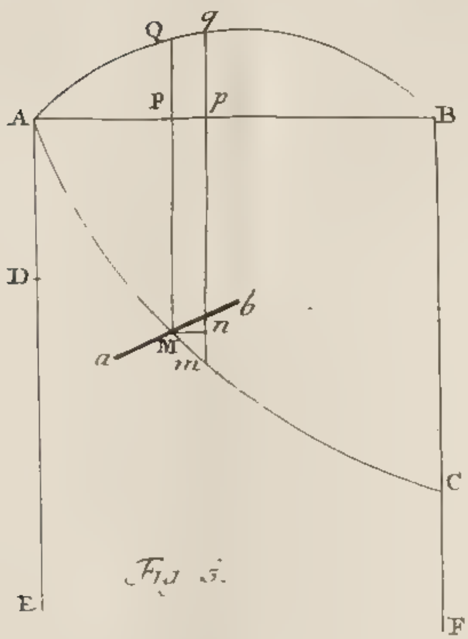


Fig 3.

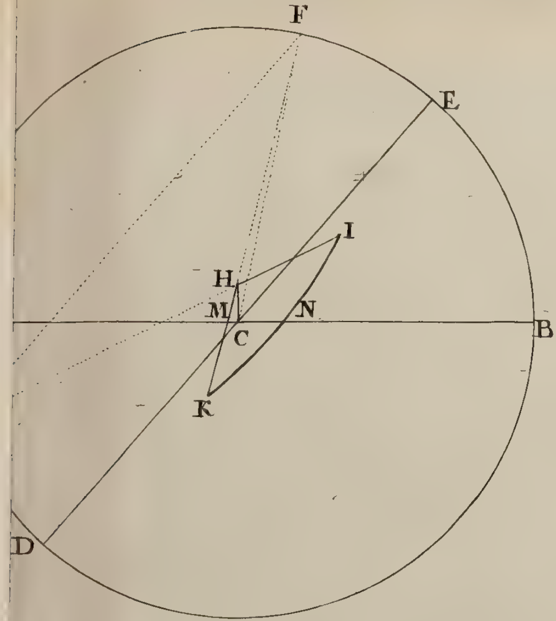


Fig. II.

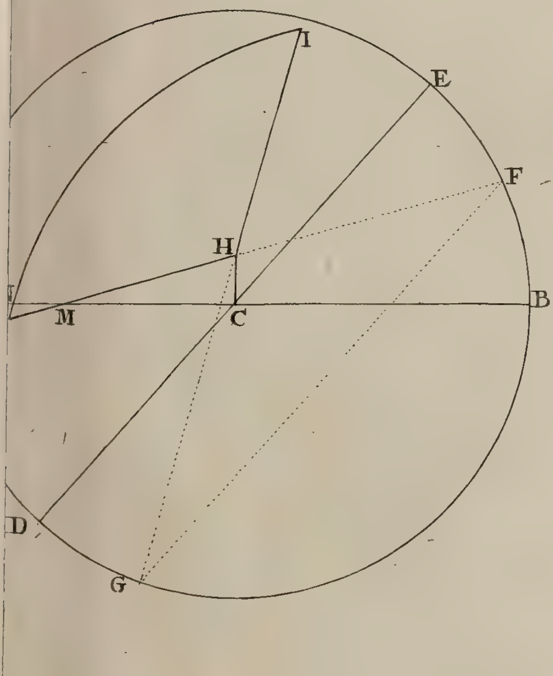


Fig. I.

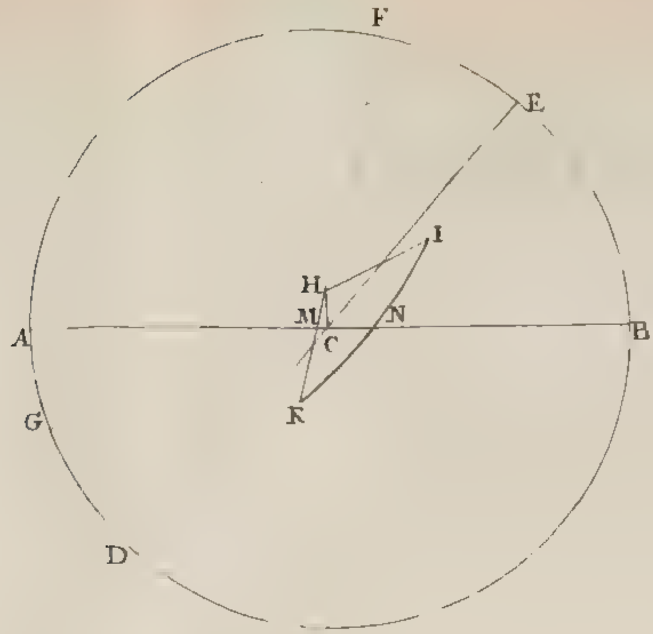


Fig. II.

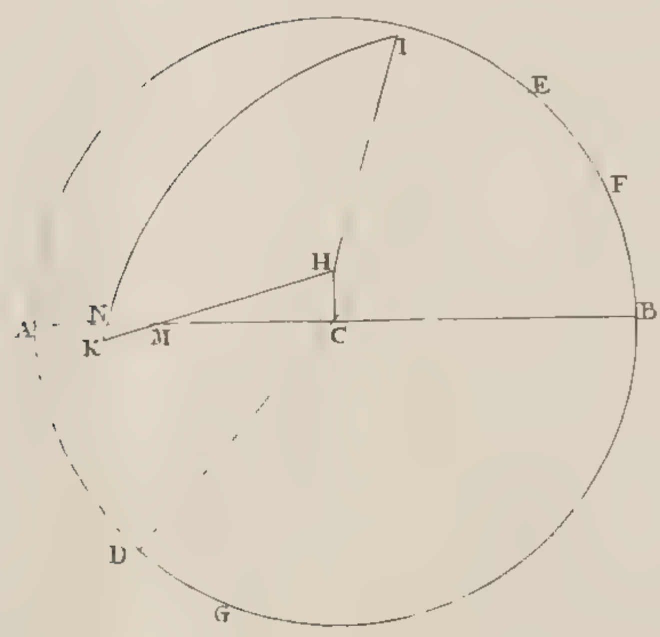


Fig. III.

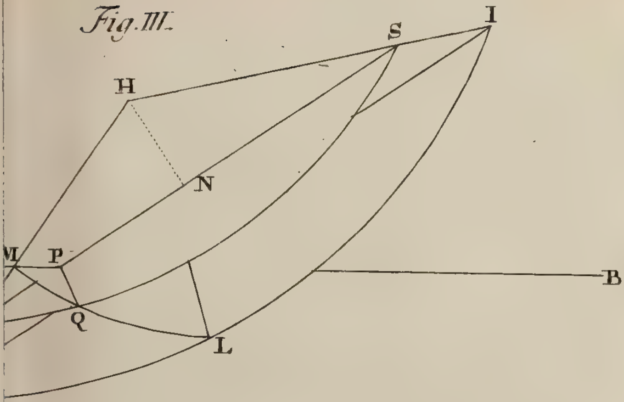


Fig. IV.

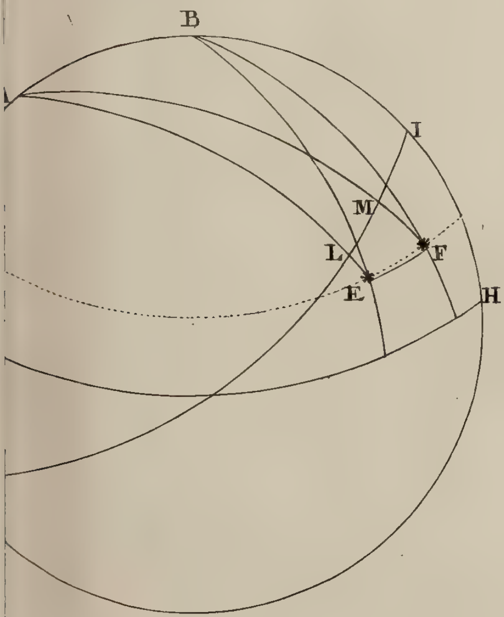


Fig III.

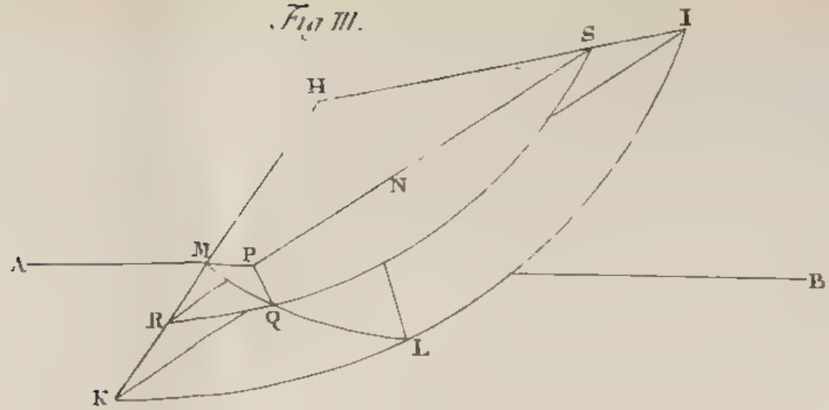


Fig IV.

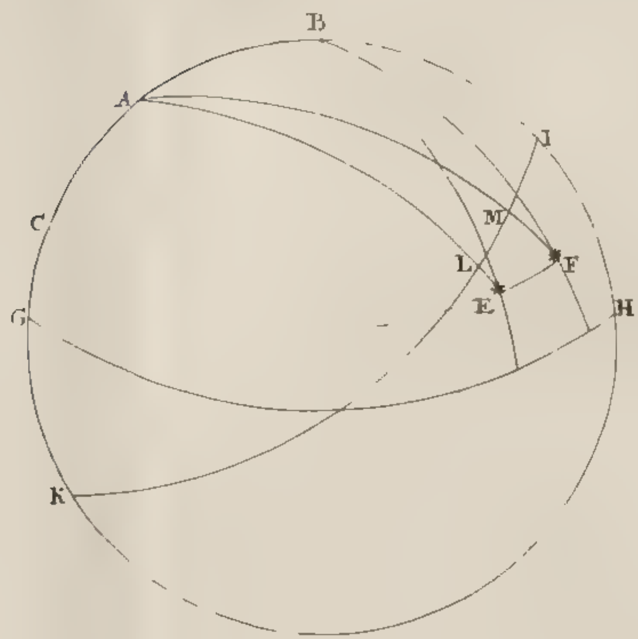


Fig. V.

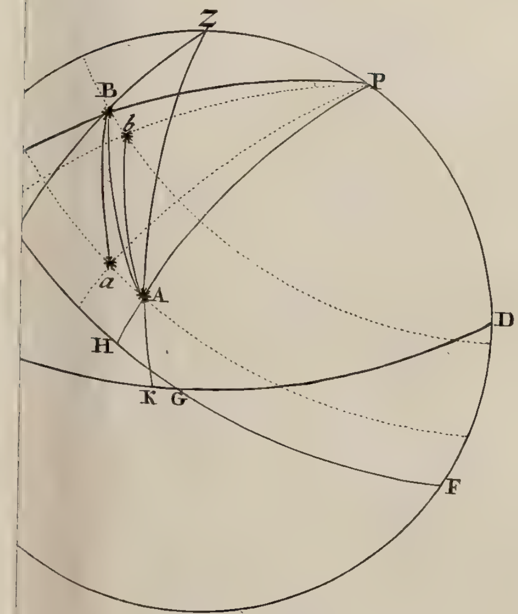


Fig. VI.

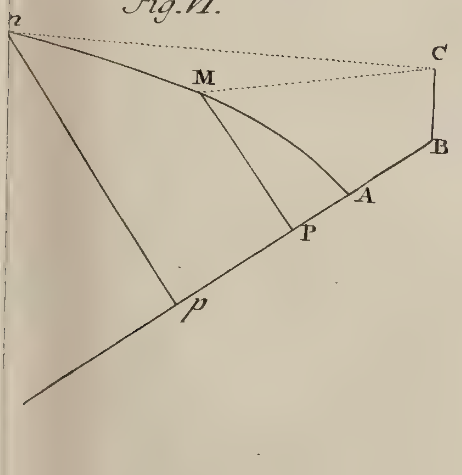


Fig. V.

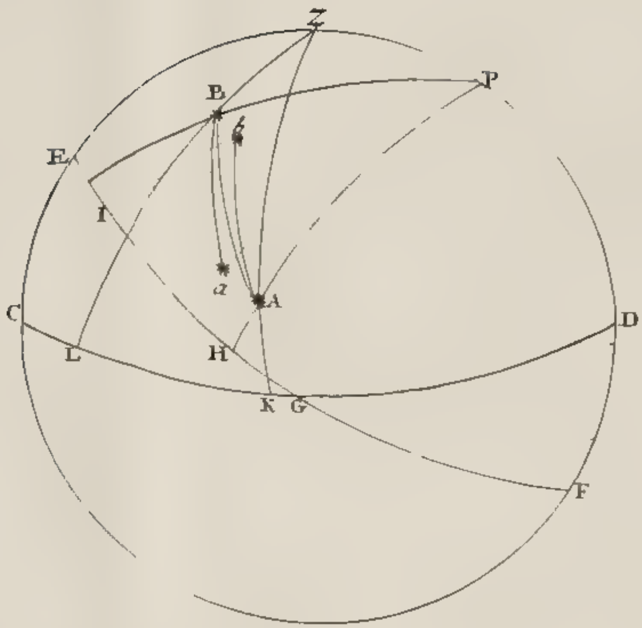
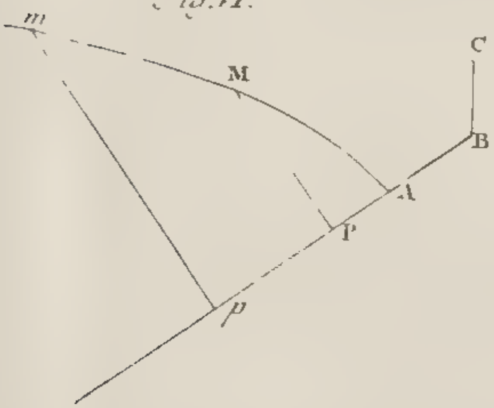


Fig. VI.



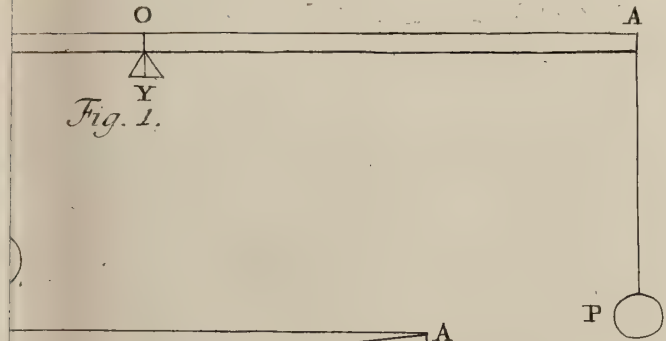
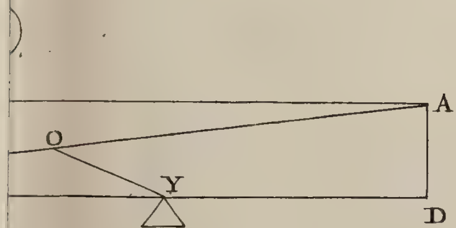


Fig. 1.



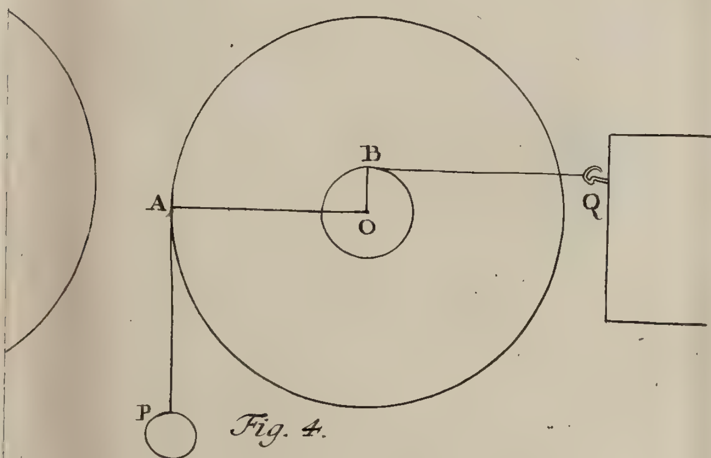


Fig. 4.

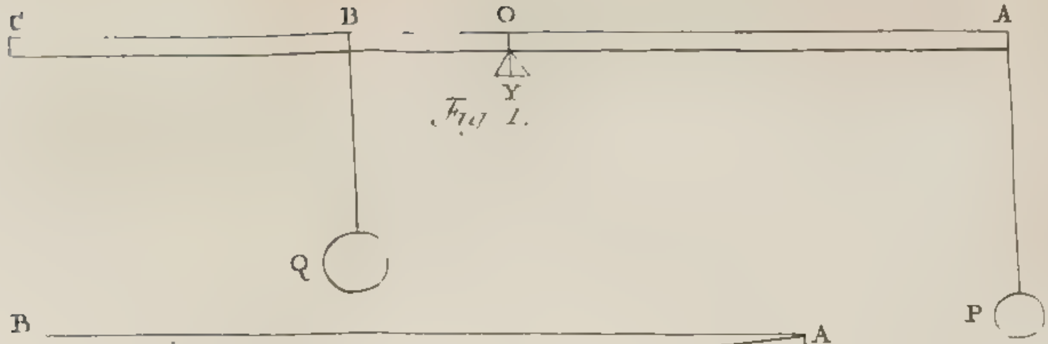


Fig. 1.

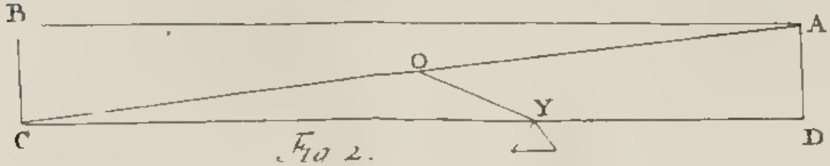


Fig. 2.

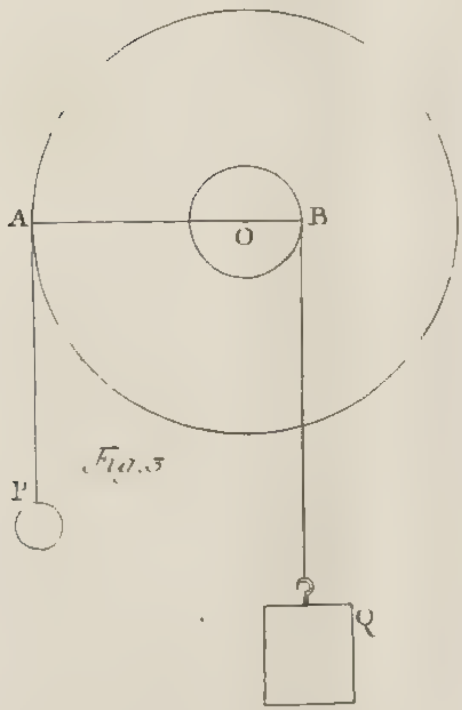


Fig. 3

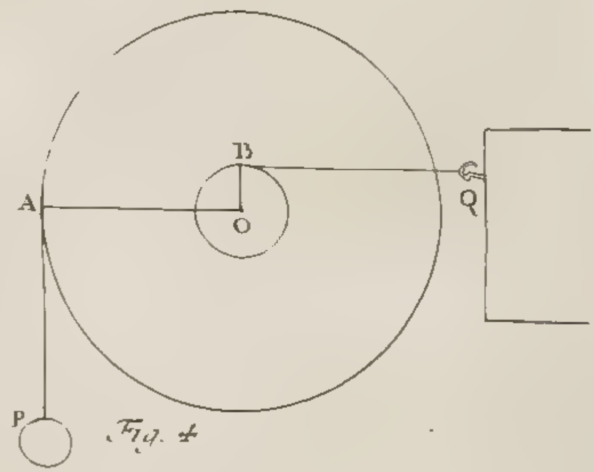
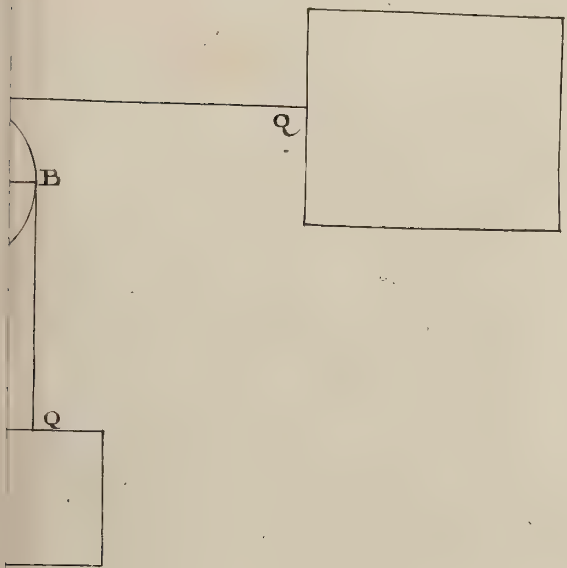


Fig. 4



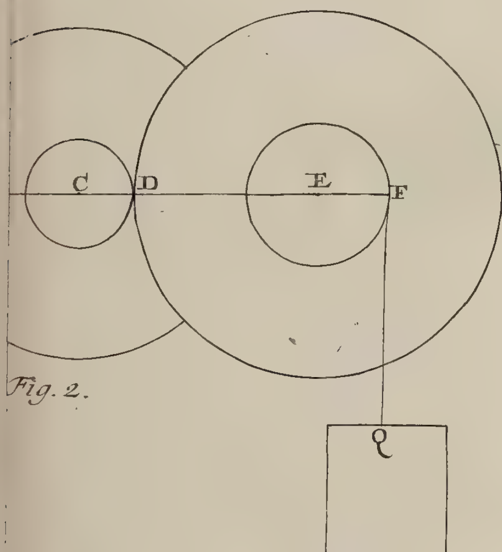
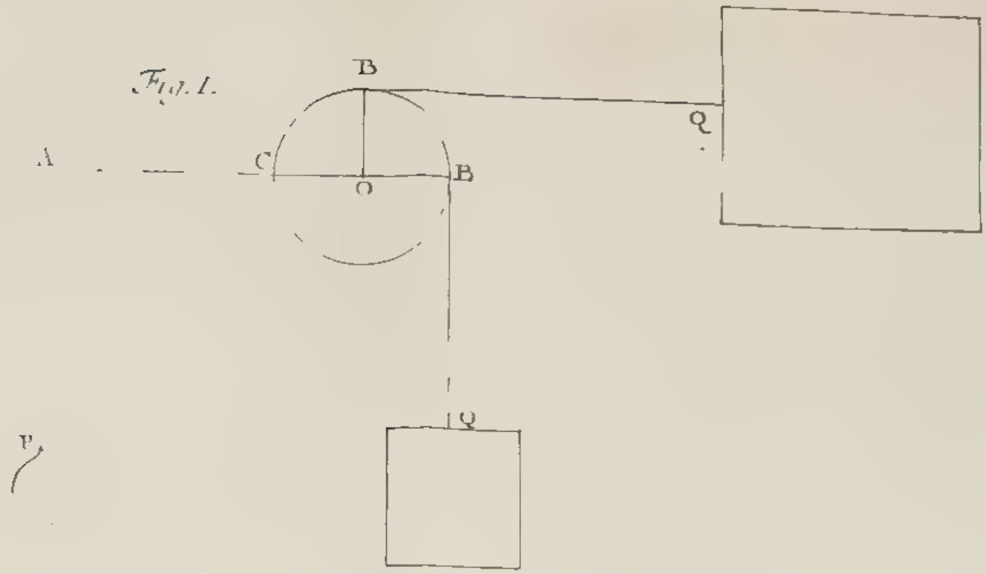


Fig. 2.

Fig. 1.



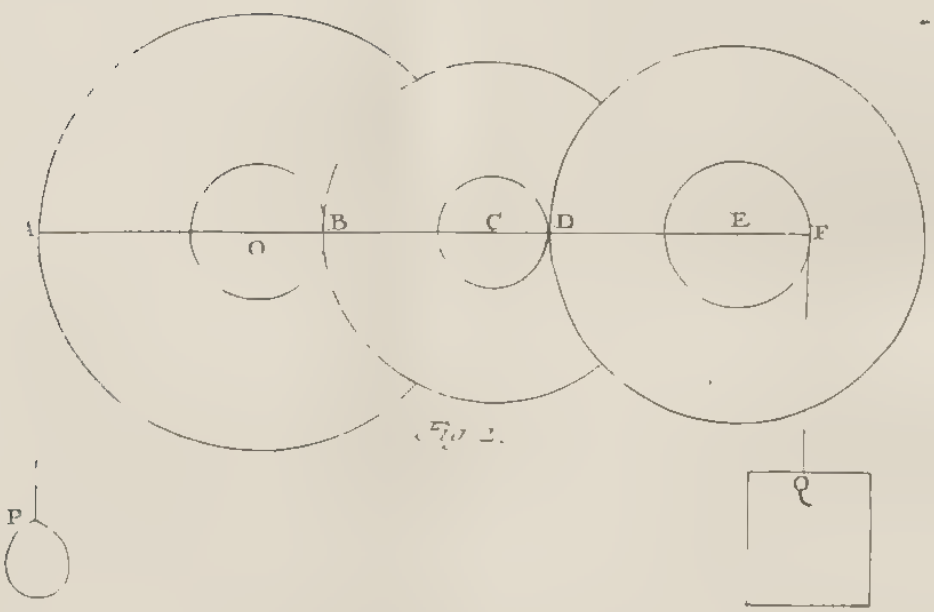
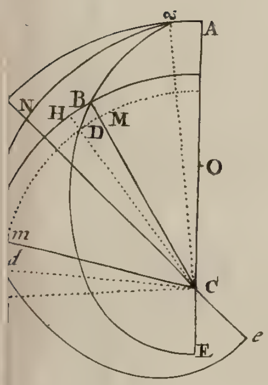
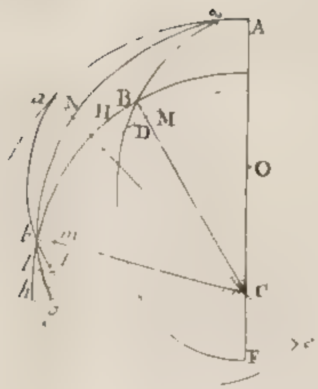


Fig. 2.


A
B
N
H
M
D
O
m
d
C
E
e


A
N
H
B
M
D
O
C
F

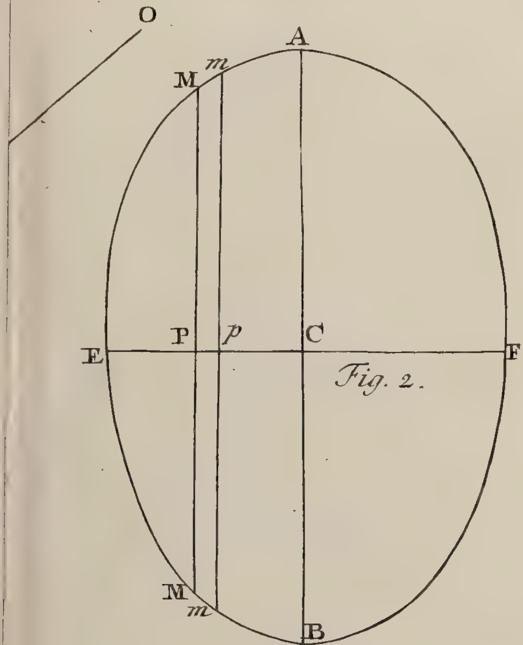


Fig. 2.

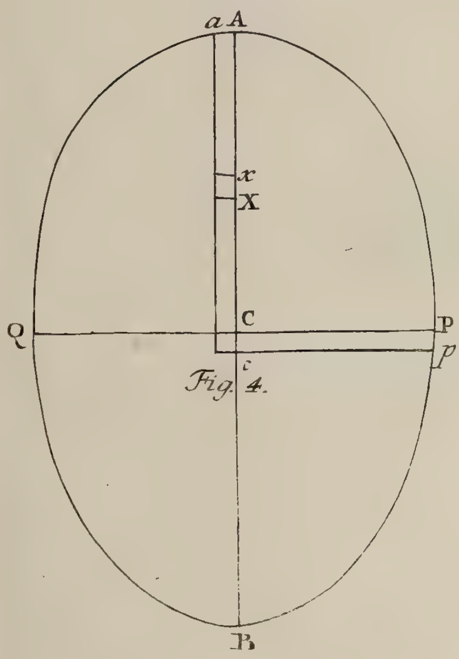
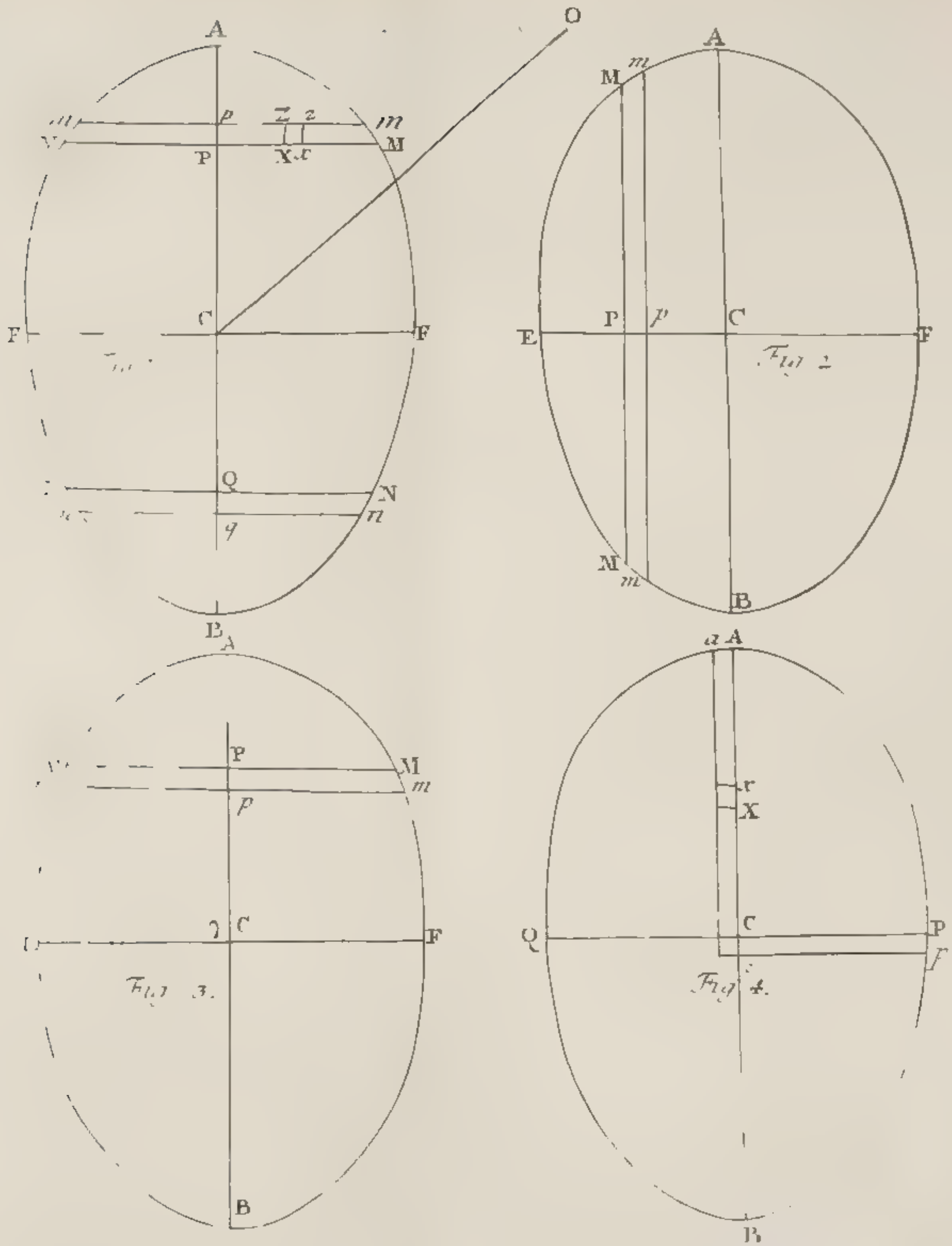


Fig. 4.


A
O
m
p
Z
z
m
M
P
X
x
M
C
F
F
Q
N
q
n
B
A
M
m
E
P
p
C
F
Fig. 2
M
m
B
A
P
M
m
p
C
F
Fig. 3.
B
a
A
r
X
Q
C
P
p
Fig. 4.
B

Comment: Ac. Sc. Tom X Tab. XII

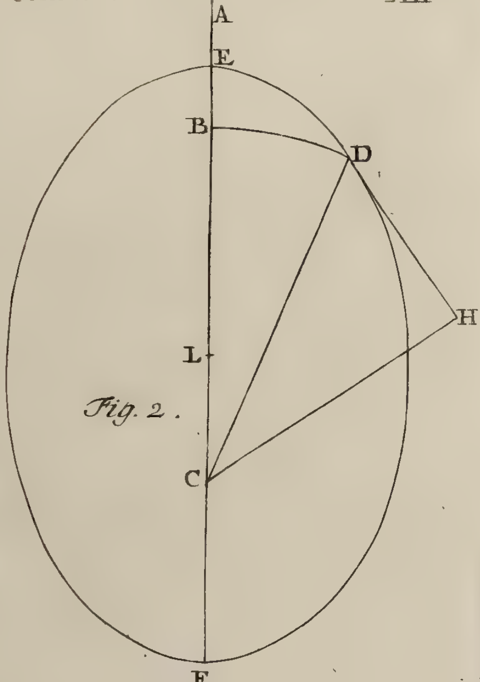


Fig. 2.

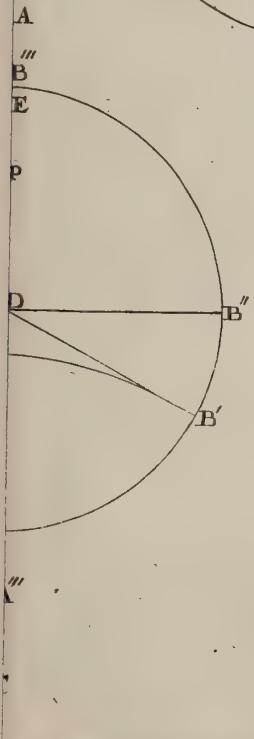




Fig. 1

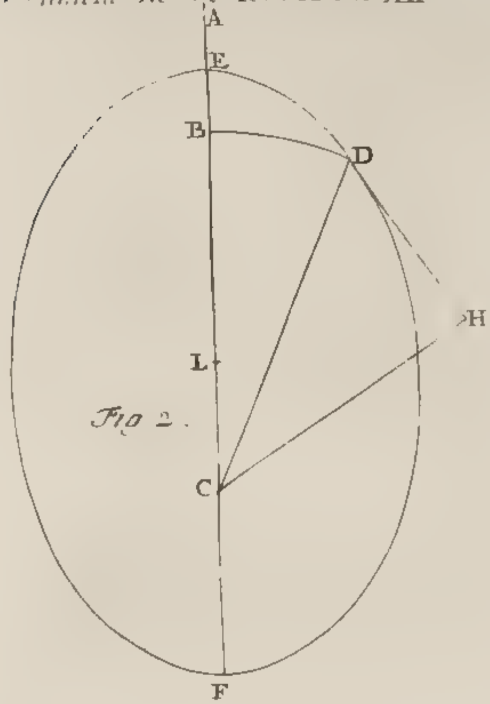


Fig. 2.

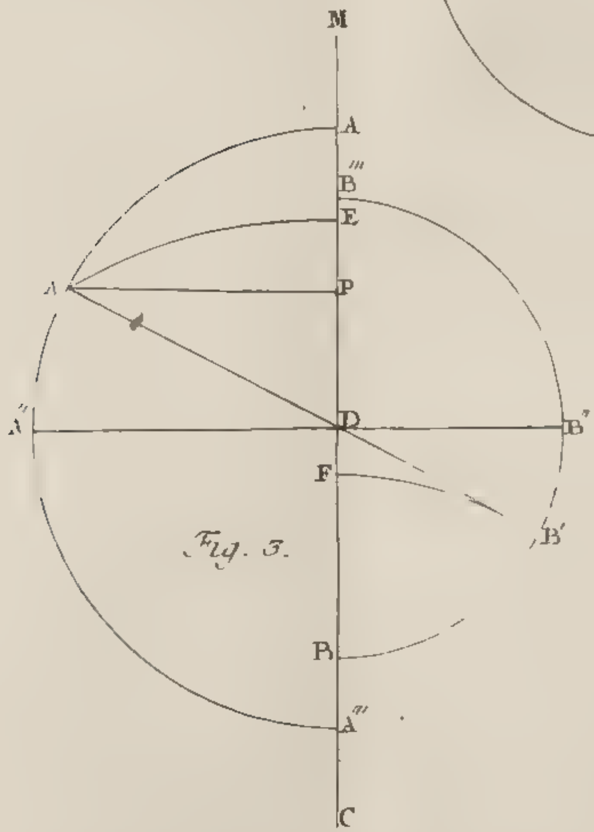


Fig. 3.

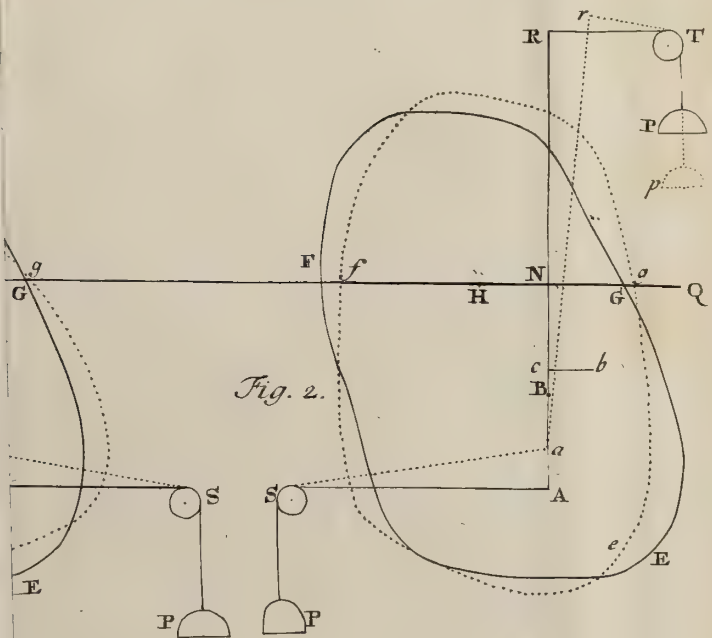


Fig. 2.

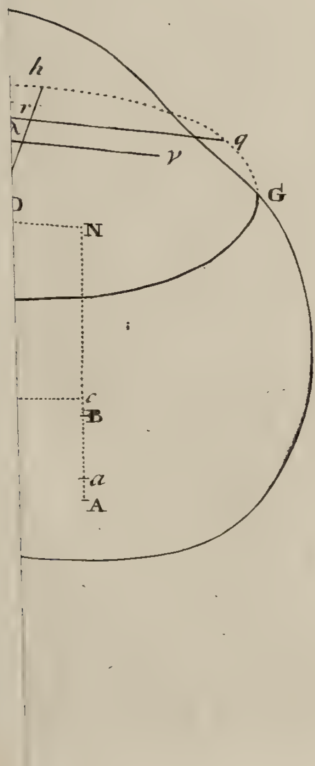


Fig. 3.

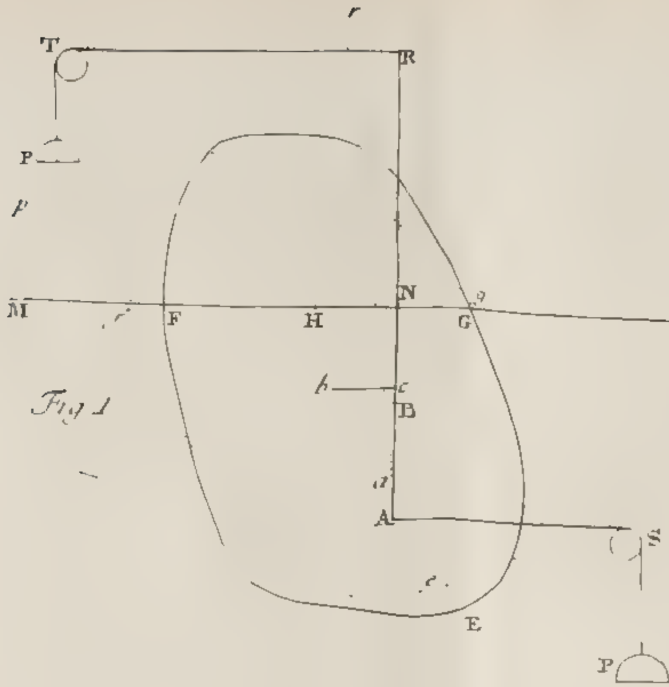


Fig. 1

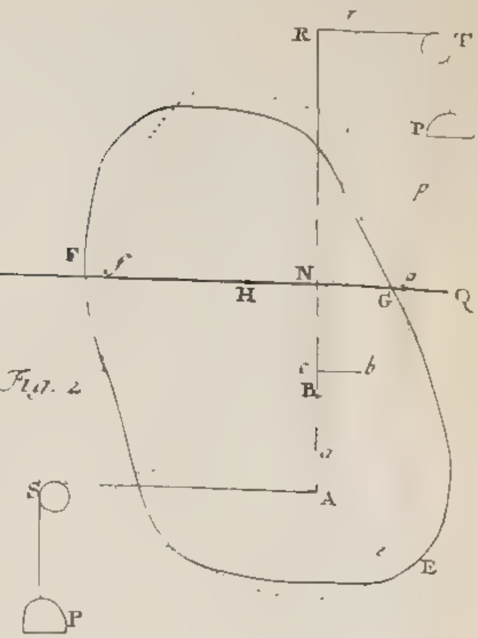


Fig. 2

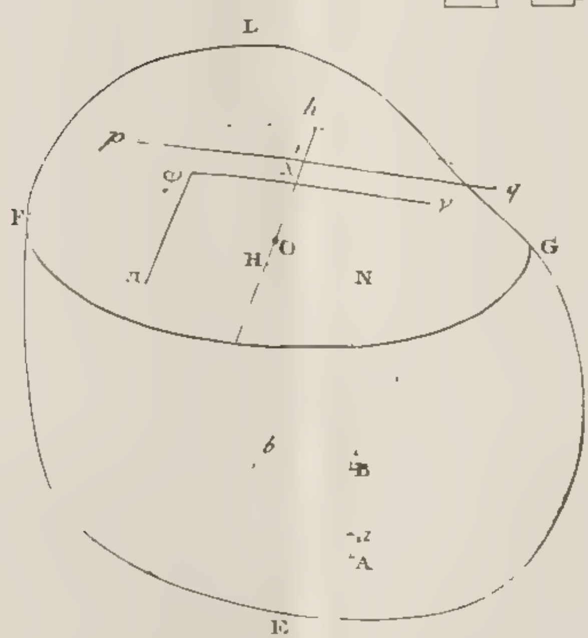
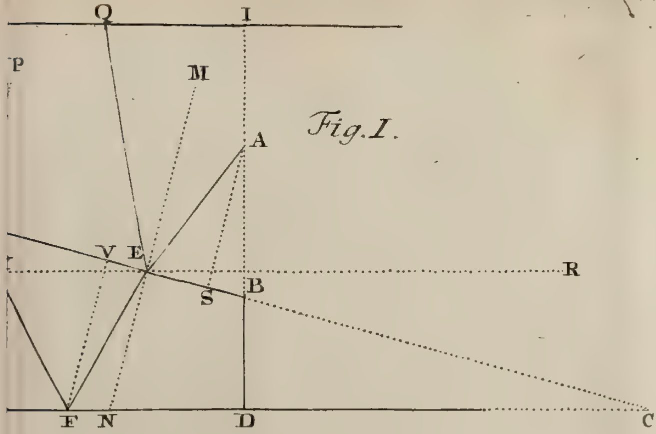
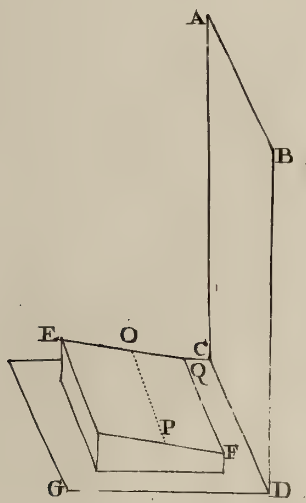


Fig. 3

Fig. I.







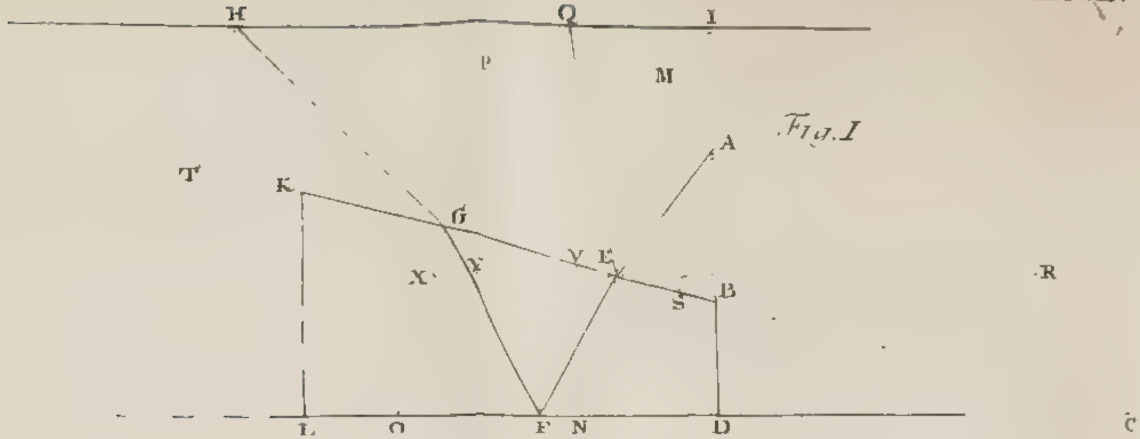


Fig. I

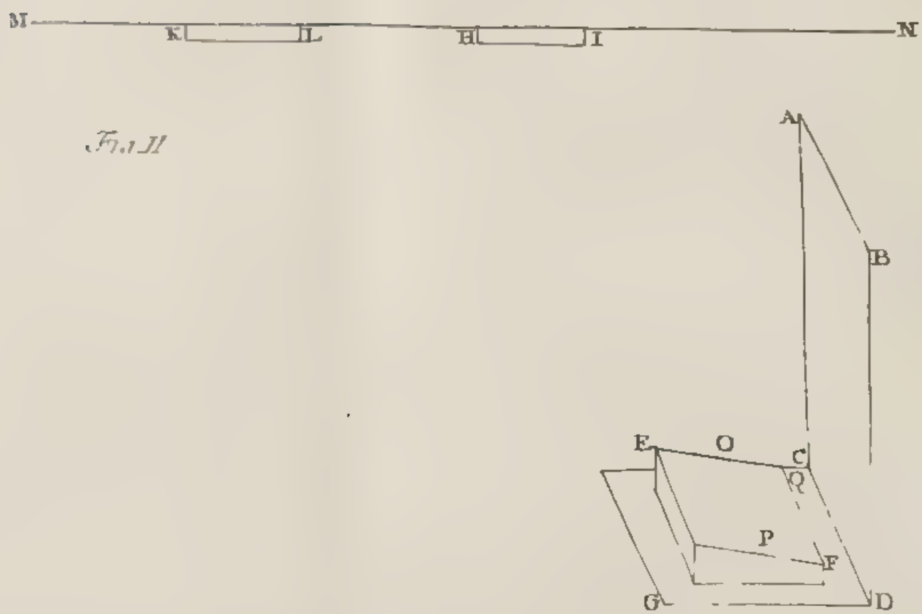


Fig. II

Fig. I.

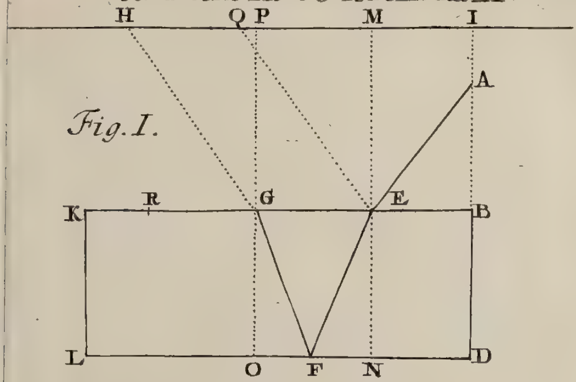


Fig. III.

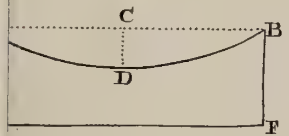


Fig. II.

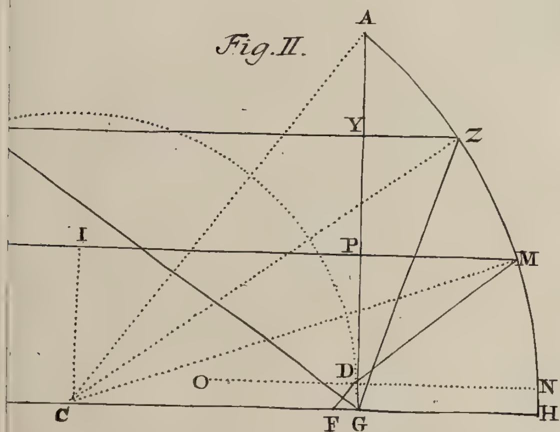


Fig. I.

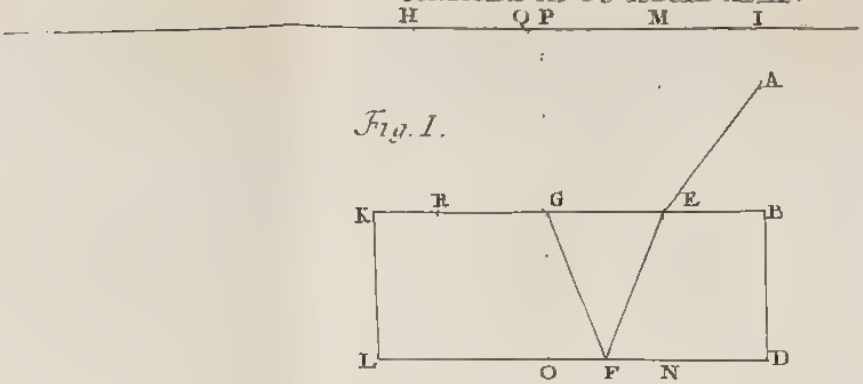


Fig. III.

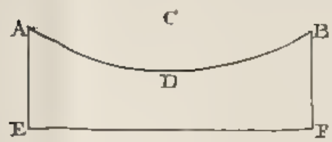
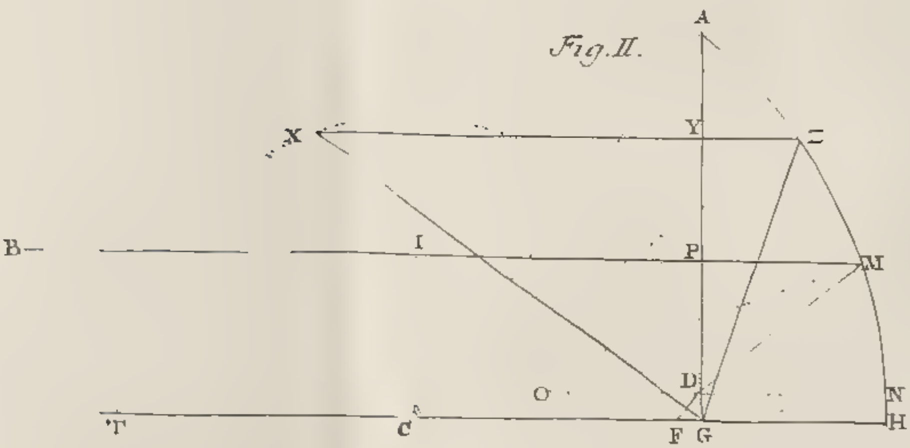


Fig. II.



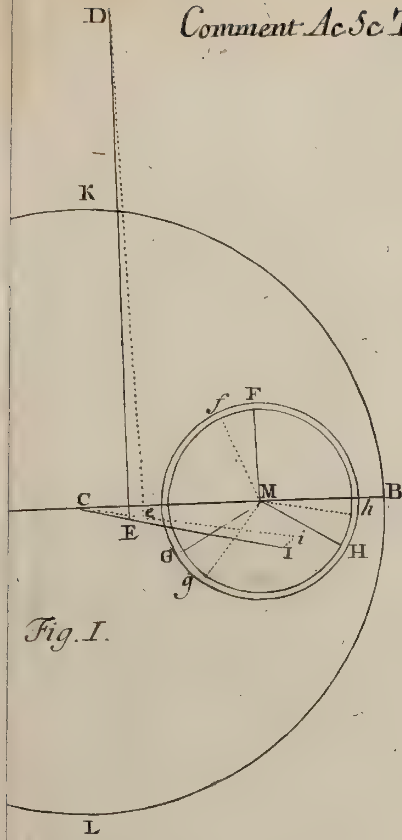


Fig. I.

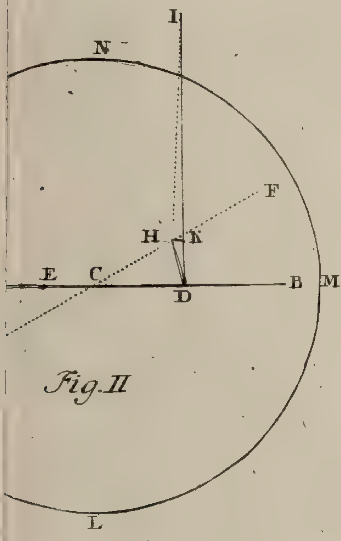


Fig. II

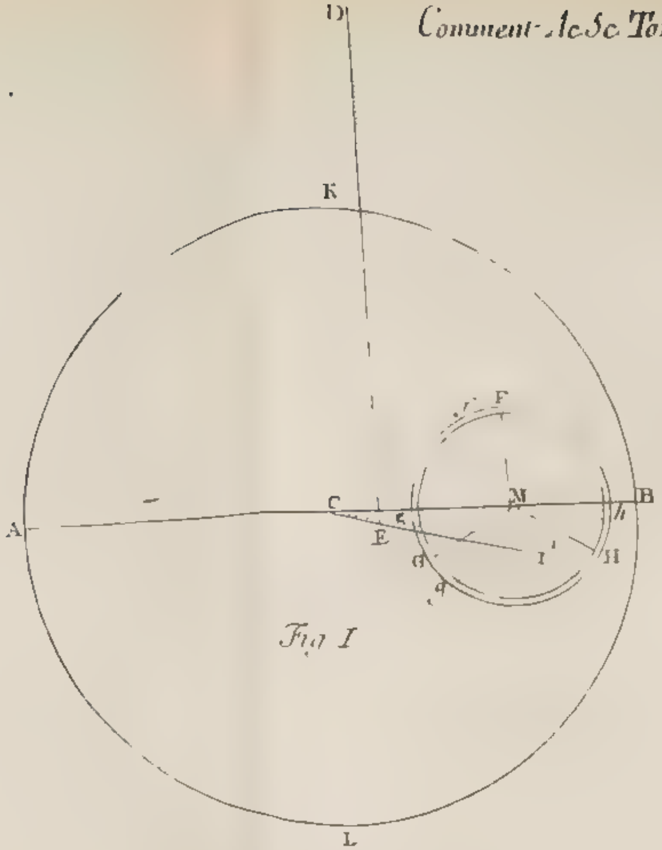


Fig. I

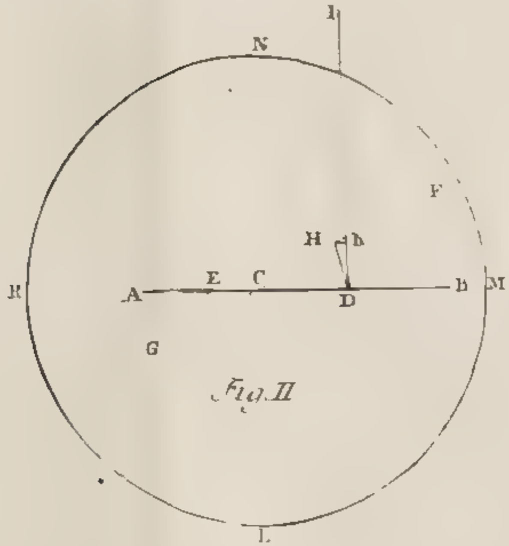


Fig. II

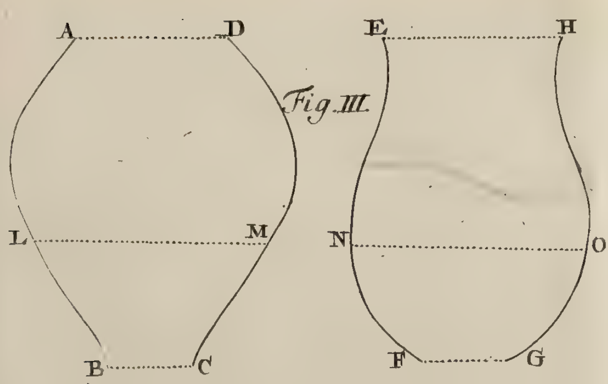
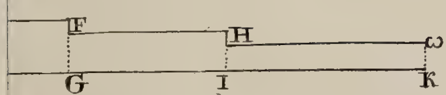
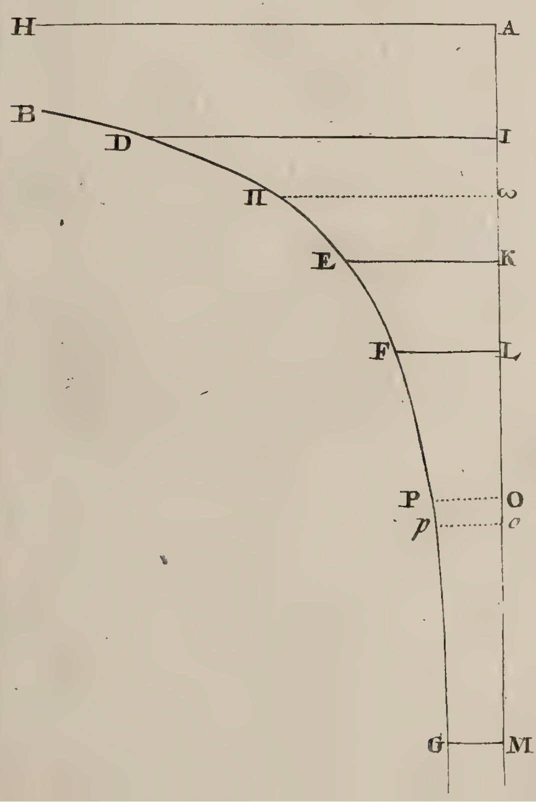
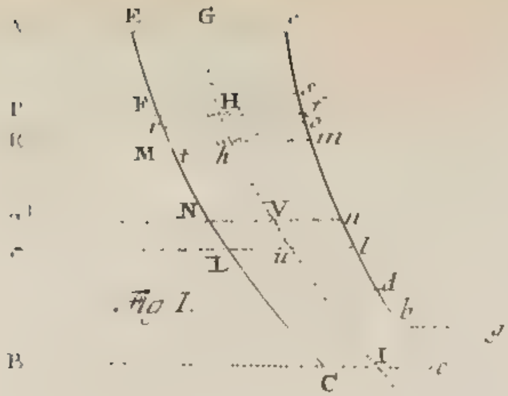


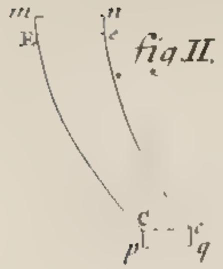
Fig. III.

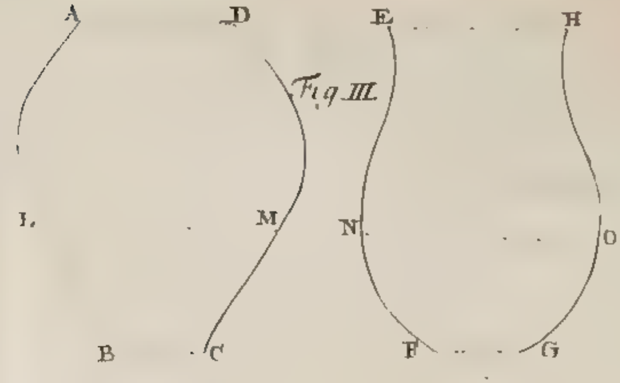
Fig. IV.

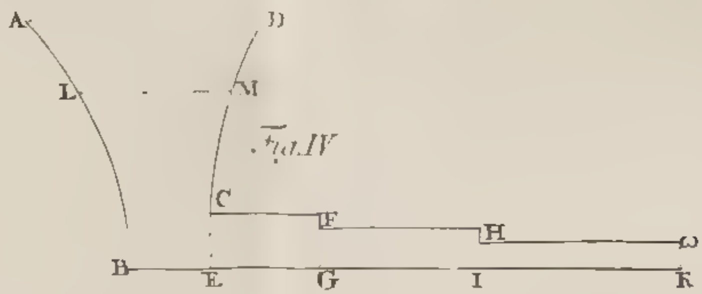


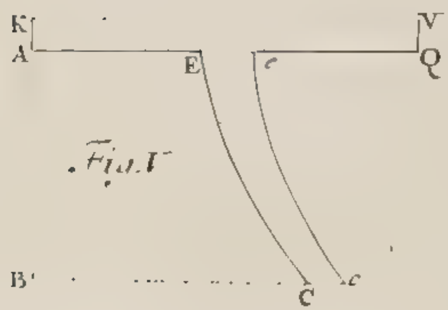


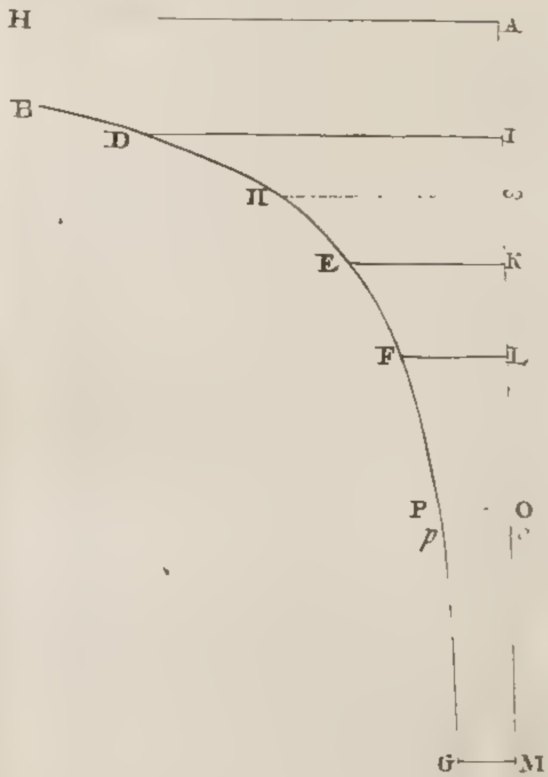

Fig. I.


Fig. II.


Fig. III.


Fig. IV.


Fig. V.



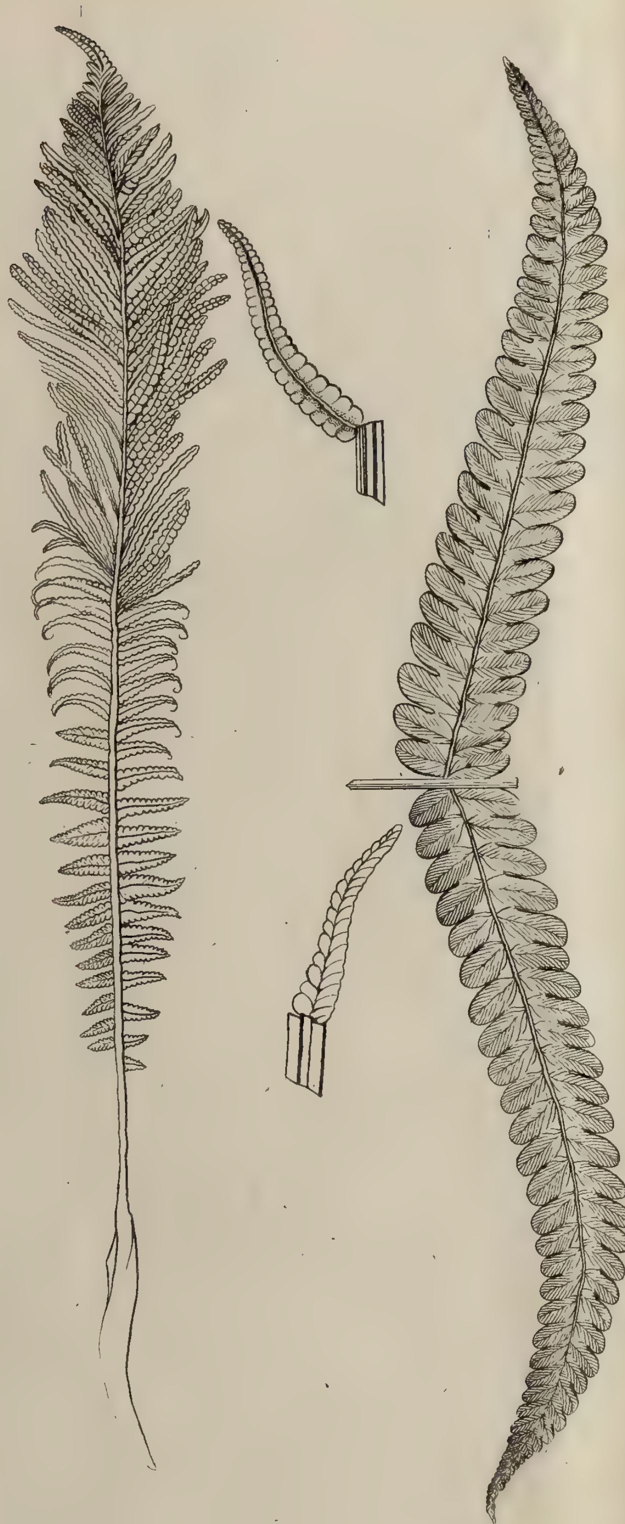






fig. 1.



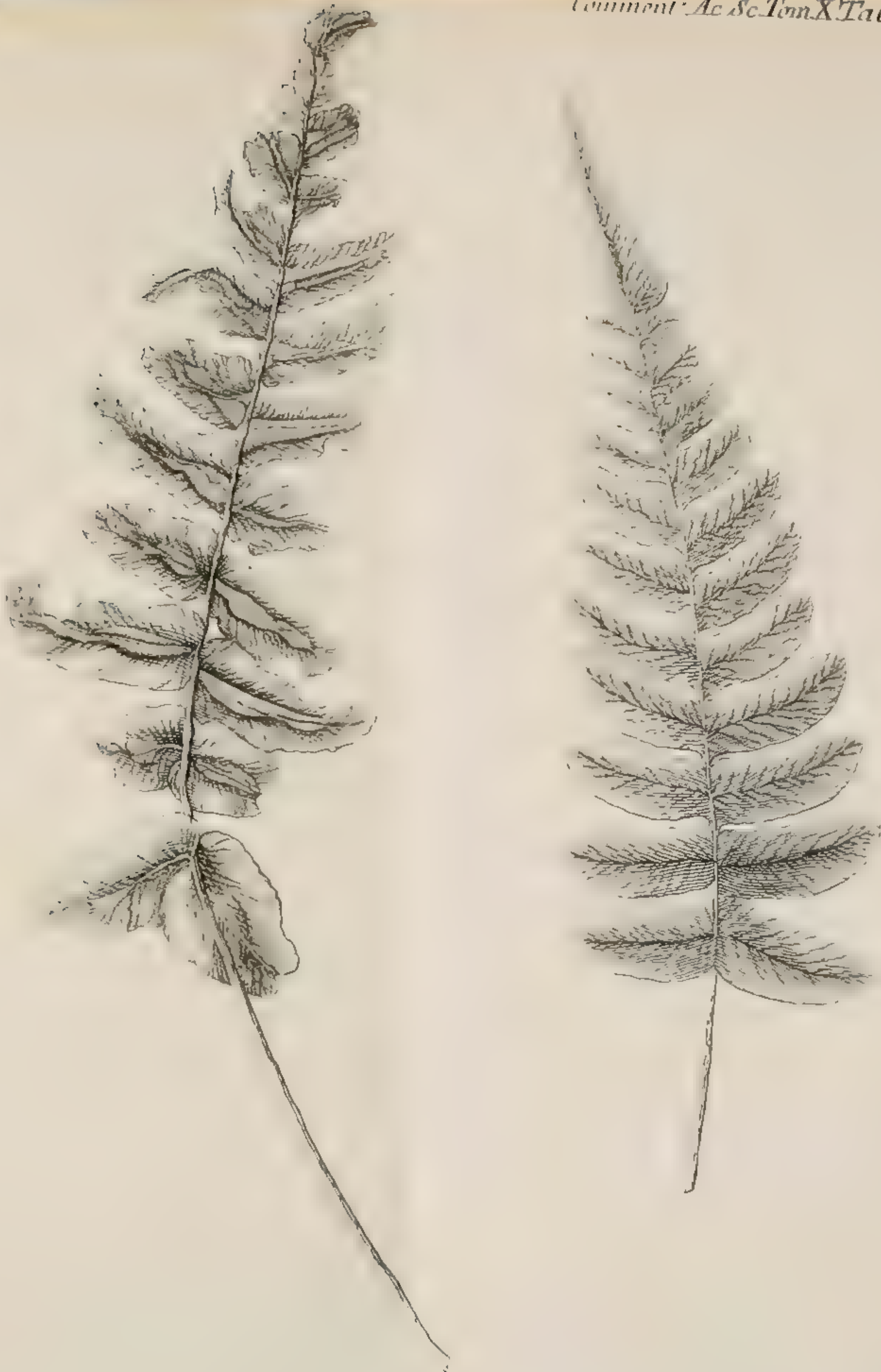
fig. 2.

n   Americanum minus hirſutum



Filicastrum Americanum minus hirsutum









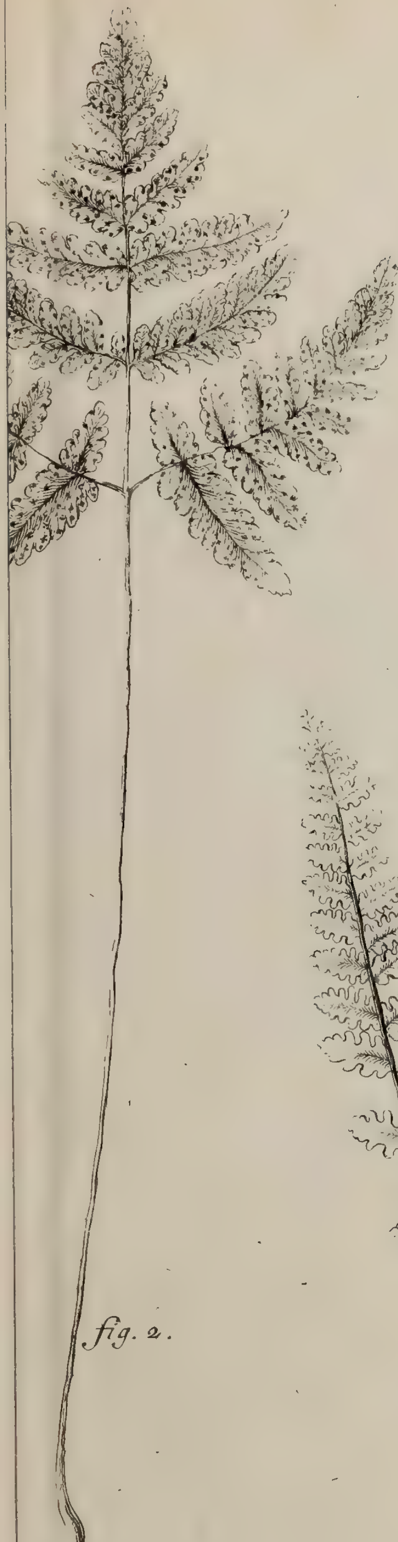


fig. 2.



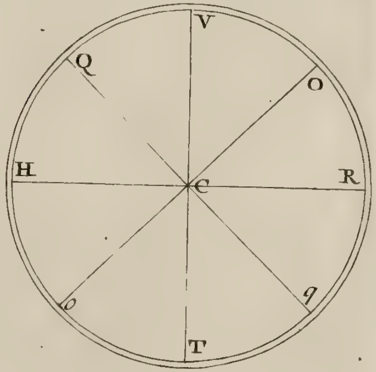
fig. 1.


fig.
fig. 2
fig. 1





Fig. 2.



ridies

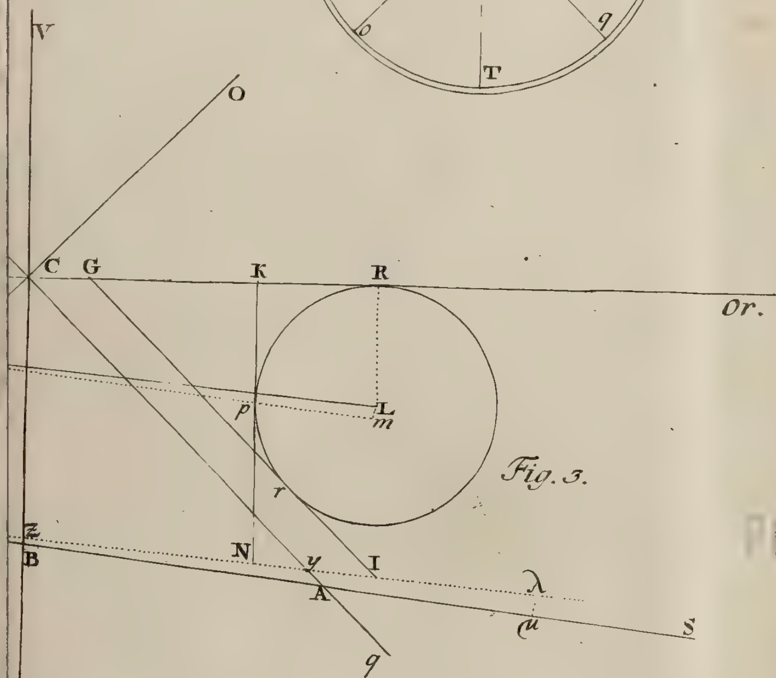


Fig. 3.

it.

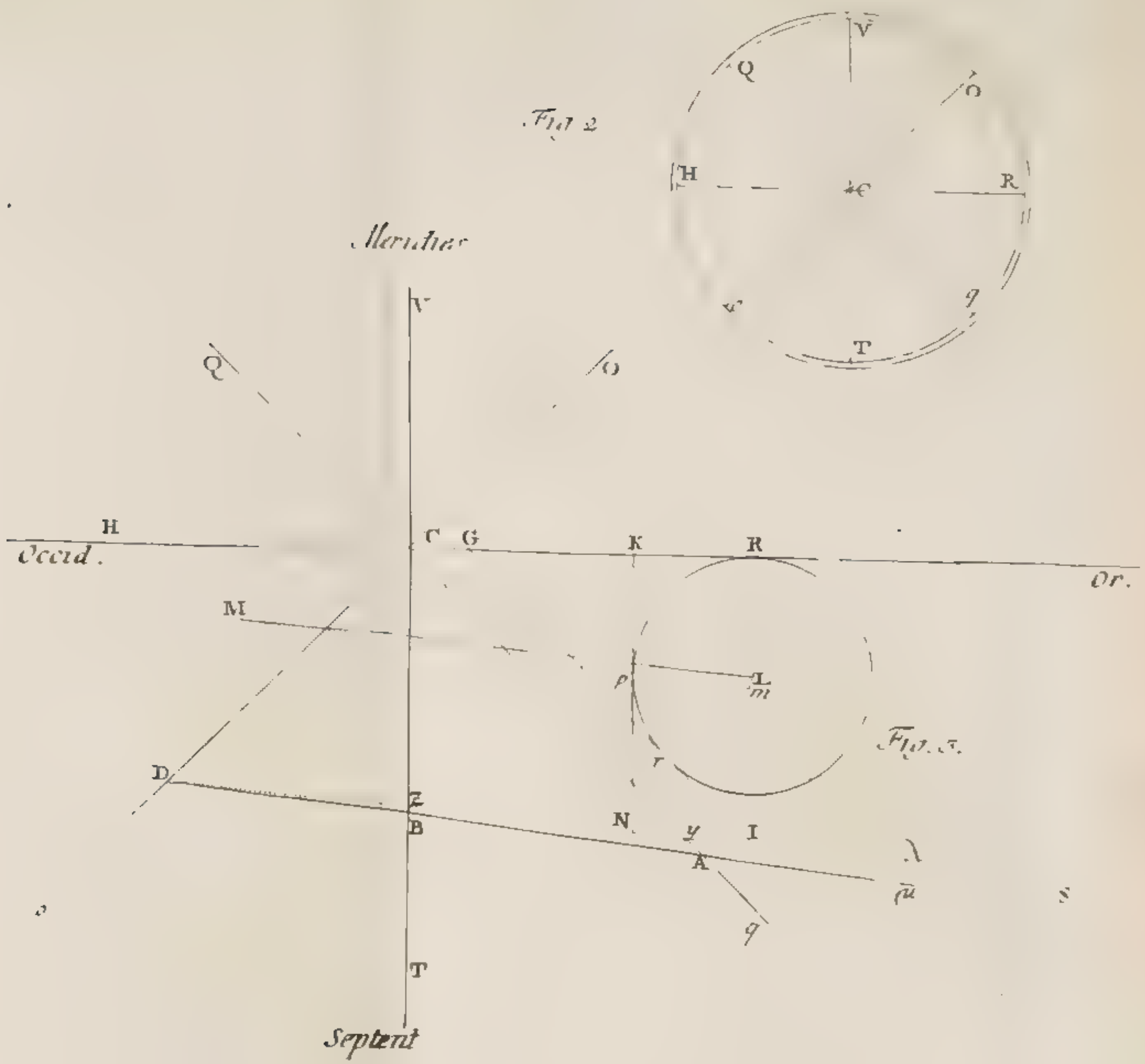

Fig. 2
V
Q
O
H
C
R
q
T
Meridies
Occid.
Or.
Septent
M
D
Z
B
N
y
I
A
L
m
K
G
Fig. 3.

Fig. 4.

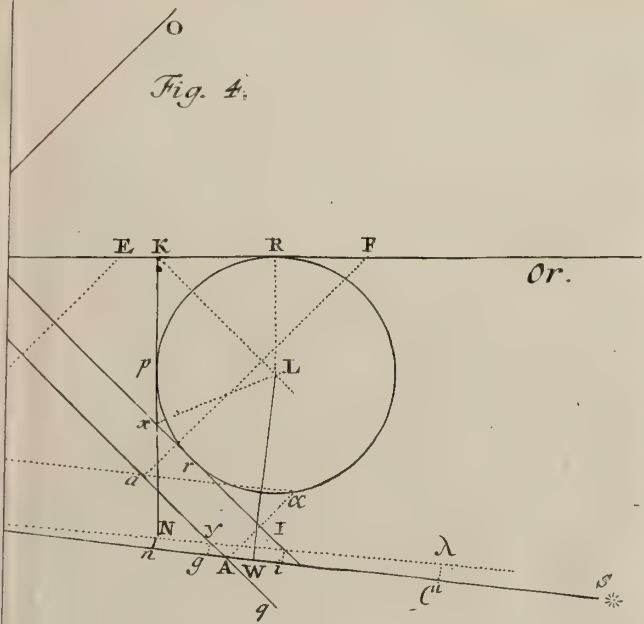
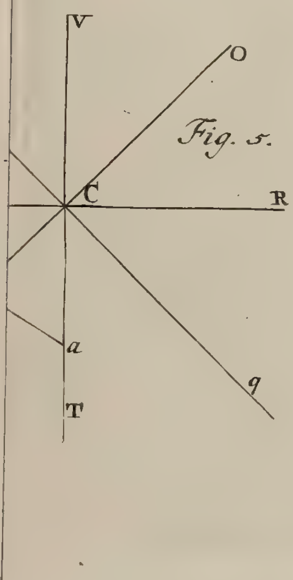


Fig. 5.



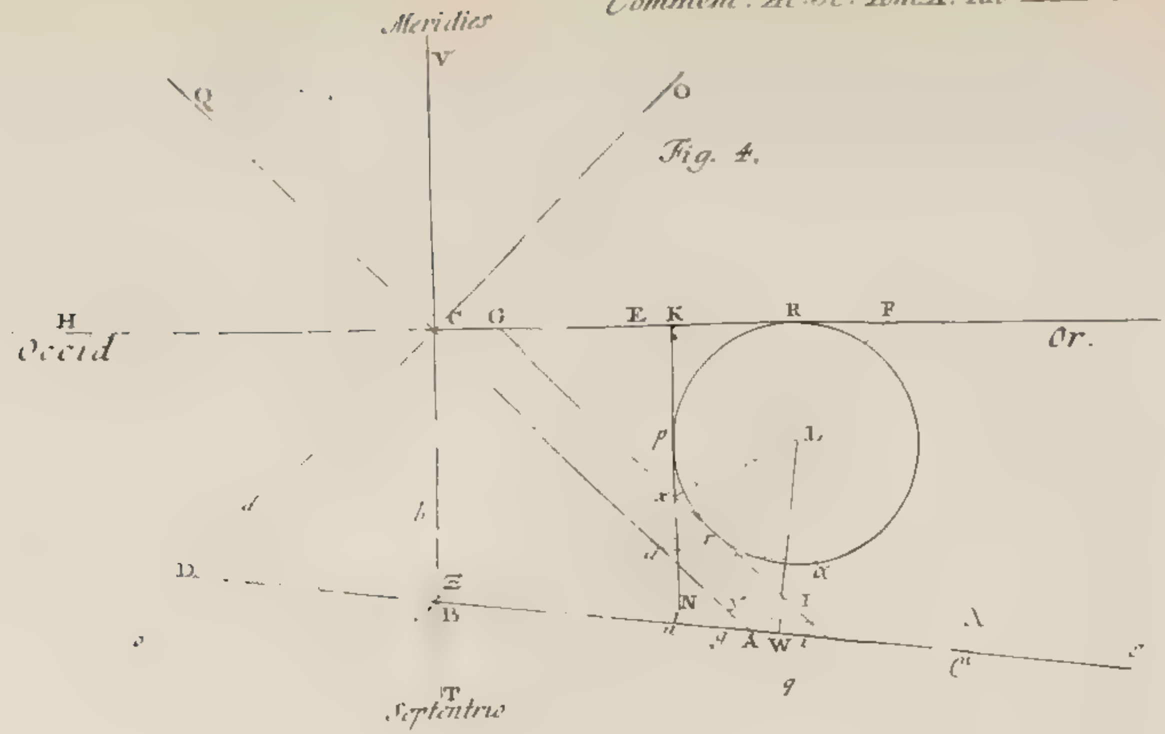

Meridies
V
Q
O
H
Occid
C
G
E
K
R
F
Or.
p
L
x
d
b
r
α
D
Ξ
B
N
I
A
W
Λ
q
T
Septentrio

Fig. 4.

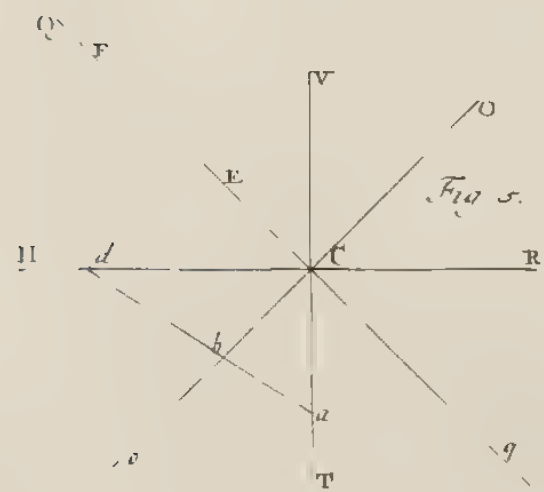
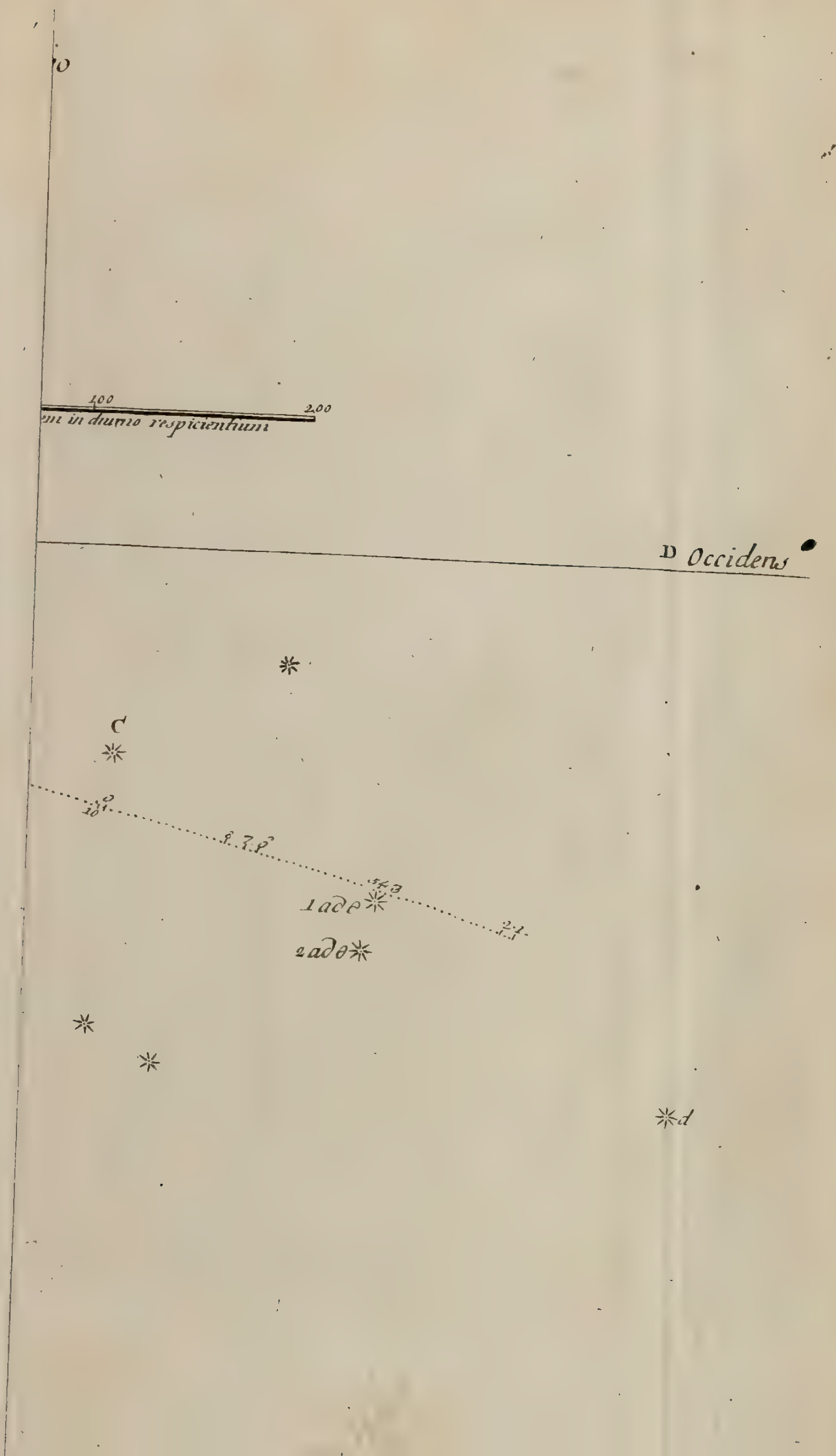

Q
F
V
O
E
H
d
C
R
b
a
e
q
T

Fig. 5.


100
200
em in diurno respicientium
D Occidens
C
1 ad ρ
2 ad θ
d

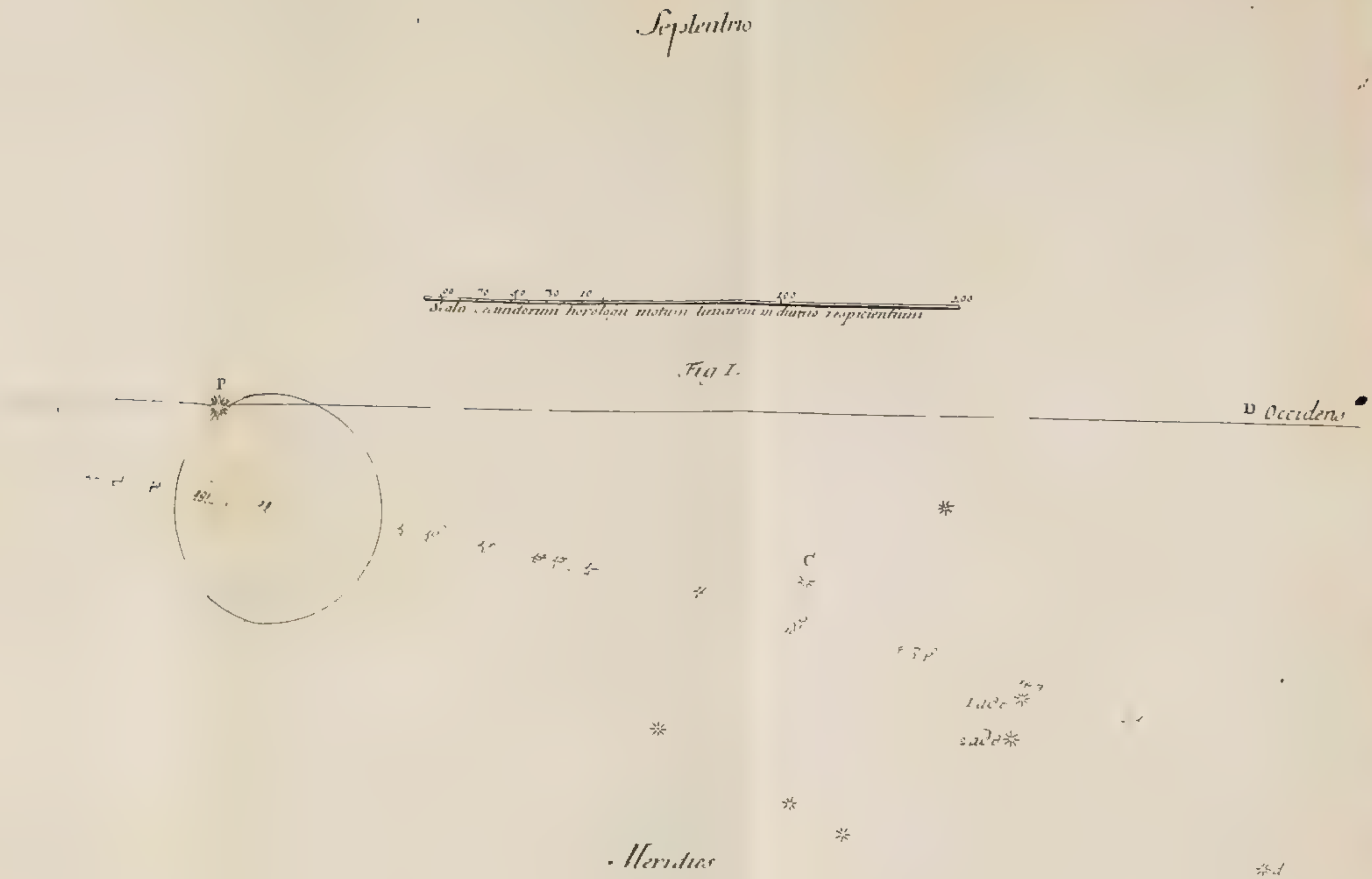


Fig. I.

BOUND BY
EX LIBRIS